REELLE FUNKTIONEN

VON

HANS HAHN

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT WIEN

ERSTER TEIL

PUNKTFUNKTIONEN

Published and Distributed in the Public Interest by Authority of the Attorney General under License No. A-1304

CHELSEA PUBLISHING COMPANY

231 WEST 29TH STREET, NEW YORK 1, N. Y.

1948

PRINTED IN THE UNITED STATES OF AMERICA

Vorbemerkungen.

Im Jahre 1921 habe ich eine „Theorie der reellen Funktionen“ veröffentlicht; sie ist seit langem vergriffen. Die großen Fortschritte, die dieses Wissensgebiet seither gemacht hat, ließen es zweckmäßig erscheinen, statt einer Neuauflage des früheren Werkes ein ganz neues herauszugeben. Es wird zwei Bände umfassen. Der vorliegende erste behandelt die „Punktfunktionen“; der zweite, der bald folgen soll, wird die „Mengenfunktionen“ behandeln.

An Vorkenntnissen wird lediglich vorausgesetzt, was jedem Studenten, der die Anfängervorlesungen gehört hat, geläufig ist. Insbesondere werden die erforderlichen Hilfsmittel aus der Mengenlehre im Buche selbst entwickelt; da aber dabei die Mengenlehre nicht Selbstzweck ist, wird auf die logischen Grundlagenfragen nicht eingegangen.

Ich habe mich bemüht, so weit als möglich in die Gebiete der aktuellen Forschung hineinzuführen. Nur wo die Dinge noch allzusehr im Flusse sind, mußte ich mir dies versagen; lediglich aus diesem Grunde wurde die verheißungsvolle Lehre von den projektiven Mengen nicht aufgenommen.

Einige historische Hinweise findet der Leser am Schlusse jedes Abschnittes zusammengestellt; sie erheben keinerlei Ansprüche auf Vollständigkeit; insbesondere war nicht beabsichtigt zu jedem Satze, jedem Begriffe seinen ersten Urheber namhaft zu machen; solche Fragen scheinen mir für die Mathematik wenig bedeutungsvoll.

Die Sätze sind, um das Nachschlagen zu erleichtern, durchgehend numeriert mit Nummern wie **27·4·81**; dabei bedeutet die Zahl vor dem ersten Punkt den Paragraph, die Zahl zwischen erstem und zweitem Punkte den Abschnitt des Paragraphen, in dem sich der Satz findet (Satz **27·4·81** steht also in § 27, Abschnitt 4); die Ziffern nach dem zweiten Punkte sind zu lesen wie die Stellen eines Dezimalbruches, so daß also Satz **27·4·72** dem Satze **27·4·8** vorangeht, hingegen Satz **27·4·81** dem Satze **27·4·8** nachfolgt.

In ähnlicher Weise wurden auch einzelne Formeln mit Nummern versehen. Die Formeln § 33 (5), § 33 (5·1) z. B. findet man in § 33, Ab-

schnitt 5. Wo eine Formelnummer ohne Angabe des Paragraphen zitiert ist, ist immer der Paragraph selbst gemeint, den man eben liest.

Eine Reihe von Fachgenossen haben mich freundlichst durch Verbesserungs- und Ergänzungsvorschläge unterstützt: ich danke den Herren Gödel, Hausdorff, Hurewicz, Knaster, Kuratowski, Lindenbaum, Menger, Nöbeling, Radakovic, Sierpiński, Szpilrajn für ihre gütige Unterstützung. Besonders aber möchte ich noch betonen, daß ich aus Hausdorffs Darstellungen der Mengenlehre mehr Nutzen gezogen habe, als durch Zitate belegt werden kann.

Noch habe ich der Akademischen Verlagsgesellschaft und den Herausgebern der Sammlung „Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern" zu danken, daß sie — trotz der Ungunst der Zeit — den Druck meines Buches ermöglichten. Möge dieses Buch einem schönen und ertragreichen, in Deutschland noch zu wenig bekannten Zweige der Mathematik neue Kenner und Forscher zuführen!

Wien, August 1932. Hans Hahn.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Grundbegriffe der allgemeinen Mengenlehre.

§ 1. Menge, Relation.

1. **Aussagen.** Um zu den Begriffen „Menge“, „Relation“ zu gelangen, gehen wir aus vom Begriffe der Aussage. Seien $p, q, r, \ldots$ Aussagen, wie z. B.: „Der Schnee ist weiß;“ „Sokrates war ein Grieche“. Jeder Aussage kommt einer und nur einer der beiden Wahrheitswerte w (wahr) oder f (falsch) zu. Zwei Aussagen p und q, die denselben Wahrheitswert haben, heißen äquivalent, in Zeichen $p \equiv q$. Je zwei wahre Aussagen sind also äquivalent, ebenso je zwei falsche. Zu jeder Aussage p gibt es ihre Negation $\sim p$; die Aussagen p und $\sim p$ haben entgegengesetzte Wahrheitswerte.

Aus je zwei Aussagen p und q können durch „Verknüpfung“ neue Aussagen gebildet werden; wir führen an: die Summe $p \vee q$; sie sagt aus, daß sei es p, sei es q den Wert w hat, d. h. daß mindestens eine der beiden Aussagen p und q wahr ist; es hat also $p \vee q$ den Wert f dann und nur dann, wenn sowohl p als q den Wert f hat; in allen anderen Fällen hat $p \vee q$ den Wert w. Sodann das Produkt $p \, . \, q$; es sagt aus, daß sowohl p als q den Wert w hat; $p \, . \, q$ hat also den Wert w dann und nur dann, wenn sowohl p als q den Wert w hat; in allen anderen Fällen hat $p \, . \, q$ den Wert f. Endlich die Implikation $p \supset q$, die nur eine andere Schreibweise für die Summe $(\sim p) \vee q$ ist; sie hat also den Wert f dann und nur dann, wenn p den Wert w und q den Wert f hat, in allen anderen Fällen hat sie den Wert w.

2. **Aussagenfunktionen.** Wir gehen nun aus von irgendeiner Gesamtheit von Gegenständen (den „Individuen“), die wir auch den „Grundbereich“ nennen; wir bezeichnen diese Gegenstände mit x. Es heiße $\varphi(x)$ eine „Aussagenfunktion“, wenn $\varphi(x)$ für jedes Individuum x eine Aussage ist; z. B. „x ist weiß“. Gilt für jedes x die Äquivalenz $\varphi(x) \equiv \psi(x)$, so schreiben wir $\varphi(x) \equiv_x \psi(x)$ und nennen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ formal äquivalent; gilt für jedes x die Implikation $\varphi(x) \supset \psi(x)$, so schreiben wir $\varphi(x) \supset_x \psi(x)$ (formale Implikation).

3. Mengen. Eine Aussagenfunktion $\varphi(x)$ wird für gewisse x den Wert w, für andere den Wert f haben. Wir sagen: die Aussagenfunktion $\varphi(x)$ definiert eine Menge[1]) M, nämlich die Menge aller x, für die $\varphi(x)$ den Wert w hat; und wir setzen fest: formal äquivalente Aussagenfunktionen definieren dieselbe Menge. Ist M die durch $\varphi(x)$ definierte Menge, so sagen wir: „x ist Element von M" oder „x gehört zu M", in Zeichen $x \varepsilon M$, wenn $\varphi(x)$ den Wert w hat, hingegen: „x gehört nicht zu M", in Zeichen $x \sim \varepsilon M$, wenn $\varphi(x)$ den Wert f hat. Die durch $\varphi(x)$ definierte Menge bezeichnen wir mit $[\varphi(\hat{x})]$. Es ist also die Aussage $x \varepsilon [\varphi(\hat{x})]$ äquivalent mit der Aussage $\varphi(x)$.

Es gibt Aussagenfunktionen, die für alle x den Wert w haben, z. B. $\varphi(x) \supset \varphi(x)$; also bildet der Grundbereich selbst eine Menge, die volle Menge, in Zeichen V. — Es gibt auch Aussagenfunktionen, die für kein x den Wert w haben, z. B. $\varphi(x) \,.\, (\sim \varphi(x))$; also gibt es auch eine Menge, die kein Element besitzt, die leere Menge, in Zeichen Λ. Je zwei Aussagenfunktionen, die für kein x den Wert w haben, sind formal äquivalent, definieren also dieselbe Menge: es gibt (bei gegebenem Grundbereiche) nur eine leere Menge. Die Aussagenfunktion $x = a$ (das Zeichen $=$ bedeutet Identität) definiert die nur aus dem Elemente a bestehende Menge, die mit $\{a\}$ bezeichnet wird. Ebenso definiert, wenn $a \neq b$, die Aussagenfunktion $(x = a) \vee (x = b)$ die aus den beiden Elementen a und b bestehende Menge $\{a, b\}$ usf. Wir bezeichnen die aus den endlich vielen Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestehende Menge mit $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Es definiere $\varphi(x)$ die Menge M und $\psi(x)$ die Menge N. Gilt $\varphi(x) \supset_x \psi(x)$, so gehört jedes Element von M auch zu N; wir sagen: M ist Teil von N, in Zeichen $M \subseteqq N$, oder $N \supseteqq M$. Ist insbesondere $M = \Lambda$, d. h. hat $\varphi(x)$ für alle x den Wert f, so gilt sicher $\varphi(x) \supset_x \psi(x)$; d. h. für jede Menge N gilt: $\Lambda \subseteqq N$, die leere Menge ist Teil jeder Menge.

Da $\varphi(x) \supset_x \varphi(x)$, gilt auch $M \subseteqq M$. Gilt $\varphi(x) \supset_x \psi(x)$, aber nicht $\psi(x) \supset_x \varphi(x)$, so gilt $M \subseteqq N$, aber nicht $N \subseteqq M$: es gibt mindestens ein x, das zu N, aber nicht zu M gehört. In dem Falle sagen wir: M ist echter Teil von N, in Zeichen: $M \subset N$, oder $N \supset M$.

Die Aussagenfunktion $\sim \varphi(x)$ hat für jedes x den entgegengesetzten Wert, wie $\varphi(x)$. Ist M die durch $\varphi(x)$ definierte Menge, so heißt die durch $\sim \varphi(x)$ definierte Menge das Komplement von M, in Zeichen $-M$. Aus $M \subseteqq N$ folgt $-M \supseteqq -N$. Wegen $\sim(\sim \varphi(x)) \equiv_x \varphi(x)$ ist $-(-M) = M$.

4. Relationen. Wir haben bisher Aussagenfunktionen $\varphi(x)$ betrachtet, die von einem variablen Gegenstande abhängen; wir betrachten nun Aus-

[1]) In der Logik sagt man „Klasse" statt „Menge".

sagenfunktionen $\varphi(x, y)$ (z. B. „x ist Sohn von y"), wobei sehr wohl x und y verschiedene Grundbereiche durchlaufen können. Gilt für jedes x und jedes y die Äquivalenz $\varphi(x, y) \equiv \psi(x, y)$, so sagen wir auch hier: $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ sind formal äquivalent und schreiben $\varphi(x, y) \equiv_{xy} \psi(x, y)$.

Eine Aussagenfunktion $\varphi(x, y)$ wird für gewisse Paare (x, y) den Wert w, für andere den Wert f haben. Wir sagen: die Aussagenfunktion $\varphi(x, y)$ definiert eine Relation R (und zwar definieren formal äquivalente Aussagenfunktionen dieselbe Relation); wir sagen „von x zu y besteht die Relation R", in Zeichen: $x R y$, wenn $\varphi(x, y)$ den Wert w hat; anderenfalls: $x \sim R y$. Die durch die Aussagenfunktion $\varphi(x, y)$ definierte Relation bezeichnen wir auch mit $[\varphi(\hat{x}, \hat{y})]$. Durch die (untereinander formal äquivalenten) Aussagenfunktionen $\varphi(x, y)$, die für alle Paare (x, y) den Wert f haben, wird eine Relation R definiert, für die $x R y$ stets falsch ist; sie heißt die leere Relation.

Zu jeder Relation gibt es eine inverse Relation R^{-1}, die definiert ist durch: $(x R^{-1} y) \equiv_{xy} (y R x)$. Es ist $(R^{-1})^{-1} = R$.

Ist R eine gegebene Relation, und bezeichnen wir mit $\varphi(x)$ die (nur von x abhängige) Aussage: „Es gibt mindestens ein y, für das $x R y$ gilt", so heißt die durch $\varphi(x)$ definierte Menge $[\varphi(\hat{x})]$ der Bereich der Relation R, in Zeichen $B(R)$; analog heißt die durch die Aussage: „Es gibt mindestens ein x, für das $x R y$ gilt" definierte Menge der Gegenbereich von R, in Zeichen $\mathfrak{G}(R)$. Offenbar ist $\mathfrak{G}(R) = B(R^{-1})$.

Sind P und Q zwei Relationen, und bezeichnen wir mit $\varphi(x, y)$ die (nur von x und y abhängige) Aussage: „Es gibt mindestens ein z, für das $x P z$ und $z Q y$ gilt", so heißt die durch $\varphi(x, y)$ definierte Relation: die aus P und Q zusammengesetzte Relation, in Zeichen $P|Q$. Diese Zusammensetzung zweier Relationen ist i. a. nicht kommutativ. Offenbar ist $(P|Q)^{-1} = Q^{-1}|P^{-1}$. Von besonderem Interesse ist der Fall, daß $\mathfrak{G}(P) \subseteq B(Q)$; in diesem Falle ist $B(P|Q) = B(P)$; ebenso: ist $\mathfrak{G}(P) \supseteq B(Q)$, so ist $\mathfrak{G}(P|Q) = \mathfrak{G}(Q)$. Ist also $\mathfrak{G}(P) = B(Q)$, so ist $B(P|Q) = B(P)$, $\mathfrak{G}(P|Q) = \mathfrak{G}(Q)$.

Wir bezeichnen in üblicher Weise eine Relation R auch als eine Abbildung des Bereiches $B(R)$ auf den Gegenbereich $\mathfrak{G}(R)$. Ist $x \varepsilon B(R)$, so heißt jedes y, für das $x R y$ gilt, ein Bild von x; ist $y \varepsilon \mathfrak{G}(R)$, so heißt jedes x, für das $x R y$ gilt, ein Urbild von y. Die Menge aller Bilder von x heißt die Bildmenge von x, in Zeichen $R(x)$; die Menge aller Urbilder von y heißt die Urbildmenge von y; sie kann offenbar mit $R^{-1}(y)$ bezeichnet werden. Ist $A \subseteq B(R)$, so heißt die Menge aller Bilder aller $x \varepsilon A$ die Bildmenge von A, in Zeichen $\dot{R}(A)$; ist $C \subseteq \mathfrak{G}(R)$, so

heißt die Menge aller Urbilder aller $y \varepsilon C$ die **Urbildmenge** von C; sie kann offenbar mit $R^{-1}(C)$ bezeichnet werden. Offenbar gilt für jedes $A \subseteqq B(R)$ und jedes $C \subseteqq \mathfrak{B}(R)$:

$$R^{-1}(R(A)) \supseteqq A; \qquad R(R^{-1}(C)) \supseteqq C. \tag{4}$$

Ist $R = P \mid Q$ und $\mathfrak{B}(P) \subseteqq B(Q)$, so ist (für jedes $A \subseteqq B(P)$): $R(A) = Q(P(A))$.

5. **Eindeutige Relationen. Funktionen.** Die Relation (Abbildung) R heißt **mehr-eindeutig** oder kurz **eindeutig**, wenn jedes $x \varepsilon B(R)$ nur ein Bild hat; sie heißt **ein-mehrdeutig**, wenn jedes $y \varepsilon \mathfrak{B}(R)$ nur ein Urbild hat; sie heißt **ein-eindeutig** (oder **schlicht**), wenn sie sowohl mehr-eindeutig als ein-mehrdeutig ist. Ist R mehr-eindeutig, ein-mehrdeutig, ein-eindeutig, so ist R^{-1} ein-mehrdeutig, mehr-eindeutig, ein-eindeutig.

1·5·1. *Damit für jedes $A \subseteqq B(R)$ gelte: $R^{-1}(R(A)) = A$, ist notwendig und hinreichend, daß R ein-mehrdeutig sei.*

Notwendig: Ist R nicht ein-mehrdeutig, so gibt es ein $y \varepsilon \mathfrak{B}(R)$ mit zwei verschiedenen Urbildern x_1, x_2. Sei nun $A = \{x_1\}$, so ist $y \varepsilon R(A)$; also $\{x_1, x_2\} \subseteqq R^{-1}(R(A))$, also $R^{-1}(R(A)) \supset A$. Hinreichend: Sei $x \varepsilon R^{-1}(R(A))$; d. h. es gibt ein $y \varepsilon R(A)$, so daß $x R y$; d. h. es gibt ein $z \varepsilon A$, so daß $z R y$ und $x R y$; da R ein-mehrdeutig, folgt aus $z R y$ und $x R y$ aber: $z = x$, und weil $z \varepsilon A$, ist auch $x \varepsilon A$. Also: aus $x \varepsilon R^{-1}(R(A))$ folgt $x \varepsilon A$, d. h. $R^{-1}(R(A)) \subseteqq A$. Da nach (4) auch $R^{-1}(R(A)) \supseteqq A$, ist also $R^{-1}(R(A)) = A$.

Ersetzt man in 1·5·1 R durch R^{-1}, so erhält man:

1·5·11. *Damit für jedes $C \subseteqq \mathfrak{B}(R)$ gelte: $R(R^{-1}(C)) = C$, ist notwendig und hinreichend, daß R mehr-eindeutig sei.*

1·5·2. *Damit für je zwei fremde Mengen $A \subseteqq B(R), A' \subseteqq B(R)$ auch die Bildmengen $R(A), R(A')$ fremd seien, ist notwendig und hinreichend, daß R ein-mehrdeutig sei.*

Dies folgt unmittelbar aus der Definition.

Eine eindeutige Relation (Abbildung) ordnet jedem $x \varepsilon B(R)$ genau ein Bild y zu; es ist also in diesem Falle $R(x) = \{y\}$. Wo kein Mißverständnis möglich, schreiben wir statt dessen auch $R(x) = y$. Man sagt auch: eine mehr-eindeutige Relation R definiert auf (oder in) $B(R)$ eine **Funktion**; $B(R)$ heißt auch der **Bereich** dieser Funktion. Zur Bezeichnung der eindeutigen Funktionen verwenden wir statt der Buchstaben R, P, Q usf. auch die Buchstaben f, g, h usf.

Sei A eine beliebige Menge; wir betrachten die mehr-eindeutige Relation, die jedem $x \varepsilon A$ die Zahl 1, jedem $x \sim \varepsilon A$ die Zahl 0 zuordnet. Die durch

diese Relation definierte Funktion (ihr Bereich ist die volle Menge V) heißt die charakteristische Funktion der Menge A.

Literatur zu Nr. 1—5: A. N. Whitehead u. B. Russell, Principia Mathematica I, Cambridge 1910 (2. Aufl. 1925). Zur Einführung: R. Carnap, Abriß der Logistik, Wien 1929.

6. **Komplexe, Folgen.** Besteht der Bereich $B\,(R)$ der eindeutigen Relation R aus den natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots, n$, so ordnet R jeder natürlichen Zahl i $(1 \leq i \leq n)$ ein Element $y_i \,\varepsilon\, \mathfrak{G}(R)$ zu; ist dann $\mathfrak{G}(R) \subseteqq M$, so sagt man: die Elemente $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bilden einen n-gliedrigen Komplex oder ein n-tupel aus M; wir bezeichnen einen solchen Komplex mit $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Ist sodann der Bereich $B\,(R)$ der eindeutigen Relation R die Menge aller natürlichen Zahlen, so ordnet R jeder natürlichen Zahl n ein Element $y_n \,\varepsilon\, \mathfrak{G}(R)$ zu; ist dann $\mathfrak{G}(R) \subseteqq M$, so sagt man: die Elemente $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ bilden eine Folge aus M; wir bezeichnen sie abgekürzt mit $((y_n))$. Sind $n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots$ wachsende natürliche Zahlen, so bilden auch $y_{n_1}, y_{n_2}, \ldots, y_{n_i}, \ldots$ eine Folge $((y_{n_i}))$ (y_{n_i} ist der natürlichen Zahl i zugeordnet); sie heißt eine Teilfolge von $((y_n))$. Haben in einer Folge $((y_n))$ alle Glieder mit höchstens endlich vielen Ausnahmen eine Eigenschaft (d. h. gibt es eine natürliche Zahl n^*, so daß y_n für $n \geq n^*$ diese Eigenschaft hat), so sagen wir: fast alle Glieder der Folge haben diese Eigenschaft.

Sei nun eine Folge von Folgen gegeben:

$$
(6)\qquad
\begin{array}{l}
y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}, \ldots \\
y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n}, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{m1}, y_{m2}, \ldots, y_{mn}, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Wir sagen: die y_{mn} bilden eine Doppelfolge, und zeigen:

1·6·1. *Die Glieder einer Doppelfolge können in eine einfache Folge geordnet werden.*

Das kann auf verschiedene Arten geschehen: Wir können z. B. die Elemente des Schemas (6) „nach Diagonalen" ordnen:

$$y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{13}, y_{22}, y_{31}, y_{14}, y_{23}, y_{32}, y_{41}, \ldots.$$

Oder wir können sie „dyadisch" ordnen: die Elemente der ersten Zeile in (6) werden der Reihe nach mit $z_1, z_3, z_5, \ldots$, die der zweiten mit $z_2, z_6, z_{10}, \ldots$, die der m-ten Zeile mit $z_{1.2^{m-1}}, z_{3.2^{m-1}}, z_{5.2^{m-1}}, \ldots$ bezeichnet.

§ 2. Verknüpfungen von Mengen.

1. **Summe, Durchschnitt, Differenz.** Seien $\varphi(x)$, $\psi(x)$ zwei Aussagenfunktionen, $[\varphi(\hat{x})] = A$, $[\psi(\hat{x})] = B$ die durch sie definierten Mengen. Die durch die Aussagenfunktion $\varphi(x) \vee \psi(x)$ definierte Menge wird bezeichnet mit $A + B$ und heißt die Summe der Mengen A und B; sie besteht aus allen Elementen, die zu mindestens einer der beiden Mengen A und B gehören. Die durch die Aussagenfunktion $\varphi(x) . \psi(x)$ definierte Menge wird bezeichnet mit $A.B$ oder $A\,B$ und heißt der Durchschnitt der Mengen A und B; sie besteht aus allen Elementen, die sowohl zu A als zu B gehören. Offenkundig gelten die kommutativen und assoziativen Gesetze:

$$(1{\cdot}1)\qquad \begin{gathered} A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C); \\ A\,B = B\,A, \quad (A\,B)\,C = A\,(B\,C); \end{gathered}$$

ferner erkennt man unmittelbar das Bestehen der beiden Distributivgesetze:

$$(1{\cdot}2)\qquad A.(B + C) = A\,B + A\,C; \quad A + B\,C = (A + B).(A + C).$$

Die folgenden drei Aussagen sind zu je zweien äquivalent:

$$(1{\cdot}3)\qquad A \subseteqq B, \quad A + B = B, \quad A\,B = A.$$

Die Differenz zweier Mengen wird definiert durch:

$$A - B = A.(-B),$$

wo $-B$ das Komplement von B bedeutet; sie besteht aus allen nicht zu B gehörenden Elementen von A. Bedeutet V die volle Menge, so ist: $-B = V - B$. Ist $B \subseteqq A$, so bezeichnen wir die Differenz $A - B$ auch als das Komplement von B zu A. Man erkennt ohne weiteres:

$$(1{\cdot}4)\qquad \begin{gathered} (A - B) + B = A + B, \qquad A - (A - B) = A\,B, \\ -(A - B) = (-A) + B. \end{gathered}$$

Für die Differenzbildung gilt:

$$(1{\cdot}5)\qquad \begin{gathered} A - (B + C) = (A - B).(A - C) = (A - B) - C, \\ A - B\,C = (A - B) + (A - C); \end{gathered}$$

insbesondere also für die Komplementbildung:

$$(1{\cdot}50)\qquad -(B + C) = (-B).(-C); \quad -(B\,C) = (-B) + (-C).$$

Wegen $B - C = B.(-C)$ folgt aus der zweiten Formel (1·5), indem man C durch $-C$ ersetzt:

$$(1{\cdot}51)\qquad A - (B - C) = (A - B) + A\,C.$$

Für die Differenzbildung gelten die Distributivgesetze:

$$(1{\cdot}6)\qquad \begin{gathered} (A + B) - C = (A - C) + (B - C), \\ A\,(B - C) = A\,B - A\,C = A\,B - C = (A - C)\,(B - C). \end{gathered}$$

Ist $A\,B = \Lambda$, so heißen A und B fremd. Durch

$$A = A\,B + (A - B) \tag{1·7}$$

ist eine Zerlegung der Menge A in zwei fremde Summanden gegeben. Die Summe $A + B$ wird durch die beiden folgenden Formeln in eine Summe verwandelt, deren Summanden (zu je zweien) fremd sind:

$$A + B = A + (B - A); \quad A + B = A\,B + (A - B) + (B - A). \tag{1·71}$$

Aus der Definition von Summe und Durchschnitt zweier Mengen ergibt sich unmittelbar auch die Definition von Summe und Durchschnitt endlich vieler Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Wir schreiben:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_k = \underset{i=1}{\overset{k}{S}} A_i, \quad A_1\,A_2 \ldots A_k = \underset{i=1}{\overset{k}{D}} A_i;$$

die Summe ist die Menge aller Elemente, die zu mindestens einer der Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_k$ gehören; der Durchschnitt ist die Menge aller Elemente, die zu sämtlichen Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_k$ gehören. Auf folgende Weise wird auch Summe und Durchschnitt aus unendlich vielen Mengen definiert.

Sei M eine Menge von Elementen m; durch eine eindeutige Relation, deren Bereich M ist, sei jedem $m \varepsilon M$ eine Menge A_m zugeordnet. Die durch die Aussagenfunktion: „Es gibt ein $m \varepsilon M$, so daß $x \varepsilon A_m$“ definierte Menge wird bezeichnet mit $\underset{m \varepsilon M}{S} A_m$ und heißt die Summe der Mengen A_m; sie besteht aus allen Elementen x, die zu mindestens einer Menge A_m gehören. Die durch die Aussagenfunktion: „Für alle $m \varepsilon M$ gilt $x \varepsilon A_m$“ definierte Menge wird bezeichnet mit $\underset{m \varepsilon M}{D} A_m$ und heißt der Durchschnitt der Mengen A_m; sie besteht aus allen Elementen x, die zu sämtlichen Mengen A_m gehören. Ist M die Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots, n, \ldots$, so haben wir es mit einer Mengenfolge $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ zu tun, deren Summe und Durchschnitt wir mit $\underset{n=1}{\overset{\infty}{S}} A_n$ und $\underset{n=1}{\overset{\infty}{D}} A_n$ oder kurz mit $\underset{n}{S} A_n$ und $\underset{n}{D} A_n$ bezeichnen. Ist M die Menge (k, n) der Paare natürlicher Zahlen, so haben wir es mit einer Doppelfolge von Mengen $A_{k\,n}$ zu tun, deren Summe und Durchschnitt wir mit $\underset{k,n}{S} A_{kn}$, $\underset{k,n}{D} A_{k\,n}$ bezeichnen. Ist $M = \Lambda$, so ist auch $\underset{m \varepsilon M}{S} A_m = \Lambda$, hingegen $\underset{m \varepsilon M}{D} A_m = V$, denn die den Durchschnitt definierende Aussagenfunktion kann als formale Implikation geschrieben werden: $(y \varepsilon M) \supset_y (x \varepsilon A_y)$; ist nun $M = \Lambda$, so hat $y \varepsilon M$ für alle y den Wahrheitswert f, die Implikation hat also für alle y den Wahrheitswert w, definiert also die volle Menge.

In Verallgemeinerung von (1·5) gelten, wie unmittelbar einzusehen, die Formeln:

$$(1\cdot 8)\qquad C - \underset{m\varepsilon M}{S} A_m = \underset{m\varepsilon M}{D} (C - A_m); \quad C - \underset{m\varepsilon M}{D} A_m = \underset{m\varepsilon M}{S} (C - A_m).$$

Sei nun R eine Relation, $B(R)$ ihr Bereich und sei $A_m \subseteqq B(R)$, $A \subseteqq B(R)$, $A' \subseteqq B(R)$; dann gilt:

$$(1\cdot 9)\qquad \begin{array}{c} R(\underset{m\varepsilon M}{S} A_m) = \underset{m\varepsilon M}{S} R(A_m); \quad R(\underset{m\varepsilon M}{D} A_m) \subseteqq \underset{m\varepsilon M}{D} R(A_m); \\ R(A' - A) \supseteqq R(A') - R(A). \end{array}$$

2·1·1. *Damit stets gelte* $R(\underset{m\varepsilon M}{D} A_m) = \underset{m\varepsilon M}{D} R(A_m)$, *ist notwendig und hinreichend, daß* R *ein-mehrdeutig sei.*

Notwendig: Ist R nicht ein-mehrdeutig, so gibt es ein $y \varepsilon \mathfrak{W}(R)$ mit zwei verschiedenen Urbildern x_1, x_2. Sei $A_1 = \{x_1\}$, $A_2 = \{x_2\}$; dann ist $A_1 A_2 = \Lambda$, also auch $R(A_1 A_2) = \Lambda$, hingegen gilt $y \varepsilon R(A_1) . R(A_2)$; also ist $R(A_1) . R(A_2) \neq \Lambda$. Hinreichend: Wegen (1·9) ist nur mehr zu zeigen: $\underset{m}{D} R(A_m) \subseteqq R(\underset{m}{D} A_m)$. Sei $y \varepsilon \underset{m}{D} R(A_m)$, d. h. $y \varepsilon R(A_m)$ für alle $m \varepsilon M$; da R ein-mehrdeutig, hat y nur ein Urbild x, und wegen $y \varepsilon R(A_m)$ ist $x \varepsilon A_m$ für alle $m \varepsilon M$, d. h. es ist $x \varepsilon \underset{m}{D} A_m$, und für das Bild y von x gilt also: $y \varepsilon R(\underset{m}{D} A_m)$. Aus $y \varepsilon \underset{m}{D} R(A_m)$ folgt also: $y \varepsilon R(\underset{m}{D} A_m)$, d. h. es ist $\underset{m}{D} R(A_m) \subseteqq R(\underset{m}{D} A_m)$.

2·1·2. *Damit stets gelte* $R(A' - A) = R(A') - R(A)$, *ist notwendig und hinreichend, daß* R *ein-mehrdeutig sei.*

Notwendig: Es habe y zwei verschiedene Urbilder x_1, x_2 und sei $A' = \{x_1\}$, $A = \{x_2\}$, also $y \varepsilon R(A')$, $y \varepsilon R(A)$, und mithin: $y \sim\varepsilon R(A') - R(A)$; da aber $A' - A = \{x_1\}$, ist $y \varepsilon R(A' - A)$, also $R(A' - A) \neq R(A') - R(A)$. Hinreichend: Wegen $A' - A \subseteqq A'$ ist $R(A' - A) \subseteqq R(A')$; nach 1·5·2 ist $R(A' - A)$ fremd zu $R(A)$; also ist $R(A' - A) \subseteqq R(A') - R(A)$. Aus (1·9) folgt also die Behauptung.

Aus 2·1·1 und 2·1·2 folgt, indem man R durch R^{-1} ersetzt:

2·1·3. *Ist* R *eindeutig, so gilt:*

$$R^{-1}(\underset{m\varepsilon M}{D} A_m) = \underset{m\varepsilon M}{D} R^{-1}(A_m); \quad R^{-1}(A' - A) = R^{-1}(A') - R^{-1}(A).$$

2. **Auswahl, Produkt.** Die Summe $\underset{m\varepsilon M}{S} A_m$ und der Durchschnitt $\underset{m\varepsilon M}{D} A_m$ sind offenkundig kommutativ und assoziativ. Um für sie auch die Distributivgesetze formulieren zu können, benötigen wir die Definition des Mengenproduktes $\underset{m\varepsilon M}{P} A_m$.

Unter einer Auswahlrelation, oder kürzer: einer Auswahl aus den A_m $(m \varepsilon M)$ verstehen wir eine eindeutige Relation f, deren Bereich $B(f) = M$ ist, und für die $f(m) \varepsilon A_m$ (für alle $m \varepsilon M$) ist; sie ordnet also jeder Menge A_m eines ihrer Elemente zu. Die Auswahlrelation, die jeder Menge A_m $(m \varepsilon M)$ das Element $a_m \varepsilon A_m$ zuordnet, bezeichnen wir als die Auswahl $((a_m))$ $(m \varepsilon M)$.

Besteht die Menge M aus den natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots, k$, so ist eine Auswahl aus $A_1, A_2, \ldots, A_k$ nichts anderes als ein k-tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ mit $a_i \varepsilon A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Besteht die Menge M aus allen natürlichen Zahlen, so ist eine Auswahl aus den A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ nichts anderes als eine Folge $((a_n))$ mit $a_n \varepsilon A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Das Auswahlaxiom besagt: Ist $A_m \neq \Lambda$ für alle $m \varepsilon M$, so gibt es eine Auswahl aus den A_m. Während diese Aussage für endliche Mengen M ohne weiteres bewiesen werden kann, scheint sie für unendliche Mengen M von den übrigen Prinzipien der Logik unabhängig zu sein. Sie stellt eine zur Begründung vieler Sätze der Mengenlehre — wie es scheint — unentbehrliche Annahme dar.

Unter dem Produkte $\underset{m \varepsilon M}{P} A_m$ versteht man die Menge aller Auswahlen aus den A_m $(m \varepsilon M)$. Besteht M aus den natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots, k$, so schreiben wir das Produkt in der Form $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ oder $\overset{k}{\underset{i=1}{P}} A_i$; es besteht dann aus allen k-tupeln $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ mit $a_i \varepsilon A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Insbesondere ist also $A \times B$ die Menge aller Paare (a, b) mit $a \varepsilon A, b \varepsilon B$. Offenbar gilt:

$$
(2) \qquad \begin{aligned} (A \times B) - (A' \times B') &= \bigl((A - A') \times B\bigr) + \bigl(A \times (B - B')\bigr) \\ &= \bigl((A - A') \times (B - B')\bigr) + \bigl((A - A') \times B\,B'\bigr) + \bigl(A\,A' \times (B - B')\bigr), \end{aligned}
$$

und in dieser letzten Darstellung sind die drei Summanden zu je zweien fremd.

Es ist $A \times B \supset \Lambda$ dann und nur dann, wenn sowohl $A \supset \Lambda$ als $B \supset \Lambda$.

2·2·1. *Damit $A' \times B' \subseteqq A \times B$ sei, ist hinreichend, und wenn $A' \supset \Lambda$, $B' \supset \Lambda$ ist, auch notwendig, daß $A' \subseteqq A$, $B' \subseteqq B$ sei.*

2·2·11. *Damit $A' \times B' \subset A \times B$ sei, ist, wenn $A' \supset \Lambda$, $B' \supset \Lambda$, notwendig, und wenn $A \supset \Lambda$, $B \supset \Lambda$, hinreichend, daß sei es $A' \subseteqq A$, $B' \subset B$, sei es $A' \subset A$, $B' \subseteqq B$ gelte.*

Es gelten (wenn $M \supset \Lambda$) die Distributivgesetze:

$$
(2 \cdot 1) \quad \bigl(\underset{m \varepsilon M}{S} A_m\bigr) \times B = \underset{m \varepsilon M}{S} (A_m \times B)\,; \quad \bigl(\underset{m \varepsilon M}{D} A_m\bigr) \times B = \underset{m \varepsilon M}{D} (A_m \times B),
$$

sowie analoge Gesetze für den zweiten Faktor.

Ist $M = \Lambda$, so gibt es genau eine Auswahlrelation aus den A_m: die leere Relation L (§ 1, 4). Also ist:

$$(2\cdot2)\qquad \underset{m \varepsilon M}{P} A_m = \{L\} \text{ für } M = \Lambda.$$

Nun sind wir in der Lage, die Distributivgesetze für Summen und Durchschnitte allgemein zu formulieren: Es sei zu bilden $\underset{m \varepsilon M}{D}\ \underset{l \varepsilon L_m}{S} A_{ml}$ und $\underset{m \varepsilon M}{S}\ \underset{l \varepsilon L_m}{D} A_{ml}$; sei P die Menge aller Auswahlen aus den L_m, also: $P = \underset{m \varepsilon M}{P} L_m$, und sei $p \varepsilon P$, etwa $p = ((l_m))$; wir setzen:

$$D_p = \underset{m \varepsilon M}{D} A_{m l_m}, \qquad S_p = \underset{m \varepsilon M}{S} A_{m l_m};$$

dann lauten die Distributivgesetze:

$$(2\cdot3)\qquad \underset{m \varepsilon M}{D}\ \underset{l \varepsilon L_m}{S} A_{ml} = \underset{p \varepsilon P}{S} D_p; \quad \underset{m \varepsilon M}{S}\ \underset{l \varepsilon L_m}{D} A_{ml} = \underset{p \varepsilon P}{D} S_p.$$

Literatur: Die Bedeutung des Auswahlaxioms hat zuerst E. Zermelo erkannt. Näheres bei W. Sierpiński, Bull. Crac. 1918, S. 97; Fund. math. 2 (1921) S. 112; A. Tarski, Fund. math. 5 (1924) S. 145; A. Fraenkel, Berl. Ber. 1922, S. 253; Whitehead-Russell, Princ. Math. I, Part II, Sect. D (Selections).

3. **Potenz.** Die Potenz A^B wird definiert als das Produkt $\underset{b \varepsilon B}{P} A_b$, in dem alle Faktoren $A_b = A$ sind. Es ist also A^B die Menge aller Funktionen $f(b)$, deren Bereich $= B$ ist, und für die $f(b) \varepsilon A$ für alle $b \varepsilon B$. Aus (2·2) folgt insbesondere:

$$(3)\qquad A^{\Lambda} = \{L\},$$

wo L die leere Relation bedeutet.

§ 3. Mengensysteme, Mengenfolgen.

1. **Abgeschlossene Mengensysteme.** Eine Menge von Mengen wollen wir als ein Mengensystem bezeichnen. Wir nennen ein Mengensystem disjunkt, wenn je zwei verschiedene seiner Mengen fremd sind. Sei ein Mengensystem $\mathfrak{M}$ gegeben und eine endliche Anzahl Verknüpfungen $V_1, V_2, \ldots, V_k$, die aus je zwei Mengen von $\mathfrak{M}$ wieder eine Menge herleiten; wir nennen das System $\mathfrak{M}$ abgeschlossen hinsichtlich der Verknüpfungen $V_1, V_2, \ldots, V_k$, wenn jede dieser Verknüpfungen, angewendet auf zwei Mengen aus $\mathfrak{M}$, wieder eine Menge aus $\mathfrak{M}$ ergibt.

3·1·1. *Zu jedem Mengensystem $\mathfrak{M}$ gibt es ein kleinstes System $\overline{\mathfrak{M}} \supseteq \mathfrak{M}$, das hinsichtlich der Verknüpfungen $V_1, V_2, \ldots, V_k$ abgeschlossen ist.*

Wir fügen zu $\mathfrak{M}$ alle Mengen hinzu, die aus je zwei Mengen von $\mathfrak{M}$ durch Anwendung der Verknüpfungen $V_1, V_2, \ldots, V_k$ hervorgehen; das so ent-

standende Mengensystem heiße $\mathfrak{M}_1$. In derselben Weise entstehe $\mathfrak{M}_2$ aus $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_3$ aus $\mathfrak{M}_2$ usf. Wir zeigen: $\overline{\mathfrak{M}} = \underset{n}{S}\, \mathfrak{M}_n$. Jedenfalls muß jedes $\mathfrak{M}$ enthaltende, hinsichtlich der Verknüpfungen $V_1, V_2, \ldots, V_k$ abgeschlossene System $\supseteqq \underset{n}{S}\, M_n$ sein. Es ist also nur mehr zu zeigen, daß $\underset{n}{S}\, \mathfrak{M}_n$ hinsichtlich der Verknüpfungen $V_1, V_2, \ldots, V_k$ abgeschlossen ist. Sei $A \varepsilon \underset{n}{S}\, \mathfrak{M}_n$, $B \varepsilon \underset{n}{S} \mathfrak{M}_n$; dann gibt es ein n' und ein n'', so daß $A \varepsilon \mathfrak{M}_{n'}$, $B \varepsilon \mathfrak{M}_{n''}$; sei etwa $n' \leq n''$; wegen $\mathfrak{M}_{n'} \subseteqq \mathfrak{M}_{n''}$ ist dann auch $A \varepsilon \mathfrak{M}_{n''}$. Entsteht C aus A und B durch Anwendung von V_i, so ist $C \varepsilon \mathfrak{M}_{n''+1}$, also auch $C \varepsilon \underset{n}{S} \mathfrak{M}_n$.

Offenbar gilt:

3·1·2. *Sind die Mengensysteme $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ abgeschlossen hinsichtlich der Verknüpfungen $V_1, V_2, \ldots, V_k$, so auch ihr Durchschnitt $\mathfrak{M}\,\mathfrak{N}$.*

2. **Ringe.** Ein erstes Beispiel erhalten wir, wenn wir für die obigen Verknüpfungen V_i Summen- und Durchschnittsbildung wählen. Ein Mengensystem, das hinsichtlich Summen- und Durchschnittsbildung aus je zwei Mengen des Systemes abgeschlossen ist, heißt ein Ring. Beispiele: Das leere Mengensystem; jedes Mengensystem, das nur aus einer einzigen Menge besteht; das System aller Teile einer gegebenen Menge.

Wegen der Gültigkeit der Distributivgesetze zwischen Summen- und Durchschnittsbildung vereinfacht sich die Konstruktion des kleinsten Ringes $\mathfrak{R} \supseteqq \mathfrak{M}$ (des „kleinsten Ringes über $\mathfrak{M}$“) gegenüber dem eben auseinandergesetzten Verfahren in folgender Weise: Man füge zunächst zu $\mathfrak{M}$ die Durchschnitte aus je endlichvielen Mengen von $\mathfrak{M}$ hinzu; dadurch entstehe das Mengensystem $\mathfrak{M}'$; sodann füge man zu $\mathfrak{M}'$ die Summen aus je endlich vielen Mengen von $\mathfrak{M}'$ hinzu; das so entstehende System $\mathfrak{R}$ ist der kleinste Ring über $\mathfrak{M}$. Da offenbar jeder Ring über $\mathfrak{M}$ das System $\mathfrak{R}$ enthält, braucht nur gezeigt zu werden, daß $\mathfrak{R}$ ein Ring ist; sei also $A \varepsilon \mathfrak{R}$, $B \varepsilon \mathfrak{R}$, etwa $A = P_1 + P_2 + \ldots + P_m$, $B = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n$, wo jedes $P_i \varepsilon \mathfrak{M}'$ und jedes $Q_j \varepsilon \mathfrak{M}'$; daß nun auch $A + B \varepsilon \mathfrak{R}$, liegt auf der Hand; und nach dem ersten Distributivgesetz (§ 2, (1·2)) ist $A\,B = \underset{i,j}{S}\, P_i\,Q_j$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$; da hierin $P_i\,Q_j \varepsilon \mathfrak{M}'$, ist $A\,B \varepsilon \mathfrak{R}$. — Ebenso hätte man den kleinsten Ring $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$ auch erhalten, indem man zuerst zu $\mathfrak{M}$ die Summen aus je endlich vielen Mengen von $\mathfrak{M}$ hinzufügt, wodurch das System $\mathfrak{M}''$ entstehe, und dann zu $\mathfrak{M}''$ die Durchschnitte aus je endlich vielen Mengen von $\mathfrak{M}''$ hinzufügt.

3·2·1. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, so kann jede Summe*[1] $\underset{i=1}{\overset{\infty}{S}} A_i \; (A_i \,\varepsilon\, \mathfrak{M})$ *in der Form dargestellt werden:* $\underset{i=1}{\overset{\infty}{S}} A_i = \underset{i=1}{\overset{\infty}{S}} B_i$, *wo* $B_i \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$ *und* $A_i \subseteqq B_i \subseteqq B_{i+1}$.

Man hat nur zu setzen: $B_i = A_1 + A_2 + \ldots + A_i$.

3·2·11. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, so kann jeder Durchschnitt*[1] $\underset{i=1}{\overset{\infty}{D}} A_i \; (A_i \,\varepsilon\, \mathfrak{M})$ *in der Form dargestellt werden:* $\underset{i=1}{\overset{\infty}{D}} A_i = \underset{i=1}{\overset{\infty}{D}} B_i$, *wo* $B_i \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$ *und* $A_i \supseteqq B_i \supseteqq B_{i+1}$.

Man hat nur zu setzen: $B_i = A_1 A_2 \ldots A_i$.

3. **Körper.** Ein zweites Beispiel erhalten wir, wenn wir für die Verknüpfungen V_i Summen- und Differenzenbildung wählen. Ein Mengensystem, das hinsichtlich Summen und Differenzenbildung aus je zwei Mengen des Systemes abgeschlossen ist, heißt ein Körper. Beispiele: Das leere Mengensystem; das nur aus der leeren Menge bestehende Mengensystem; jedes Mengensystem, das aus der leeren und einer nicht leeren Menge besteht; das System aller Teile einer gegebenen Menge.

Da vermöge der zweiten Formel § 2, (1·4) Durchschnittsbildung durch Differenzenbildung ausgedrückt werden kann, ist jeder Körper auch hinsichtlich der Durchschnittsbildung abgeschlossen; d. h. jeder Körper ist auch ein Ring.

Jeder nicht leere Körper $\mathfrak{M}$ enthält die leere Menge Λ; denn aus $A \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$ folgt $A - A \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$, d. h. $\Lambda \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$.

3·3·1. *Ist das Mengensystem $\mathfrak{M}$ abgeschlossen hinsichtlich der Summenbildung aus je zweien seiner Mengen, gibt es ein $E \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$, so daß $A \subseteqq E$ für alle $A \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$, und gilt neben $A \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$ stets $E - A \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{M}$ ein Körper.*

Denn nach § 2, (1·5) (erste Formel) ist: $A - B = E - \big((E - A) + B\big)$.

Nach 3·1·1 gibt es über jedem Mengensysteme $\mathfrak{M}$ einen kleinsten Körper $\mathfrak{K}$; wir zeigen, wie er gebildet werden kann. Da $A\,(-B) = A - B$, $A\,(-B)\,(-C) = (A - B) - C$ usf., muß $\mathfrak{K}$ alle Durchschnitte $M_1 M_2 \ldots M_k$ enthalten, in denen für jeden Faktor sei es $M_i \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$ sei es $-M_i \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$, und für mindestens einen Faktor $M_i \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$ gilt. Man füge alle diese Durchschnitte zu $\mathfrak{M}$ hinzu, wodurch $\mathfrak{M}'$ entstehe. Mit $\mathfrak{K}$ bezeichnen wir das System, das aus $\mathfrak{M}'$ hervorgeht, indem man zu $\mathfrak{M}'$ alle Summen aus endlich vielen in $\mathfrak{M}'$ vorkommenden Mengen hinzufügt. Da offenbar jeder Körper über $\mathfrak{M}$ das System $\mathfrak{K}$ enthält, ist — um zu beweisen, daß $\mathfrak{K}$ der kleinste Körper über $\mathfrak{M}$ ist — nur mehr zu zeigen, daß $\mathfrak{K}$ ein Körper ist; und da aus

[1]) Satz 3·2·1 gilt auch für Summen $\underset{i=1}{\overset{k}{S}}$, Satz 3·2·11 auch für Durchschnitte $\underset{i=1}{\overset{k}{D}}$.

$M \varepsilon \mathfrak{K}$, $N \varepsilon \mathfrak{K}$ gewiß folgt: $M + N \varepsilon \mathfrak{K}$, ist nur mehr zu zeigen, daß auch $M - N \varepsilon \mathfrak{K}$. Sei also $M = M_1 + M_2 + \ldots + M_m$, $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_n$, wo $M_i \varepsilon \mathfrak{M}'$, $N_i \varepsilon \mathfrak{M}'$; dann ist nach § 2 (1·50) (erste Formel): $-N = (-N_1) \,.\, (-N_2) \ldots (-N_n)$, also nach § 2 (1·2) (erste Formel):

$$\begin{aligned} M - N &= M_1(-N) + M_2(-N) + \ldots + M_m(-N) \\ &= M_1(-N_1)(-N_2)\ldots(-N_n) + M_2(-N_1)(-N_2)\ldots(-N_n) + \\ &\qquad \ldots + M_m(-N_1)(-N_2)\ldots(-N_n). \end{aligned} \tag{3}$$

Wegen $N_j \varepsilon \mathfrak{M}'$ ist hierin jedes N_j Durchschnitt endlich vieler Mengen, die selbst, oder deren Komplemente zu $\mathfrak{M}$ gehören; also ist nach § 2 (1·50) (zweite Formel) $-N_j$ Summe endlich vieler Mengen, die selbst, oder deren Komplemente zu $\mathfrak{M}$ gehören; also ist in (3) jeder Summand $M_i(-N_1)(-N_2)\ldots(-N_n)$ Summe endlich vieler Summanden aus $\mathfrak{M}'$, dasselbe gilt daher für $M - N$, also ist $M - N \varepsilon \mathfrak{K}$, w. z. b. w.

3·3·11. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Körper, so kann jede Summe*[1] $\underset{i=1}{\overset{\infty}{S}} A_i$ $(A_i \varepsilon \mathfrak{M})$ *in der Form dargestellt werden:* $\underset{i=1}{\overset{\infty}{S}} C_i$ $(C_i \varepsilon \mathfrak{M})$, *wo* $C_i \subseteqq A_i$ *und je zwei* C_i *fremd sind.*

Man hat nur zu setzen: $C_1 = A_1$, $C_i = A_i - \underset{j=1}{\overset{i-1}{S}} A_j$ für $i > 1$.

Sei $\mathfrak{M}$ ein Mengensystem; wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}_+$ das System aller Mengen, die Summen endlich vieler Mengen aus $\mathfrak{M}$ sind. Dann gilt:

3·3·2. *Wenn aus $M \varepsilon \mathfrak{M}$, $M' \varepsilon \mathfrak{M}$ folgt: $M - M' \varepsilon \mathfrak{M}_+$, so ist $\mathfrak{M}_+$ ein Körper.*

Da $\mathfrak{M}_+$ jedenfalls hinsichtlich Summenbildung abgeschlossen ist, ist nur zu zeigen: aus $N \varepsilon \mathfrak{M}_+$, $N' \varepsilon \mathfrak{M}_+$ folgt $N - N' \varepsilon \mathfrak{M}_+$. Sei also $N = M_1 + M_2 + \ldots + M_m$, $N' = M_1' + M_2' + \ldots + M_n'$ $(M_i \varepsilon \mathfrak{M}, M_i' \varepsilon \mathfrak{M})$. Da dann $N - N' = \underset{i=1}{\overset{m}{S}} (M_i - (M_1' + M_2' + \ldots + M_n'))$ und da $\mathfrak{M}_+$ abgeschlossen hinsichtlich Summenbildung, genügt es zu zeigen, daß $M_i - (M_1' + M_2' + \ldots + M_n') \varepsilon \mathfrak{M}_+$. Das ist nach Voraussetzung richtig für $n = 1$; wir haben also noch zu zeigen: ist $M_i - (M_1' + M_2' + \ldots + M_n') \varepsilon \mathfrak{M}_+$ und $M_{n+1}' \varepsilon \mathfrak{M}$, so ist auch $M_i - (M_1' + M_2' + \ldots + M_{n+1}') \varepsilon \mathfrak{M}_+$. Sei also $M_i - (M_1' + M_2' + \ldots + M_n') = M_1^* + M_2^* + \ldots + M_k^*$ $(M_j^* \varepsilon \mathfrak{M})$; dann ist $M_i - (M_1' + M_2' + \ldots + M_{n+1}') = \underset{j=1}{\overset{k}{S}} (M_j^* - M_{n+1}')$; da nach Voraussetzung $M_j^* - M_{n+1}' \varepsilon \mathfrak{M}_+$, so ist auch $M_i - (M_1' + M_2' + \ldots + M_{n+1}') \varepsilon \mathfrak{M}_+$, w. z. b. w.

---

[1]) Satz **3·3·11** gilt auch für Summen $\underset{i=1}{\overset{k}{S}}$.

3·3·21. *Ist (für alle $M \varepsilon \mathfrak{M}$, $M' \varepsilon \mathfrak{M}$) $M - M'$ Summe endlich vieler disjunkter Summanden aus $\mathfrak{M}$, so ist auch jede Menge aus $\mathfrak{M}_+$ Summe endlich vieler disjunkter Summanden aus $\mathfrak{M}$.*

Sei $N \varepsilon \mathfrak{M}_+$, d. h. $N = M_1 + M_2 + \ldots + M_n$ ($M_i \varepsilon \mathfrak{M}$). Die Behauptung ist richtig für $n = 1$. Wir haben also noch zu zeigen: gilt die Behauptung für N, und ist $M_{n+1} \varepsilon \mathfrak{M}$, so gilt sie auch für $N + M_{n+1}$. Sei also $N = M_1' + \ldots + M_k'$, wo die $M_i' \varepsilon \mathfrak{M}$ und disjunkt. Dann ist $N + M_{n+1} = M_1' + \ldots + M_k' + (M_{n+1} - (M_1' + \ldots + M_k'))$, und es genügt zu zeigen, daß $M_{n+1} - (M_1' + \ldots + M_k')$ Summe endlich vieler disjunkter Summanden aus $\mathfrak{M}$ ist. Das ist nach Voraussetzung richtig für $k=1$; bleibt also noch zu zeigen: ist $M_{n+1} - (M_1' + \ldots + M_k')$ Summe endlich vieler disjunkter Summanden aus $\mathfrak{M}$ und ist $M_{k+1}' \varepsilon \mathfrak{M}$, so ist auch $M_{n+1} - (M_1' + \ldots + M_{k+1}')$ Summe endlich vieler disjunkter Summanden aus $\mathfrak{M}$. Sei also $M_{n+1} - (M_1' + \ldots + M_k') = M_1'' + \ldots + M_l''$, wo die $M_i'' \varepsilon \mathfrak{M}$ und disjunkt; dann ist $M_{n+1} - (M_1' + \ldots + M_{k+1}') = (M_1'' - M_{k+1}') + \ldots + (M_l'' - M_{k+1}')$; hierin ist nach Voraussetzung jeder Summand Summe endlich vieler disjunkter Mengen aus $\mathfrak{M}$, und da die Summanden $M_i'' - M_{k+1}'$ selbst disjunkt sind, ist auch $M_{n+1} - (M_1' + \ldots + M_{k+1}')$ Summe endlich vieler disjunkter Mengen aus $\mathfrak{M}$, w. z. b. w.

3·3·22. *Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Mengensysteme, in denen die Differenz je zweier Mengen des Systems Summe endlich vieler disjunkter Mengen des Systemes ist, und sei $\mathfrak{P}$ das System aller Mengen $A \times B$ ($A \varepsilon \mathfrak{A}$, $B \varepsilon \mathfrak{B}$); dann ist $\mathfrak{P}_+$ ein Körper, und jede Menge aus $\mathfrak{P}_+$ ist Summe endlich vieler disjunkter Mengen aus $\mathfrak{P}$.*

Sei $A \times B \varepsilon \mathfrak{P}$, $A' \times B' \varepsilon \mathfrak{P}$. Nach **3·3·2** sind $\mathfrak{A}_+$ und $\mathfrak{B}_+$ Körper; da jeder Körper ein Ring, ist $A A' \varepsilon \mathfrak{A}_+$, $B B' \varepsilon \mathfrak{B}_+$; nach **3·3·21** ist also $A A'$ Summe endlich vieler disjunkter Summanden aus $\mathfrak{A}$, und nach Voraussetzung gilt das auch für $A - A'$; ebenso sind $B B'$ und $B - B'$ Summen endlich vieler disjunkter Summanden aus $\mathfrak{B}$. Nach § 2 (2) ist also, auf Grund des Distributivgesetzes § 2 (2·1), auch $(A \times B) - (A' \times B')$ Summe endlich vieler disjunkter Summanden aus $\mathfrak{P}$. Nun folgt die Behauptung aus **3·3·2** und **3·3·21**.

4. σ-Systeme, δ-Systeme. Betrachten wir nun an Stelle der in Nr. 1 betrachteten Verknüpfungen $V_1, V_2, \ldots, V_k$, die je zwei Mengen aus $\mathfrak{M}$ eine Menge zuordneten, irgendwelche Operationen $W_1, W_2, \ldots, W_k$, die jeder Mengenfolge aus $\mathfrak{M}$ (oder auch nur gewissen solchen Mengenfolgen) eine Menge zuordnen. Gehören die einer solchen Mengenfolge durch die genannten Operationen zugeordneten k Mengen stets wieder zu $\mathfrak{M}$, so heißt $\mathfrak{M}$ hinsichtlich der Operationen $W_1, W_2, \ldots, W_k$ abgeschlossen. Auch hier

kann man zeigen, daß es zu jedem Mengensystem $\mathfrak{M}$ ein kleinstes System $\overline{\mathfrak{M}} \supseteqq \mathfrak{M}$ gibt, das hinsichtlich $W_1, W_2, \ldots, W_k$ abgeschlossen ist; doch gehen wir auf diesen allgemeinen Satz nicht ein.

Zwei Beispiele erhalten wir, wenn wir die Summenbildung oder die Durchschnittsbildung aus einer Mengenfolge betrachten. Ein Mengensystem, das hinsichtlich der Summenbildung (der Durchschnittsbildung) aus Mengenfolgen abgeschlossen ist, heißt ein σ-System (ein δ-System). Beispiele: Das leere Mengensystem; jedes Mengensystem, das nur aus einer einzigen Menge besteht; das System aller Teile einer Menge. Offenbar ist jedes σ-System (jedes δ-System) auch abgeschlossen hinsichtlich der Summenbildung (der Durchschnittsbildung) aus je zweien seiner Mengen, denn $A + B = A + B + A + B + \ldots$. Also ist ein Mengensystem, das sowohl σ- als auch δ-System ist, ein Ring.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}_\sigma$ (mit $\mathfrak{M}_\delta$) das Mengensystem, das entsteht, indem man zu $\mathfrak{M}$ die Summen $\underset{\nu}{S}\, M_\nu$ (die Durchschnitte $\underset{\nu}{D}\, M_\nu$) aller Mengenfolgen $((M_\nu))$ aus $\mathfrak{M}$ hinzufügt. Jede Menge $M \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_\sigma$ kann in der Form geschrieben werden: $M = \underset{\nu}{S}\, M_\nu$ $(M_\nu \,\varepsilon\, \mathfrak{M})$: ist $M \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_\sigma - \mathfrak{M}$, so folgt dies aus der Definition von $\mathfrak{M}_\sigma$; ist $M \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$, so setze man alle $M_\nu = M$. Ebenso: jede Menge $M \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_\delta$ kann in der Form geschrieben werden: $M = \underset{\nu}{D}\, M_\nu$ $(M_\nu \,\varepsilon\, \mathfrak{M})$.

3·4·1. *$\mathfrak{M}_\sigma$ ist das kleinste σ-System, $\mathfrak{M}_\delta$ das kleinste δ-System über $\mathfrak{M}$.*

Da offenbar $\mathfrak{M}_\sigma$ in jedem σ-System über $\mathfrak{M}$ enthalten ist, bleibt nur zu zeigen, daß $\mathfrak{M}_\sigma$ ein σ-System ist; d. h. wir haben zu zeigen: ist $A_k \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_\sigma$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und $A = \underset{k}{S}\, A_k$, so ist auch $A \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_\sigma$. Wegen $A_k \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_\sigma$ ist $A_k = \underset{n}{S}\, A_{kn}$ mit $A_{kn} \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$, und daher $A = \underset{k,n}{S}\, A_{kn}$. Nach 1·6·1 kann die Doppelfolge der A_{kn} in eine einfache Folge $B_1, B_2, \ldots, B_\nu, \ldots$ geordnet werden; somit ist auch $A = \underset{\nu}{S}\, B_\nu$, und wegen $B_\nu \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$ ist also $A \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_\sigma$, wie behauptet.

Aus 3·4·1 folgt unmittelbar:

3·4·11. *Die Aussage: $\mathfrak{M}_\sigma = \mathfrak{M}$ ist äquivalent mit: „$\mathfrak{M}$ ist ein σ-System". Die Aussage: $\mathfrak{M}_\delta = \mathfrak{M}$ ist äquivalent mit: „$\mathfrak{M}$ ist ein δ-System".*

3·4·2. *Bilden die Mengen A ein σ-System (ein δ-System) und ist C eine beliebige Menge, so bilden die Mengen $C - A$ ein δ-System (ein σ-System).*

Dies folgt unmittelbar aus § 2, (1·8).

Wir nennen den Übergang von $\mathfrak{M}$ zu $\mathfrak{M}_\sigma$ (zu $\mathfrak{M}_\delta$) den σ-Prozeß (den δ-Prozeß). Das durch den σ-Prozeß aus $\mathfrak{M}_\sigma$ entstandene System bezeichnen

wir mit $\mathfrak{M}_{\sigma\sigma}$, und analog ist die Bedeutung von $\mathfrak{M}_{\delta\delta}$. Aus **3·4·1** und **3·4·11** folgt:

$$\mathfrak{M}_{\sigma\sigma} = \mathfrak{M}_{\sigma}\,, \quad \mathfrak{M}_{\delta\delta} = \mathfrak{M}_{\delta}\,. \tag{4}$$

Die Aufgabe, über einem Mengensystem $\mathfrak{M}$ das kleinste System zu bilden, das sowohl ein σ-System als auch ein δ-System ist, werden wir in § 33, 1 behandeln.

5. σ-**Ringe,** δ-**Ringe.** Ein σ-System (δ-System), das gleichzeitig ein Ring ist, heißt ein σ-Ring (δ-Ring).

3·5·1. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, so ist $\mathfrak{M}_\sigma$ ein σ-Ring, $\mathfrak{M}_\delta$ ein δ-Ring.*

Nach **3·4·1** ist $\mathfrak{M}_\sigma$ ein σ-System, also abgeschlossen hinsichtlich der Summenbildung; es ist also nur mehr zu zeigen: ist $A \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_\sigma$, $B \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_\sigma$, so ist auch $A\,B \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_\sigma$. Sei also $A = \underset{k}{S}\, A_k$ $(A_k \,\varepsilon\, \mathfrak{M})$, $B = \underset{n}{S}\, B_n$ $(B_n \,\varepsilon\, \mathfrak{M})$; nach dem ersten Distributivgesetz § 2, (2·3) ist $A\,B = \underset{k,\,n}{S}\, A_k\, B_n$, und weil $\mathfrak{M}$ ein Ring, ist $A_k\, B_n \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$; nach **1·6·1** können die $A_k\, B_n$ in eine einfache Folge geordnet werden; also ist $A\,B \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_\sigma$, w. z. b. w.

3·5·11. *Ist $\mathfrak{R}$ der kleinste Ring über $\mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{R}_\sigma$ der kleinste σ-Ring, $\mathfrak{R}_\delta$ der kleinste δ-Ring über $\mathfrak{M}$.*

Denn jedenfalls muß $\mathfrak{R}_\sigma$ im kleinsten σ-Ring über $\mathfrak{M}$ enthalten sein; andererseits ist aber nach **3·5·1** $\mathfrak{R}_\sigma$ selbst ein σ-Ring.

Wir nennen die Mengenfolge $((A_n))$ monoton wachsend, wenn $A_n \subseteqq A_{n+1}$, monoton abnehmend, wenn $A_n \supseteqq A_{n+1}$.

3·5·2. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, so ist jede Menge $A \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_\sigma$ in der Form darstellbar $A = \underset{n}{S}\, A_n$, wo $((A_n))$ eine monoton wachsende Mengenfolge aus $\mathfrak{M}$, und jede Menge $A \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_\delta$ in der Form $A = \underset{n}{D}\, A_n$, wo $((A_n))$ eine monoton abnehmende Mengenfolge aus $\mathfrak{M}$.*

Sei $A \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_\sigma$, d. h. $A = \underset{n}{S}\, B_n$ mit $B_n \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$; wir setzen $A_n = B_1 + B_2 + \ldots + B_n$; dann ist auch $A = \underset{n}{S}\, A_n$, ferner $A_n \subseteqq A_{n+1}$, und weil $\mathfrak{M}$ ein Ring, ist $A_n \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$.

6. σ-**Körper,** δ-**Körper.** Ein σ-System (δ-System), das gleichzeitig ein Körper ist, heißt ein σ-Körper (δ-Körper).

3·6·1. *Jeder σ-Körper $\mathfrak{K}$ ist auch ein δ-Körper*[1]).

---

[1]) Hingegen ist keineswegs jeder σ-Ring auch ein δ-Ring. Beispiel: $\mathfrak{M}$ bestehe aus den Mengen A_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, wo $A_{\nu+1} \subseteqq A_\nu$, $A_\nu \neq A$, $\underset{\nu}{D}\, A_\nu = A$. Da $A \sim\varepsilon\, \mathfrak{M}$, ist $\mathfrak{M}$ kein δ-System.

Es ist zu zeigen, daß aus $A_n \varepsilon \mathfrak{K}$ auch folgt: $\underset{n}{D} A_n \varepsilon \mathfrak{K}$. Wir setzen $B_1 = A_1$, $B_n = A_1 A_2 \ldots A_n$ $(n > 1)$; dann ist $B_n \varepsilon \mathfrak{K}$, $B_{n+1} \subseteqq B_n$ und $\underset{n}{D} A_n = \underset{n}{D} B_n$; ferner ist: $\underset{n}{D} B_n = B_1 - \underset{n}{S} (B_n - B_{n+1})$; da hierin $B_n - B_{n+1} \varepsilon \mathfrak{K}$, und $\mathfrak{K}$ ein σ-System, ist auch $\underset{n}{S} (B_n - B_{n+1}) \varepsilon \mathfrak{K}$, und da $\mathfrak{K}$ ein Körper, ist auch $B_1 - \underset{n}{S} (B_n - B_{n+1}) \varepsilon \mathfrak{K}$; d. h. $\underset{n}{D} B_n \varepsilon \mathfrak{K}$, d. h. $\underset{n}{D} A_n \varepsilon \mathfrak{K}$, w. z. b. w.

3·6·11. *Jeder δ-Körper $\mathfrak{K}$, in dem es eine größte Menge gibt*[1]), *ist auch ein σ-Körper.*

Sei E die größte Menge von $\mathfrak{K}$ (d. h. es sei $E \varepsilon \mathfrak{K}$ und $A \subseteqq E$ für alle $A \varepsilon \mathfrak{K}$); wir bilden zu jedem $A \varepsilon \mathfrak{K}$ die Menge $E - A$; weil $\mathfrak{K}$ ein δ-System, ist nach **3·4·2** das System aller dieser Mengen $E - A$ ein σ-System; weil aber $\mathfrak{K}$ ein Körper, ist das System aller Mengen $E - A$ identisch mit $\mathfrak{K}$, d. h. $\mathfrak{K}$ ist ein σ-Körper.

Ein Analogon zu **3·5·1** gilt für Körper nicht; ist $\mathfrak{M}$ ein Körper, so wird i. a. weder $\mathfrak{M}_\sigma$ noch $\mathfrak{M}_\delta$ ein Körper sein. Dementsprechend kann auch die Aufgabe, zu einem Mengensystem $\mathfrak{M}$ den kleinsten σ-Körper über $\mathfrak{M}$ zu finden, nicht so einfach gelöst werden, wie in **3·5·11** die Aufgabe gelöst wurde, den kleinsten σ-Ring zu finden. Mit der Auffindung des kleinsten σ-Körpers über $\mathfrak{M}$ werden wir uns in § 33, 2 beschäftigen.

7. **Limesbildung.** Sei $((A_n))$ irgendeine Mengenfolge. Wir bezeichnen mit $\underset{n}{\overline{\mathrm{Lim}}}\, A_n$ die Menge aller Elemente x, die unendlich vielen A_n angehören ($x \varepsilon A_n$ für unendlich viele n), mit $\underset{n}{\underline{\mathrm{Lim}}}\, A_n$ die Menge aller x, die fast allen A_n angehören ($x \varepsilon A_n$ für fast alle n). Diese beiden Mengen können aus den A_n durch Summen- und Durchschnittsbildungen hergestellt werden; man setze:

$$(7) \qquad S_n = \underset{i \geqq n}{S} A_i = A_n + A_{n+1} + \ldots; \qquad D_n = \underset{i \geqq n}{D} A_i = A_n A_{n+1} \ldots;$$

dann ist:

$$(7{\cdot}1) \qquad \underset{n}{\underline{\mathrm{Lim}}}\, A_n = \underset{n}{S} D_n\,; \qquad \underset{n}{\overline{\mathrm{Lim}}}\, A_n = \underset{n}{D} S_n\,.$$

Mithin gilt für alle k:

$$(7{\cdot}11) \qquad \underset{i \geqq k}{D} A_i \subseteqq \underset{n}{\underline{\mathrm{Lim}}}\, A_n\,; \qquad \underset{i \geqq k}{S} A_i \supseteqq \underset{n}{\overline{\mathrm{Lim}}}\, A_n\,.$$

Läßt man aus $((A_n))$ endlich viele Mengen weg oder fügt endlich viele hinzu, so ändern sich $\underset{n}{\overline{\mathrm{Lim}}}\, A_n$, $\underset{n}{\underline{\mathrm{Lim}}}\, A_n$ nicht. Man beweist ohne Schwierigkeit:

$$(7{\cdot}2) \qquad \underset{n}{\underline{\mathrm{Lim}}}\, A_n \subseteqq \underset{n}{\overline{\mathrm{Lim}}}\, A_n\,.$$

---

[1]) **Ohne diese Voraussetzung wäre der Satz nicht richtig; Beispiel: das System aller endlichen Teile einer unendlichen Menge.**

$$(7\cdot21)\qquad \underline{\mathrm{Lim}}_n\,(E - A_n) = E - \overline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n : \quad \overline{\mathrm{Lim}}_n\,(E - A_n) = E - \underline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n\,.$$

$$(7\cdot3)\qquad \begin{aligned} \underline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n + \underline{\mathrm{Lim}}_n\,B_n &\subseteqq \underline{\mathrm{Lim}}_n\,(A_n + B_n) \subseteqq \underline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n + \overline{\mathrm{Lim}}_n\,B_n \\ &\subseteqq \overline{\mathrm{Lim}}_n\,(A_n + B_n) = \overline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n + \overline{\mathrm{Lim}}_n\,B_n\,. \end{aligned}$$

$$(7\cdot4)\qquad \begin{aligned} \underline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n \cdot \underline{\mathrm{Lim}}_n\,B_n = \underline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n\,B_n &\subseteqq \underline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n \cdot \overline{\mathrm{Lim}}_n\,B_n \subseteqq \overline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n\,B_n \\ &\subseteqq \overline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n \cdot \overline{\mathrm{Lim}}_n\,B_n\,. \end{aligned}$$

$$(7\cdot5)\qquad \begin{aligned} &\underline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n - \overline{\mathrm{Lim}}_n\,B_n = \underline{\mathrm{Lim}}_n\,(A_n - B_n) \subseteqq \left\{\begin{matrix} \underline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n - \underline{\mathrm{Lim}}_n\,B_n \\ \overline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n - \overline{\mathrm{Lim}}_n\,B_n \end{matrix}\right\} \\ &\subseteqq \overline{\mathrm{Lim}}_n\,(A_n - B_n) \subseteqq \overline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n - \underline{\mathrm{Lim}}_n\,B_n\,. \end{aligned}$$

3·7·1. *Ist $A_n \subseteqq B_n$ für fast alle n, so ist:*

$$\underline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n \subseteqq \underline{\mathrm{Lim}}_n\,B_n\,; \quad \overline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n \subseteqq \overline{\mathrm{Lim}}_n\,B_n\,.$$

3·7·11. *Für jede Teilfolge $((A_{n_i}))$ von $((A_n))$ gilt:*

$$\underline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n \subseteqq \underline{\mathrm{Lim}}_i\,A_{n_i} \subseteqq \overline{\mathrm{Lim}}_i\,A_{n_i} \subseteqq \overline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n\,.$$

3·7·12. *Ist $A_i \subseteqq \overline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n$ (bzw. $A_i \supseteqq \underline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n$) für alle i, so ist:*

$$\overline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n = \mathop{S}_i A_i \ (\textit{bzw.}\ \underline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n = \mathop{D}_i A_i)\,.$$

Denn nach Voraussetzung ist $\mathop{S}\limits_i A_i \subseteqq \overline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n$, und nach (7·11) ist $\mathop{S}\limits_i A_i \supseteqq \overline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n$.

Gilt in (7·2) das Zeichen $=$, so setzen wir:

$$\mathop{\mathrm{Lim}}_n A_n = \underline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n = \overline{\mathrm{Lim}}_n\,A_n\,.$$

Die Gleichung $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_n A_n = A$ besagt also: ist $a \,\varepsilon\, A$, so auch $a \,\varepsilon\, A_n$ für fast alle n; ist $a \sim\varepsilon\, A$, so auch $a \sim\varepsilon\, A_n$ für fast alle n.

3·7·2. *Ist $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_n A_n = \mathop{\mathrm{Lim}}\limits_n C_n$ und $A_n \subseteqq B_n \subseteqq C_n$ für fast alle n, so ist auch $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_n A_n = \mathop{\mathrm{Lim}}\limits_n B_n = \mathop{\mathrm{Lim}}\limits_n C_n$.*

Dies folgt aus 3·7·1.

3·7·21. *Ist $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_n A_n = A$, so auch für jede Teilfolge: $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_i A_{n_i} = A$.*

Dies folgt aus 3.7.11.

3·7·22. *Ist $A_n = A$ für fast alle n, so ist auch $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_n A_n = A$.*

3·7·3. *Ist* $((A_n))$ *monoton wachsend, so ist* $\mathrm{Lim}_n A_n = \mathop{S}_n A_n$; *ist* $((A_n))$ *monoton abnehmend, so ist* $\mathrm{Lim}_n A_n = \mathop{D}_n A_n$.

Denn ist $((A_n))$ monoton wachsend, so ist in (7): $S_n = \mathop{S}_\nu A_\nu$, $D_n = A_n$, also nach (7·1): $\overline{\mathrm{Lim}}_n A_n = \underline{\mathrm{Lim}}_n A_n = \mathop{S}_n A_n$.

Aus (7·21) folgt, wenn $\mathrm{Lim}_n A_n$ existiert:

$$\mathrm{Lim}_n (E - A_n) = E - \mathrm{Lim}_n A_n. \tag{7·6}$$

Aus (7·3), (7·4), (7·5) folgt, wenn $\mathrm{Lim}_n A_n$ und $\mathrm{Lim}_n B_n$ existieren:

$$\begin{gathered} \mathrm{Lim}_n (A_n + B_n) = \mathrm{Lim}_n A_n + \mathrm{Lim}_n B_n; \ \mathrm{Lim}_n A_n B_n = \mathrm{Lim}_n A_n \cdot \mathrm{Lim}_n B_n; \\ \mathrm{Lim}_n (A_n - B_n) = \mathrm{Lim}_n A_n - \mathrm{Lim}_n B_n. \end{gathered} \tag{7·7}$$

Bezeichnen wir die charakteristischen Funktionen (§ 1, 5) von A_n, $\overline{\mathrm{Lim}}_n A_n$, $\underline{\mathrm{Lim}}_n A_n$, $\mathrm{Lim}_n A_n$ der Reihe nach mit f_n, $\overline{f}$, $\underline{f}$, f, so gilt:

$$\overline{f} = \overline{\lim_n} f_n, \quad \underline{f} = \underline{\lim_n} f_n, \quad f = \lim_n f_n, \tag{7·8}$$

die letzte Beziehung natürlich nur, wenn $\mathrm{Lim}_n A_n$ existiert.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_{\sigma\delta}$ und $\mathfrak{M}_{\delta\sigma}$ die Mengensysteme, die aus $\mathfrak{M}_\sigma$ bzw. $\mathfrak{M}_\delta$ durch Anwendung des δ-Prozesses, bzw. des σ-Prozesses entstehen, so entnehmen wir aus (7) und (7·1):

3·7·4. *Ist* $((A_n))$ *eine Mengenfolge aus* $\mathfrak{M}$, *so ist* $\overline{\mathrm{Lim}}_n A_n \varepsilon \mathfrak{M}_{\sigma\delta}$, $\underline{\mathrm{Lim}}_n A_n \varepsilon \mathfrak{M}_{\delta\sigma}$ *und somit, wenn* $\mathrm{Lim}_n A_n$ *existiert:* $\mathrm{Lim}_n A_n \varepsilon \mathfrak{M}_{\sigma\delta} \cdot \mathfrak{M}_{\delta\sigma}$.

8. **λ-Systeme.** Ein Mengensystem $\mathfrak{M}$, das abgeschlossen hinsichtlich der Limesbildung ist, d. h. das neben jeder Mengenfolge $((A_n))$, für die $\mathrm{Lim}_n A_n$ existiert, auch die Menge $\mathrm{Lim}_n A_n$ enthält, nennen wir ein λ-System.

3·8·1. *Damit der Ring* $\mathfrak{M}$ *ein* λ*-System sei, ist notwendig und hinreichend, daß er sowohl ein* σ*-System als auch ein* δ*-System sei.*

Notwendig: Sei $A \varepsilon \mathfrak{M}_\sigma$; nach **3·5·2** gibt es in $\mathfrak{M}$ eine monoton wachsende Mengenfolge $((A_n))$, so daß $A = \mathop{S}_n A_n$; nach **3·7·3** ist dann auch $A = \mathrm{Lim}_n A_n$, und da $\mathfrak{M}$ ein λ-System, gilt: $A \varepsilon \mathfrak{M}$; es ist also $\mathfrak{M}_\sigma \subseteqq \mathfrak{M}$, d. h. $\mathfrak{M}_\sigma = \mathfrak{M}$, d. h. $\mathfrak{M}$ ist ein σ-System; ebenso zeigt man, daß $\mathfrak{M}$ ein δ-System. Hinreichend: Ist $\mathfrak{M}$ ein σ-System und ein δ-System, so ist nach **3·4·11** $\mathfrak{M}_\sigma = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_\delta = \mathfrak{M}$, also auch $\mathfrak{M}_{\sigma\delta} = \mathfrak{M}_\delta = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_{\delta\sigma} = \mathfrak{M}_\sigma = \mathfrak{M}$.

Nach **3·7·4** ist also für jede Folge $((A_n))$ aus $\mathfrak{M}$, für die $\operatorname*{Lim}_n A_n$ existiert: $\operatorname*{Lim}_n A_n \varepsilon \mathfrak{M}$, d. h. $\mathfrak{M}$ ist ein λ-System.

3·8·2. *Damit der Körper $\mathfrak{K}$ ein λ-System sei, ist notwendig und hinreichend, daß er ein σ-System sei.*

Notwendig: folgt aus **3·8·1.** Hinreichend: Ist $\mathfrak{K}$ ein σ-System, so nach **3·6·1** auch ein δ-System; also folgt die Behauptung aus **3·8·1.**

Mit der Bildung des kleinsten λ-Systemes über einem gegebenen Systeme $\mathfrak{M}$ werden wir uns in § 33, 2 befassen.

Literatur zu § 3: F. Hausdorff, Mengenlehre (Leipzig 1927) § 17, 18. M. Fréchet, Fund. math. 4 (1923) S. 331. A. Tarski, Fund. math. 16 (1930) S. 181. Die in Nr. 7 besprochenen Mengen $\overline{\operatorname*{Lim}_n} A_n$, $\underline{\operatorname*{Lim}_n} A_n$ wurden zuerst von É. Borel betrachtet.

§ 4. Die Mächtigkeiten.

1. **Gleichheitsrelationen.** Sei $x\,R\,y$ eine Relation, bei der x und y demselben Grundbereich angehören (§ 1, 2). Wir bezeichnen (§ 1, 4) $C(R) = B(R) + \mathfrak{B}(R)$ als das Feld von R. Die Relation heißt reflexiv, wenn für jedes $x \varepsilon C(R)$ gilt: $x\,R\,x$; sie heißt symmetrisch, wenn die beiden Aussagen $x\,R\,y$ und $y\,R\,x$ für alle x, y äquivalent sind, asymmetrisch, wenn $x\,R\,y$ und $y\,R\,x$ niemals gleichzeitig gelten, d. h. wenn $\sim\big((x\,R\,y)\,.\,(y\,R\,x)\big)$ gilt für alle $x \varepsilon C(R)$ und $y \varepsilon C(R)$; R heißt transitiv, wenn aus $x\,R\,y$ und $y\,R\,z$ folgt $x\,R\,z$, d. h. wenn $(x\,R\,|\,R\,z) \supset (x\,R\,z)$.

Eine Relation R, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, nennen wir eine Gleichheitsrelation; für eine Gleichheitsrelation gilt $B(R) = \mathfrak{B}(R) = C(R)$. Sei R eine Gleichheitsrelation; wir bilden zu jedem $x \varepsilon C(R)$ die Menge aller y, für die $x\,R\,y$ gilt. Dadurch ist $C(R)$ in ein System fremder Mengen zerlegt, so daß jedes $x \varepsilon C(R)$ zu einer und nur einer dieser Mengen gehört, und zwar so, daß y und z zur selben oder zu verschiedenen dieser Mengen gehören, je nachdem $y\,R\,z$ gilt oder nicht gilt.

Literatur: Whitehead-Russell, Principia Mathematica Nr. 72; N. Lusin, Fund. math. 10 (1927) S. 83.

2. **Äquivalenz, Mächtigkeit.** Wir nennen nun zwei Mengen A und A' äquivalent (in Zeichen: $A \sim A'$), wenn es eine eineindeutige Abbildung (§ 1, 5) von A auf A' (d. h. eine eineindeutige Relation R mit $B(R) = A$, $\mathfrak{B}(R) = A'$) gibt. Offenbar ist diese Äquivalenz eine reflexive, symmetrische, transitive Relation zwischen Mengen, deren Feld das System aller Mengen ist. Es zerfällt also das System aller Mengen in fremde Teilsysteme, so daß

je zwei Mengen desselben Teilsystemes äquivalent, je zwei Mengen verschiedener Teilsysteme nicht äquivalent sind. Jedem dieser Teilsysteme denken wir uns ein Symbol zugeordnet, das wir als die Mächtigkeit oder Kardinalzahl jeder diesem Teilsysteme angehörenden Menge bezeichnen[1]). Es haben also zwei äquivalente Mengen dieselbe Mächtigkeit, nicht äquivalente Mengen verschiedene Mächtigkeiten. Eines der genannten Teilsysteme besteht nur aus der leeren Menge; diesem Teilsysteme ordnet man die Kardinalzahl 0 zu; ein anderes Teilsystem besteht aus allen denjenigen Mengen, die nur ein einziges Element enthalten; diesem Teilsysteme wird die Kardinalzahl 1 zugeordnet. Offenbar deckt sich der so eingeführte Begriff der Kardinalzahl einer Menge, wenn es sich um endliche Mengen handelt, völlig mit dem, was man seit jeher unter Kardinalzahl einer endlichen Menge verstanden hat.

Zum Unterschiede von den endlichen Mengen kann eine unendliche Menge sehr wohl dieselbe Mächtigkeit wie ein echter Teil von ihr haben (dies trifft sogar nach 5·1·62 stets zu). So sieht man z. B., indem man n und $2n$ einander zuordnet, daß die Menge aller und die Menge aller geraden natürlichen Zahlen äquivalent sind, und also gleiche Mächtigkeit haben.

3. **Rechnen mit Mächtigkeiten.** Wir definieren nun die Verknüpfungen von Mächtigkeiten. Dabei bezeichnen wir (provisorisch) die Mächtigkeiten mit kleinen deutschen Buchstaben, und zwar die Mächtigkeit von A mit $\mathfrak{a}$, die Mächtigkeit von A_m mit $\mathfrak{a}_m$ usf. Man wird ohne weiteres sehen, daß, wenn es sich um endliche Mengen handelt, die zu definierenden Verknüpfungen sich auf die bekannten Verknüpfungen der endlichen Zahlen reduzieren.

Ist das System der Mengen A_m $(m \varepsilon M)$ disjunkt, und ist $A = \underset{m \varepsilon M}{S} A_m$, so heißt $\mathfrak{a}$ die Summe der Mächtigkeiten $\mathfrak{a}_m$, in Zeichen: $\mathfrak{a} = \sum\limits_{m \varepsilon M} \mathfrak{a}_m$. Diese Definition beruht darauf, daß, wenn auch das System der Mengen B_m $(m \varepsilon M)$ disjunkt ist, aus $A_m \sim B_m$ folgt: $\underset{m \varepsilon M}{S} A_m \sim \underset{m \varepsilon M}{S} B_m$. Offenbar ist diese Addition der Mächtigkeiten assoziativ und kommutativ. Ist M die Menge $\{1, 2, \ldots, k\}$, so schreiben wir: $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \ldots + \mathfrak{a}_k$; sind also die Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_k$ zu je zweien fremd, so ist $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \ldots + \mathfrak{a}_k$ die Mächtigkeit von $A_1 + A_2 + \ldots + A_k$.

[1]) Rein logisch betrachtet ist es ganz überflüssig zwischen einem solchen Teilsysteme und dem ihm zugeordneten Symbole zu unterscheiden: man kann das betreffende Teilsystem selbst als die Mächtigkeit jeder ihm angehörenden Menge bezeichnen. Dies ist die Auffassung von Frege und Russell.

Ist (§ 2, 2): $A = \underset{m \varepsilon M}{P} A_m$ (diesmal braucht das System der A_m nicht disjunkt zu sein), so heißt $\mathfrak{a}$ das Produkt der $\mathfrak{a}_m$, in Zeichen $\mathfrak{a} = \prod_{m \varepsilon M} \mathfrak{a}_m$. Diese Definition beruht darauf, daß aus $A_m \sim B_m$ folgt: $\underset{m \varepsilon M}{P} A_m \sim \underset{m \varepsilon M}{P} B_m$. Diese Multiplikation der Mächtigkeiten ist assoziativ und kommutativ. Ist M die Menge $\{1, 2, \ldots, k\}$, so schreiben wir: $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{a}_k$. Also:

4·3·1. *Hat* A_ι *die Mächtigkeit* $\mathfrak{a}_\iota$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, *so hat die Menge aller k-tupel* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *mit* $a_\iota \varepsilon A_\iota$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *die Mächtigkeit* $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{a}_k$.

Es gilt das Distributivgesetz:

$$\mathfrak{a} \cdot \sum_{m \varepsilon M} \mathfrak{b}_m = \sum_{m \varepsilon M} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}_m . \tag{3}$$

Sind in einer Summe alle Summanden gleich: $\mathfrak{a}_m = \mathfrak{b}$, so ist $\sum_{m \varepsilon M} \mathfrak{a}_m = \mathfrak{m}\,\mathfrak{b}$, wo $\mathfrak{m}$ die Mächtigkeit von M bedeutet.

Unter $\mathfrak{a}^\mathfrak{b}$ verstehen wir die Mächtigkeit von A^B (§ 2, 3) wenn $\mathfrak{a}$ die Mächtigkeit von A, $\mathfrak{b}$ die von B ist. Diese Definition beruht darauf, daß aus $A \sim A'$, $B \sim B'$ folgt: $A^B \sim A'^{B'}$. Es gelten die Rechenregeln:

$$\mathfrak{a}^{\sum_{m \varepsilon M} \mathfrak{b}_m} = \prod_{m \varepsilon M} \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}_m}; \quad \prod_{m \varepsilon M} \mathfrak{a}_m{}^{\mathfrak{b}} = \left(\prod_{m \varepsilon M} \mathfrak{a}_m\right)^{\mathfrak{b}}; \quad \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = (\mathfrak{a}^\mathfrak{b})^\mathfrak{c}. \tag{3·1}$$

Sind in einem Produkt alle Faktoren gleich: $\mathfrak{a}_m = \mathfrak{b}$, so ist $\prod_{m \varepsilon M} \mathfrak{a}_m = \mathfrak{b}^\mathfrak{m}$, wo $\mathfrak{m}$ die Mächtigkeit von M bedeutet.

Aus der Definition von A^B (§ 2, 3) folgt unmittelbar:

4·3·2. *Hat A die Mächtigkeit* $\mathfrak{a}$, *B die Mächtigkeit* $\mathfrak{b}$, *so hat die Menge aller Funktionen* $f(b)$, *deren Bereich B ist, und für die* $f(b) \varepsilon A$ *ist, die Mächtigkeit* $\mathfrak{a}^\mathfrak{b}$.

Ist insbesondere B die Menge $\{1, 2, \ldots, k\}$, so erhält man hieraus:

4·3·21. *Hat A die Mächtigkeit* $\mathfrak{a}$, *so hat die Menge aller k-tupel aus A die Mächtigkeit* $\mathfrak{a}^k$.

Aus § 2 (3) folgt: $\mathfrak{a}^0 = 1$.

4·3·3. *Hat B die Mächtigkeit* $\mathfrak{b}$, *so hat das System aller Teile von B die Mächtigkeit* $2^\mathfrak{b}$.

In der Tat, denkt man sich zu jedem Teile von B die charakteristische Funktion gebildet (§ 1, 5), so sieht man: die Menge der Teile von B ist äquivalent der Menge der Funktionen des Bereiches B, die nur die Werte 0, 1 annehmen. Nun folgt die Behauptung aus **4·3·2**, indem man dort $A = \{0, 1\}$ setzt.

Wir wollen nun zeigen, daß $2^\mathfrak{b} \neq \mathfrak{b}$ ist; dazu benötigen wir den Hilfssatz:

4·3·4. *Ist jedem $x \varepsilon B$ ein Teil B_x von B zugeordnet, so ist die Menge B^* der der Beziehung $x \sim \varepsilon B_x$ genügenden Elemente von B verschieden von allen B_x $(x \varepsilon B)$.*

In der Tat, für alle $x \varepsilon B$ gilt die Aussagenäquivalenz: $(x \varepsilon B^*) \equiv (x \sim \varepsilon B_x)$. Gäbe es nun ein $x^* \varepsilon B$, so daß $B^* = B_{x^*}$, so würde für dieses x^* unsere Aussagenäquivalenz lauten: $(x^* \varepsilon B_{x^*}) \equiv (x^* \sim \varepsilon B_{x^*})$, was unmöglich.

4·3·5. *Für jede Mächtigkeit $\mathfrak{b}$ ist $2^{\mathfrak{b}} \neq \mathfrak{b}$.*

Sei in der Tat B eine Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{b}$, und sei B eineindeutig abgebildet auf ein System $\mathfrak{B}$ von Teilen von B. Aus **4·3·4** folgt, daß $\mathfrak{B}$ nicht das System aller Teile von B sein kann, d. h. B kann nicht äquivalent sein dem System aller Teile von B, d. h. nach **4·3·3**: $\mathfrak{b} \neq 2^{\mathfrak{b}}$.

Literatur zu § 4. Der Inhalt dieses Paragraphen stammt im wesentlichen von G. Cantor. Näheres in den Lehrbüchern der Mengenlehre, insbesondere: F. Hausdorff, Mengenlehre, Leipzig 1927; A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, 3. Aufl., Berlin 1928; W. Sierpiński, Leçons sur les nombres transfinis, Paris 1928; Whitehead-Russell, Principia Mathematica I, II.

§ 5. Beispiele von Mächtigkeiten.

1. **Abzählbare Mengen.** Eine Menge, die äquivalent ist der Menge aller natürlichen Zahlen, heißt abzählbar unendlich. „A ist abzählbar unendlich" heißt also soviel wie: „es gibt eine eineindeutige Abbildung von A auf die Menge der natürlichen Zahlen"; bezeichnen wir das dabei der Zahl n zugeordnete Element von A mit a_n, so sehen wir: Jede abzählbar unendliche Menge kann als Folge

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

mit lauter verschiedenen Gliedern geschrieben werden; umgekehrt: sind in einer Folge je zwei Glieder verschieden, so bilden sie eine abzählbar unendliche Menge[1]).

Nach Definition haben alle abzählbar unendlichen Mengen dieselbe Mächtigkeit; sie wird mit $\aleph_0$ bezeichnet (wegen dieser Bezeichnung vgl. § 8, 3).

5·1·1. *Bedeutet k eine endliche Kardinalzahl $\neq 0$, so ist:*

$$(1 \cdot 1) \qquad \aleph_0 + k = \aleph_0, \quad k \cdot \aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph_0^k = \aleph_0.$$

In der Tat, ist A die Menge der Elemente (1) und B die endliche Menge $b_1, b_2, \ldots, b_k$, so kann $A + B$ als Folge:

$$b_1, b_2, \ldots, b_k, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

[1]) Der Name „abzählbar unendlich" rührt daher, daß diese Mengen mit Hilfe aller natürlichen Zahlen durchnumeriert (abgezählt) werden können, wie eine Menge aus n Elementen mit Hilfe der Zahlen 1, 2, ..., n.

geschrieben werden; das ist die erste Gleichung (1·1). Ist A_i die Menge der Elemente $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}, \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, so kann $A_1 + A_2 + \ldots + A_k$ als Folge:

$$a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{k1}, a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{k2}, a_{13}, a_{23}, \ldots, a_{k3}, \ldots$$

geschrieben werden; das ist die zweite Gleichung (1·1). Die dritte Gleichung (1·1) ist eine unmittelbare Folgerung aus **1·6·1**. Die vierte Gleichung (1·1) folgt durch wiederholte Anwendung der dritten.

5·1·2. *Hat A die Mächtigkeit $\aleph_0$, so auch die Menge aller k-tupel aus A.*

Denn nach 4·3·21 hat die Menge aller k-tupel aus A die Mächtigkeit $\aleph_0^k$, und nach 5·1·1 ist $\aleph_0^k = \aleph_0$.

5·1·21. *Hat A die Mächtigkeit $\aleph_0$, so auch die Menge M aller endlichen Komplexe* (§ 1, 6) *aus A.*

Denn bedeutet M_k die Menge aller k-tupel aus A, so ist $M = \underset{k}{S} M_k$; nach 5·1·2 hat hierin M_k die Mächtigkeit $\aleph_0$, also hat M die Mächtigkeit $\aleph_0 . \aleph_0$, und nach 5·1·1 ist $\aleph_0 . \aleph_0 = \aleph_0$.

5·1·22. *Hat A die Mächtigkeit $\mathfrak{a}$, so hat die Menge aller Folgen aus A die Mächtigkeit $\mathfrak{a}^{\aleph_0}$.*

Dies folgt aus 4·3·2, denn eine Folge $((a_n))$ aus A ist eine Funktion f, deren Bereich die Menge der natürlichen Zahlen ist, und für die $f(n) = a_n$, und $a_n \varepsilon A$.

Wir fassen die leere Menge, die endlichen Mengen und die abzählbar unendlichen Mengen zusammen unter die Bezeichnung a b z ä h l b a r e Mengen. Eine Menge, die nicht abzählbar ist, heißt u n a b z ä h l b a r. Man erkennt unmittelbar:

5·1·3. *Jeder Teil einer abzählbaren Menge ist abzählbar.*

5·1·31. *Die Summe abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar.*

Nach 5·1·3 genügt es, den Beweis für Summen aus unendlich vielen Summanden zu führen. Sei also: $A = \underset{n}{S} A_n$. Wir setzen $B_1 = A_1$, $B_n = A_n - (A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1})$ $(n > 1)$; dann ist auch $A = \underset{n}{S} B_n$, und das System der B_n ist disjunkt. Wegen 5·1·3 können wir uns auf den Fall beschränken, daß alle B_n abzählbar u n e n d l i c h sind; dann aber hat A die Mächtigkeit $\aleph_0 . \aleph_0 = \aleph_0$, ist also abzählbar.

5·1·4. *Die Menge R aller rationalen Zahlen hat die Mächtigkeit $\aleph_0$.*

Ist P die Menge aller positiven, N die aller negativen rationalen Zahlen, so ist $R = P + N + \{0\}$, und da $P \sim N$, genügt es nach **5·1·31** zu zeigen, daß P die Mächtigkeit $\aleph_0$ hat. Jede positive rationale Zahl hat die Form $\frac{p}{q}$,

wo p und q teilerfremde natürliche Zahlen sind; also ist die Menge P äquivalent einem Teil der Menge aller Paare (m, n) natürlicher Zahlen; nach **5·1·2** aber hat die Menge aller Paare natürlicher Zahlen die Mächtigkeit $\aleph_0$, nach **5·1·3** also auch die Menge P.

In **5·1·4** ist vermöge **5·1·3** enthalten:

5·1·41. *Die Menge aller ganzen Zahlen* ($\gtreqless 0$) *hat die Mächtigkeit* $\aleph_0$.

5·1·42. *Jedes disjunkte System von Intervallen reeller Zahlen ist abzählbar.*

Denn jedes Intervall reeller Zahlen enthält eine rationale Zahl; jedes disjunkte System von Intervallen ist also äquivalent einem Teil der Menge aller rationalen Zahlen. Die Behauptung folgt somit aus **5·1·4** und **5·1·3**.

Bedeutet g eine natürliche Zahl > 1 und $((g_n))$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $0 \leq g_n \leq g - 1$, so bezeichnen wir den Ausdruck $\sum\limits_n \frac{g_n}{g^n}$ als einen Systembruch der Grundzahl g (für $g = 2$ als einen Dualbruch); der Systembruch heißt endlich, wenn fast alle $g_n = 0$ sind, anderenfalls unendlich. Wir betrachten zwei Systembrüche der Grundzahl g als verschieden, wenn die Folgen $((g_n))$ ihrer „Stellen" verschieden sind. Bekanntlich stellen zwei verschiedene endliche Systembrüche der Grundzahl g stets verschiedene Zahlen dar, ebenso zwei verschiedene unendliche Systembrüche; hingegen gibt es zu jedem endlichen Systembruch der Grundzahl g, in dem nicht alle Stellen $= 0$ sind, etwa dem mit der Stellenfolge $g_1, g_2, \ldots, g_n, 0, 0, \ldots$ $(g_n \neq 0)$, einen und nur einen unendlichen, der dieselbe Zahl darstellt: nämlich den mit der Stellenfolge: $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, g_n - 1, g - 1, g - 1, \ldots$ Die durch einen endlichen Systembruch der Grundzahl 2 (bzw. 3) darstellbaren Zahlen heißen dyadisch (bzw. triadisch) rational.

5·1·43. *Die Menge E der endlichen Systembrüche der Grundzahl g hat die Mächtigkeit* $\aleph_0$.

Denn da jeder endliche Systembruch eine rationale Zahl darstellt und verschiedene endliche Systembrüche verschiedene Zahlen darstellen, ist E äquivalent einem Teile der Menge der rationalen Zahlen, und die Behauptung folgt aus **5·1·4** und **5·1·3**.

Bezeichnen wir, wie es in der analytischen Geometrie üblich ist, die Menge aller n-tupel reeller Zahlen als den R_n (vgl. § 9, 3), so gilt:

5·1·44. *Die Menge aller rationalen Punkte des R_n hat die Mächtigkeit* $\aleph_0$.

Dies folgt aus **5·1·4** und **5·1·2**.

5·1·5. *In jeder unendlichen Menge M gibt es einen Teil der Mächtigkeit* $\aleph_0$.

Denn zu jeder natürlichen Zahl n gibt es einen aus n Elementen bestehenden Teil $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}\}$ von M. Man setze $a_1 = a_{11}$, und wenn $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ schon bestimmt sind, wähle man für a_n ein von $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ verschiedenes Element von A_n. Dann sind je zwei a_n verschieden, die $a_n (n = 1, 2, \ldots)$ bilden also einen abzählbar unendlichen Teil von M.

5·1·6. *Ist A eine abzählbare, B eine unendliche Menge, so haben B und $A + B$ dieselbe Mächtigkeit.*

In der Tat, nach **5·1·5** gibt es in B einen Teil A' der Mächtigkeit $\aleph_0$. Ist dann $\mathfrak{b}$ die Mächtigkeit von B und $\mathfrak{b}'$ die von $B - A'$, so ist:

$$\mathfrak{b} = \aleph_0 + \mathfrak{b}'. \tag{1·2}$$

Ferner ist:

$$A + B = (A - B) + A' + (B - A'). \tag{1·3}$$

Hierin ist $A - B$ als Teil der abzählbaren Menge A nach **5·1·3** abzählbar; also ist nach **5·1·31** auch $(A - B) + A'$ abzählbar; und da in (1·3) $(A - B) + A'$ und $B - A'$ fremd sind, hat $A + B$ die Mächtigkeit $\aleph_0 + \mathfrak{b}'$, also nach (1·2) die Mächtigkeit $\mathfrak{b}$ von B.

5·1·61. *Ist A ein abzählbarer Teil der unendlichen Menge B, und ist die Menge $B - A$ unendlich, so haben B und $B - A$ dieselbe Mächtigkeit.*

Denn wegen $B = A + (B - A)$ folgt die Behauptung aus **5·1·6**, indem man dort B durch $B - A$ ersetzt.

5·1·62. *In jeder unendlichen Menge B gibt es einen echten Teil von derselben Mächtigkeit wie B.*

Denn ist b irgendein Element von B, so haben nach **5·1·61** B und $B - \{b\}$ dieselbe Mächtigkeit.

2. **Die Mächtigkeit des Kontinuums.** Nach **4·3·5** ist $2^{\aleph_0} \neq \aleph_0$. Wir setzen

$$2^{\aleph_0} = \aleph \qquad (\aleph \neq \aleph_0), \tag{2}$$

und bezeichnen diese Mächtigkeit wegen der in **5·2·3** ausgesprochenen Tatsache als die Mächtigkeit des Kontinuums. Aus **4·3·3** folgt:

5·2·1. *Das System aller Teile einer abzählbar unendlichen Menge hat die Mächtigkeit $\aleph$.*

5·2·2. *Die Menge aller Dualbrüche hat die Mächtigkeit $\aleph$.*

Dies folgt aus **5·1·22**, indem man dort $A = \{0, 1\}$, also $\mathfrak{a} = 2$ setzt.

5·2·21. *Die Menge aller unendlichen Dualbrüche hat die Mächtigkeit $\aleph$.*

Dies folgt aus **5·2·2** vermöge **5·1·43** und **5·1·61**.

5·2·3. *Jedes (abgeschlossene, offene, halboffene) Intervall reeller Zahlen hat die Mächtigkeit* $\aleph$.

Da jede Zahl aus $(0, 1]$ durch genau einen unendlichen Dualbruch dargestellt wird, sind das Intervall $(0, 1]$ und die Menge der unendlichen Dualbrüche äquivalent; nach **5·2·21** hat also das Intervall $(0, 1]$ die Mächtigkeit $\aleph$. Da durch $x' = (b - a)\,x + a$ das Intervall $(0, 1]$ eineindeutig auf $(a, b]$ abgebildet wird, hat auch $(a, b]$ die Mächtigkeit $\aleph$, daher wegen **5·1·6** auch $[a, b]$, und wegen **5·1·61** auch $[a, b)$ und (a, b).

5·2·31. *Jede (abgeschlossene, offene) Halbgerade hat die Mächtigkeit* $\aleph$.

Wegen **5·1·6** genügt es, die Behauptung für offene Halbgeraden nachzuweisen. Da die Halbgeraden $x > a$ und $x' < a$ durch die eineindeutige Abbildung $x' = 2\,a - x$ in einander übergehen und die Halbgerade $x > a$ durch die eineindeutige Abbildung $x' = x - a$ in die Halbgerade $x' > 0$ übergeht, genügt es, die Behauptung für die Halbgerade $x' > 0$ zu beweisen. Und da diese durch die eineindeutige Abbildung $x'' = \dfrac{x'}{1 + x'}$ ins Intervall $(0, 1)$ übergeht, folgt die Behauptung aus **5·2·3**.

5·2·32. *Die Menge aller reellen Zahlen hat die Mächtigkeit* $\aleph$.

Denn sie geht durch die eineindeutige Abbildung $x' = x - \dfrac{1}{x}$ aus der Halbgeraden $x > 0$ hervor.

5·2·33. *Die Menge aller irrationalen Zahlen, die Menge aller irrationalen Zahlen eines Intervalles, einer Halbgeraden hat die Mächtigkeit* $\aleph$.

Dies folgt aus **5·2·3**, **5·2·31**, **5·2·32** vermöge **5·1·4** und **5·1·61**.

5·2·4. *Bedeutet k eine endliche Kardinalzahl $\neq 0$, so gelten die Gleichungen:*

$$(2{\cdot}0)\quad \aleph + k = \aleph\,,\ \ \aleph + \aleph_0 = \aleph\,,\ \ k\,.\,\aleph = \aleph\,,\ \ \aleph_0\,.\,\aleph = \aleph\,,\ \ \aleph^k = \aleph\,,\ \ \aleph^{\aleph_0} = \aleph\,.$$

Die beiden ersten Gleichungen folgen aus **5·1·6**. Die dritte folgt aus der Zerlegung: $[0, k) = [0, 1) + [1, 2) + \ldots + [k - 1, k)$, in der die Menge links und jeder Summand rechts nach **5·2·3** die Mächtigkeit $\aleph$ hat. Ebenso folgt die vierte Gleichung (2·0) vermöge **5·2·31** aus der Zerlegung der Halbgeraden $x \geq 0$ in $[0, 1) + [1, 2) + \ldots + [n - 1, n) + \ldots$ Die beiden letzten Gleichungen (2·0) ergeben sich aus (vgl. **5·1·1** und die Rechenregeln § 4, (3·1)):

$$\aleph^k = (2^{\aleph_0})^k = 2^{k\,\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph; \qquad \aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph\,.$$

Die vorletzte Gleichung (2·0) besagt vermöge **4·3·21**:

5·2·41. *Hat A die Mächtigkeit $\aleph$, so auch die Menge aller k-tupel aus A.*

Ganz wie **5·1·21** beweist man vermöge der vierten Gleichung (2·0):

5·2·42. *Hat A die Mächtigkeit $\aleph$, so auch die Menge aller endlichen Komplexe aus A.*

Die letzte Gleichung (2·0) besagt vermöge **5·1·22**:

5·2·43. *Hat A die Mächtigkeit $\aleph$, so auch die Menge aller Folgen aus A.*

5·2·5. *Ist g eine natürliche Zahl > 1, so hat die Menge aller Systembrüche der Grundzahl g die Mächtigkeit $\aleph$.*

Die Menge aller unendlichen Systembrüche der Grundzahl g ist äquivalent dem Intervall $(0, 1]$, hat also die Mächtigkeit $\aleph$. Nun folgt die Behauptung aus **5·1·43** und **5·1·6**.

Setzt man in **5·1·22** $A = \{0, 1, \ldots, g-1\}$, also $\alpha = g$, so sieht man, daß die Menge aller Systembrüche der Grundzahl g die Mächtigkeit $g^{\aleph_0}$ hat. **5·2·5** besagt also:

$$g^{\aleph_0} = \aleph \quad (g \text{ eine natürliche Zahl} > 1)\,. \tag{2·1}$$

5·2·51. *Hat A die Mächtigkeit $\aleph_0$, so hat die Menge aller Folgen aus A die Mächtigkeit $\aleph$.*

Sei $((k_n))$ eine Folge natürlicher Zahlen; wir ordnen ihr denjenigen unendlichen Dualbruch $\sum\limits_{\nu} \frac{g_\nu}{2^\nu}$ zu, für den $g_{k_1} = 1$, $g_{k_1+k_2} = 1$, $g_{k_1+k_2+k_3} = 1$ usf., während alle anderen $g_\nu = 0$ sind. Dies ist eine eineindeutige Abbildung der Menge F aller Folgen natürlicher Zahlen auf die Menge aller unendlichen Dualbrüche. Nach **5·2·21** hat also F die Mächtigkeit $\aleph$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Zufolge **5·1·22** hat die Menge aller Folgen aus einer Menge der Mächtigkeit $\aleph_0$ die Mächtigkeit $\aleph_0^{\aleph_0}$; **5·2·51** besagt also:

$$\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph\,. \tag{2·2}$$

3. Die Mächtigkeit $2^\aleph$. Nach **4·3·5** ist $2^\aleph \neq \aleph$. Nach **4·3·3** ist $2^\aleph$ die Mächtigkeit des Systemes aller Teile einer Menge der Mächtigkeit $\aleph$, insbesondere also die Mächtigkeit des Systemes aller Mengen reeller Zahlen. Aus $\aleph^\aleph = (2^{\aleph_0})^\aleph = 2^{\aleph_0 \aleph}$ folgt nach **5·2·4**:

$$\aleph^\aleph = 2^\aleph\,. \tag{3}$$

Unter einer reellen Funktion auf $\mathfrak{A}$ verstehen wir eine Funktion, deren Bereich A ist, und für die $f(a)$ für alle $a \varepsilon A$ eine reelle Zahl ist. Dann gilt:

5·3·1. *Hat A die Mächtigkeit $\aleph$, so hat die Menge aller reellen Funktionen auf A die Mächtigkeit $2^\aleph$.*

Denn nach **4·3·2** hat diese Menge die Mächtigkeit $\aleph^\aleph$, die Behauptung folgt also aus (3).

Literatur zu § 5: wie zu § 4.

§ 6. Geordnete Mengen.

1. Ordnende Relationen. Sei A eine Menge, R eine asymmetrische, transitive Relation, deren Feld die Menge A ist: $C(R) = A$ (§ 4, 1); für je zwei verschiedene Elemente x, y von A gelte eine (und wegen der Asymmetrie von R nur eine) der beiden Aussagen $x\,R\,y$, $y\,R\,x$. Dann nennen wir R eine ordnende Relation, oder kurz eine Ordnung von A, und A heißt eine geordnete Menge, genauer: durch R geordnet. Statt $x\,R\,y$ schreiben wir: $x \prec y$ (x vor y) oder $y \succ x$ (y nach x). Die aus ein und derselben Menge durch verschiedene ordnende Relationen entstehenden geordneten Mengen werden als verschiedene geordnete Mengen betrachtet, und sind demgemäß durch verschiedene Symbole zu bezeichnen[1]).

Gleichzeitig mit einer Menge A ist auch jeder ihrer Teile geordnet. Wo nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt wird, nehmen wir immer, wenn von einem Teile einer geordneten Menge A die Rede ist, an, seine Elemente seien ebenso geordnet, wie in A.

Ist A eine geordnete Menge, $a \varepsilon A$, $A' \subseteqq A$, und gilt $a \prec a'$ für alle $a' \varepsilon A'$, so schreiben wir $a \prec A'$. Analog ist die Bedeutung von $A' \prec a$ und von $A' \prec A''$.

Gilt $a' \prec a'' \prec a'''$, so sagen wir: a'' liegt zwischen a' und a'''. Analog ist die Bedeutung von: A'' liegt zwischen a' und a''', A'' liegt zwischen A' und A''' usw. — Gibt es kein a'' zwischen a' und a''', so sagen wir: a''' folgt unmittelbar auf a' (a' geht a''' unmittelbar voran). Gibt es kein a'' zwischen A' und A''', so sagen wir: A''' folgt unmittelbar auf A' usw.

Liegt zwischen je zwei Elementen von A mindestens ein Element, so heißt A dicht geordnet. Ist $A' \subseteqq A$, und liegt zwischen je zwei Elementen von A mindestens eines von A', so heißt A' dicht geordnet in A. Beispiele: die Menge der der Größe nach geordneten rationalen Zahlen ist dicht geordnet, ebenso die Menge der der Größe nach geordneten reellen Zahlen. Die erste ist dicht geordnet in der zweiten.

Gibt es in A kein Element vor (nach) a, so heißt a erstes (letztes) Element von A.

Aus einer geordneten Menge A entsteht wieder eine geordnete Menge, indem man alle Ordnungsbeziehungen umkehrt (indem man $a \prec a'$ in $a' \prec a$ verwandelt); die so geordnete Menge heißt die Inverse von A, in Zeichen A^*.

---

[1]) Wir müßten also streng genommen zur Bezeichnung der geordneten Mengen andere Symbole verwenden als zur Bezeichnung der (ungeordneten) Mengen. Es wird aber zu keinen Mißverständnissen führen, wenn wir auch die geordneten Mengen mit großen lateinischen Buchstaben $A, B \ldots$ bezeichnen.

2. **Ähnliche Abbildungen. Ordnungstypen.** Seien A und B geordnete Mengen; eine eineindeutige Abbildung von A auf B, bei der für je zwei Elemente a', a'' von A und ihre Bilder b', b'' in B die Aussagen $a' \prec a''$ und $b' \prec b''$ äquivalent sind, heiße eine ähnliche Abbildung. Gibt es eine ähnliche Abbildung von A auf B, so heißen A und B ähnlich, in Zeichen: $A \simeq B$. Diese Ähnlichkeit zweier geordneter Mengen ist eine Gleichheitsrelation (§ 4, 1), deren Feld das System aller geordneten Mengen ist. Es zerfällt also (§ 4, 1) das System aller geordneten Mengen in Teilsysteme, so daß je zwei Mengen desselben Teilsystemes ähnlich, je zwei Mengen verschiedener Teilsysteme nicht ähnlich sind. Jedem dieser Teilsysteme denken wir uns ein Symbol zugeordnet, das wir als den Ordnungstypus[1]) jeder diesem Teilsysteme angehörenden geordneten Menge bezeichnen. Es haben zwei geordnete Mengen dann und nur dann denselben Ordnungstypus, wenn sie ähnlich sind. Wir bezeichnen Ordnungstypen mit kleinen griechischen Buchstaben. Ist α der Ordnungstypus von A, so wird der Ordnungstypus der Inversen A^* mit α^* bezeichnet (der zu α inverse Ordnungstypus).

Ähnliche Mengen sind auch äquivalent; Mengen von gleichem Ordnungstypus α haben also auch gleiche Mächtigkeit; man nennt sie: die Mächtigkeit des Ordnungstypus α. Die Ordnungstypen abzählbarer Mengen heißen auch abzählbare Ordnungstypen.

Seien A und B zwei geordnete endliche Mengen gleicher Kardinalzahl n. Sie seien gegeben durch $a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_n$, bzw. $b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_n$. Ordnet man a_i und b_i einander zu $(i = 1, 2, \ldots, n)$, so sieht man, daß A und B ähnlich sind. Also: alle geordneten endlichen Mengen gleicher Kardinalzahl haben denselben Ordnungstypus. Er kann also, ohne daß Mißverständnisse zu befürchten wären, mit demselben Symbole n bezeichnet werden, wie diese Kardinalzahl[2]). Für unendliche Mengen trifft dies, wie wir sogleich an mannigfachen Beispielen sehen werden, nicht zu.

Hat eine Menge vom Ordnungstypus α ein erstes (letztes) Element, so gilt dies von allen solchen Mengen; wir sagen dann: α ist ein Ordnungstypus mit erstem (letztem) Element. Analog bezeichnen wir den Ordnungstypus einer dicht geordneten Menge als einen dichten Ordnungstypus.

Den Ordnungstypus der Menge der der Größe nach geordneten natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit ω. Es ist ein Typus mit erstem, aber ohne letztes

---

[1]) Als „Ordinalzahlen" werden nur spezielle Ordnungstypen bezeichnet (§ 7, 3).

[2]) Insbesondere schreiben wir der leeren Menge den Ordnungstypus 0, den aus einem einzigen Element bestehenden Mengen den Ordnungstypus 1 zu.

Element. Sein inverser ω^* ist umgekehrt ein Typus mit letztem, ohne erstes Element. Also ist $\omega^* \neq \omega$. Hier haben wir schon ein Beispiel zweier verschiedener Ordnungstypen gleicher Mächtigkeit.

3. **Addition von Ordnungstypen.** Was die Verknüpfungen von Ordnungstypen anlangt, so begnügen wir uns, die Addition zweier (und damit endlich vieler) Ordnungstypen zu definieren. Seien A und B fremde, geordnete Mengen mit den Ordnungstypen α und β. Wir machen $A + B$ zu einer geordneten Menge durch die Vorschrift: ist $a \varepsilon A$, $a' \varepsilon A$ und $a \prec a'$ in A', so soll auch $a \prec a'$ in $A + B$ sein; analog für $b \varepsilon B$, $b' \varepsilon B$; ist hingegen $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$, so soll $a \prec b$ in $A + B$ sein. Unter $\alpha + \beta$ verstehen wir den Ordnungstypus der so geordneten Menge $A + B$. (Das ist eine zulässige Definition, da bei dieser Ordnung der Summenmenge aus $A \simeq A'$, $B \simeq B'$ folgt: $A + B \simeq A' + B'$). Diese Addition ist offenbar assoziativ; sie ist aber nicht kommutativ. Z. B. ist offenbar $1 + \omega = \omega$, während $\omega + 1$ ein Ordnungstypus mit letztem Element, also $\neq \omega$ ist. Wir bemerken noch, daß $\omega^* + \omega$ der Ordnungstypus der Menge der der Größe nach geordneten ganzen Zahlen ($\gtreqless 0$) ist.

4. **Der Ordnungstypus η.** Wir haben in ω, ω^*, $\omega + 1$, $\omega^* + \omega$ vier Beispiele verschiedener abzählbarer Ordnungstypen vor uns. Ein weiteres Beispiel liefert der Ordnungstypus η der Menge der der Größe nach geordneten rationalen Zahlen; er ist ein Typus ohne erstes und letztes Element und, zum Unterschiede von den eben genannten, dicht. Durch diese Eigenschaften ist η völlig charakterisiert; denn es gilt:

6·4·1. *η ist der einzige abzählbare, dichte Ordnungstypus ohne erstes und letztes Element.*

Seien in der Tat A und B geordnete Mengen, beide abzählbar, dicht geordnet, ohne erstes und letztes Element; wir haben zu zeigen: $A \simeq B$. Da die Mengen A und B abzählbar unendlich sind, können ihre Elemente den natürlichen Zahlen zugeordnet werden[1]):

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \ldots, \; a_n, \ldots \tag{4}$$

$$b_1, \; b_2, \; b_3, \ldots, \; b_n, \ldots \tag{4·1}$$

Um eine ähnliche Abbildung von A auf B herzustellen, bilden wir a_1 auf b_1 ab, und setzen $a_1 = a^1$, $b_1 = b^1$; sodann bilden wir $b_2 = b^2$ auf das in der Folge (4) zuerst kommende Element a^2 ab, das zu a^1 dieselbe Ordnungsbeziehung

[1]) Die gegebene Ordnung der Elemente in A und B ist natürlich eine ganz andere als in (4) und (4·1).

hat, wie b^2 zu b^1 (d. h. $a^2 < a^1$, wenn $b^2 < b^1$; $a^2 > a^1$, wenn $b^2 > b^1$); sodann bezeichnen wir mit a^3 das in (4) zuerst kommende, von a^1 und a^2 verschiedene Element, und bilden es auf das in (4·1) zuerst kommende Element b^3 ab, das zu b^1 und b^2 dieselben Ordnungsbeziehungen hat, wie a^3 zu a^1 und a^2 ($b^3 < b^1$ oder $b^3 > b^1$, je nachdem $a^3 < a^1$ oder $a^3 > a^1$; $b^3 < b^2$ oder $b^3 > b^2$, je nachdem $a^3 < a^2$ oder $a^3 > a^2$). Sodann bezeichnen wir mit b^4 das in (4·1) zuerst kommende, von b^1, b^2, b^3 verschiedene Element, und bilden es auf das in (4) zuerst kommende Element a^4 ab, das zu a^1, a^2, a^3 dieselben Ordnungsbeziehungen hat, wie b^4 zu b^1, b^2, b^3, usf. (wobei immer abwechselnd von (4) und (4·1) auszugehen ist); dieses Verfahren ist unbegrenzt fortsetzbar, weil es in A und B kein erstes und letztes Element gibt und zwischen je zwei Elementen immer noch andere liegen. So erhalten wir tatsächlich eine ähnliche Abbildung von A auf B, d. h. $A \simeq B$, w. z. b. w.

In **6·4·1** ist enthalten:

6·4·11. *Die Menge der der Größe nach geordneten rationalen Zahlen eines offenen Intervalles (einer offenen Halbgeraden) hat den Ordnungstypus* η.

6·4·12. *Die Menge der der Größe nach geordneten endlichen Systembrüche* $\neq 0$ *der Grundzahl* g *hat den Ordnungstypus* η.

6·4·2. *In einer Menge* B *vom Ordnungstypus* η *gibt es zu jedem abzählbaren Ordnungstypus* α *einen Teil* B' *vom Ordnungstypus* α.

Dies ist trivial, wenn α ein endlicher Ordnungstypus. Wir nehmen also sogleich an, α sei ein abzählbar unendlicher Ordnungstypus. Sei A eine Menge vom Ordnungstypus α. Seien wieder (4) und (4·1) die Elemente von A und B. Wir setzen $b_1 = b^1$, bezeichnen sodann mit b^2 das in (4·1) zuerst kommende Element, das zu b^1 dieselbe Ordnungsbeziehung hat, wie a_2 zu a_1; sodann mit b^3 das in (4·1) zuerst kommende Element, das zu b^1 und b^2 dieselben Ordnungsbeziehungen hat, wie a_3 zu a_1 und a_2 usf. Der von den Elementen $b^1, b^2, \ldots, b^\nu, \ldots$ gebildete Teil B' von B hat dann den Ordnungstypus α.

Aus **6·4·2** folgt:

6·4·21. *Ist* α *ein abzählbarer Ordnungstypus, so gibt es eine Menge rationaler Zahlen, die — der Größe nach geordnet — den Ordnungstypus* α *hat.*

5. **Der Ordnungstypus λ.** Sei A eine geordnete Menge; ist $A = A' + A''$, $A' \supset A$, $A'' \supset A$, $A' A'' = \Lambda$, $A' < A''$, so heißt das Paar (A', A'') ein **Schnitt** in A. Gibt es weder in A' ein letztes, noch in A'' ein erstes Element, so heißt der Schnitt ein **Lückenschnitt** in A. Eine dicht geordnete Menge, in der es keine Lückenschnitte gibt, heißt **stetig geordnet**, ihr Ordnungstypus heißt ein **stetiger Ordnungstypus**. Die Menge der (der Größe

nach geordneten) reellen Zahlen, ebenso jede (abgeschlossene, offene) Halbgerade, jedes (abgeschlossene, offene, halboffene) Intervall sind stetig geordnete Mengen.

Den Ordnungstypus der Menge der der Größe nach geordneten reellen Zahlen nennen wir λ.

6·5·1. *Jede stetig geordnete Menge A ohne erstes und letztes Element, die einen abzählbar unendlichen, in A dicht geordneten Teil B hat, hat den Ordnungstypus λ, und es gibt eine ähnliche Abbildung von A auf die Menge der reellen Zahlen, durch die die Menge B auf die Menge der rationalen Zahlen abgebildet wird.*

Sei X die (der Größe nach geordnete) Menge der reellen Zahlen; wir haben zu zeigen $A \simeq X$. Da es offenbar in B kein erstes und kein letztes Element gibt, hat B nach 6·4·1 den Ordnungstypus η; es gibt also eine ähnliche Abbildung f der Menge R der rationalen Zahlen auf B; das dabei der rationalen Zahl r entsprechende Element von B heiße b_r. Sei nun x eine beliebige reelle Zahl und R'_x die Menge aller rationalen Zahlen $< x$, R''_x die Menge aller rationalen Zahlen $\geq x$, und seien B'_x und B''_x die durch die Abbildung f aus R'_x und R''_x hervorgehenden Teile von B. Wir bezeichnen nun mit A'_x die Menge aller $a \varepsilon A$, zu denen es ein $b \varepsilon B'_x$ mit $a < b$ gibt, und setzen $A''_x = A - A'_x$; dann ist $A'_x < A''_x$ und $B'_x \subseteqq A'_x$, $B''_x \subseteqq A''_x$, also $A'_x \supset \Lambda$, $A''_x \supset \Lambda$; somit ist (A'_x, A''_x) ein Schnitt in A. Da es nach Definition zu jedem $a \varepsilon A'_x$ ein $b \varepsilon B'_x$ mit $a < b$ gibt und $B'_x \subseteqq A'_x$ ist, gibt es in A'_x kein letztes Element, und weil A stetig geordnet, gibt es somit in A''_x ein erstes Element; wir bezeichnen es mit a_x und ordnen es der Zahl x zu. Dadurch ist eine Abbildung g von X auf einen Teil A^* von A definiert: $g(x) = a_x$; offenbar ist $g(r) = b_r$ für alle rationalen r; die Abbildung g bildet also die Menge der rationalen Zahlen auf B ab. Wir zeigen, daß die Abbildung g ähnlich ist. Sei $x_1 \varepsilon X$, $x_2 \varepsilon X$, $x_1 < x_2$; dann gibt es ein $r \varepsilon R$, so daß $x_1 < r < x_2$; dann ist $r \varepsilon R''_{x_1} R'_{x_2}$, also $b_r \varepsilon B''_{x_1} B'_{x_2}$, also auch $b_r \varepsilon A''_{x_1} A'_{x_2}$; mithin gilt $a_{x_1} \leqq b_r$, $a_{x_2} > b_r$, also $a_{x_1} < a_{x_2}$, d. h. die Abbildung g von X auf A^* ist ähnlich: $A^* \simeq X$. Wir haben also nur mehr zu zeigen, daß $A^* = A$, und da $A^* \subseteqq A$, genügt es zu zeigen, daß $A \subseteqq A^*$. Sei $a \varepsilon A$, und sei B' die Menge aller $b \varepsilon B$ mit $b < a$ und $B'' = B - B'$; da a weder erstes noch letztes Element von A, und B dicht geordnet in A, ist $B' \supset \Lambda$, $B'' \supset \Lambda$, und in B' gibt es kein letztes Element; seien R' und R'' die vermöge der Abbildung f den Mengen B' und B'' entsprechenden Teile von R; dann gibt es in R' kein letztes Element, und (R', R'') ist ein Schnitt in R; es gibt also eine reelle Zahl x, so daß $x > r$ für alle $r \varepsilon R'$ und $x \leq r$ für alle $r \varepsilon R''$; also ist $R' = R'_x$, $R'' = R''_x$, also auch $B' = B'_x$, $B'' = B''_x$. Daraus aber folgt $a = a_x$; denn wäre $a < a_x$, so gäbe es ein $b \varepsilon B$, so daß

$a < b < a_x$, dann aber wäre $b \varepsilon B'' B'_x$ $(= B'' B')$, was unmöglich, und ebenso sieht man, daß nicht $a_x < a$ sein kann. Also ist $a = a_x$ und mithin $a \varepsilon A^*$. Aus $a \varepsilon A$ folgt also $a \varepsilon A^*$, d. h. es ist $A \subseteqq A^*$, w. z. b. w.

Aus 6·5·1 folgt:

6·5·11. *Die Menge der der Größe nach geordneten Zahlen einer offenen Halbgeraden, eines offenen Intervalles hat den Ordnungstypus λ.*

Literatur zu § 6: wie zu § 4. Ferner: C. Kuratowski, Fund. math. 2 (1921) S. 161; W. Sierpiński, Fund. math. 2 (1921) S. 199; A. Fraenkel, Fund. math. 7 (1925) S. 308; Journ. f. Math. 155 (1926) S. 129; E. V. Huntington, Ann. of Math. (2) 6 (1905) S. 151; (2) 7 (1906) S. 15.

§ 7. Die wohlgeordneten Mengen.

1. **Wohlgeordnete Mengen.** Eine geordnete Menge heißt wohlgeordnet, wenn jeder ihrer nicht leeren Teile ein erstes Element hat. Die leere Menge, jede geordnete endliche Menge, jede Menge vom Ordnungstypus ω ist wohlgeordnet; hingegen ist eine Menge vom Ordnungstypus ω^*, $\omega^* + \omega$, η nicht wohlgeordnet. Aus der Definition folgt unmittelbar:

7·1·1. *Jeder Teil einer wohlgeordneten Menge ist wohlgeordnet.*

7·1·2. *Ist A wohlgeordnet, $a \varepsilon A$, und gibt es ein $b \varepsilon A$, so daß $a < b$, so gibt es in A ein unmittelbar auf a folgendes Element.*

Denn die Menge der auf a folgenden Elemente bildet einen nicht leeren Teil von A, der somit ein erstes Element besitzt.

7·1·21. *Ist A wohlgeordnet, $A' \subseteqq A$, und gibt es ein $b \varepsilon A$, so daß $A' < b$, so gibt es in A ein unmittelbar auf A' folgendes Element.*

Denn die Menge der auf A' folgenden Elemente von A ist nicht leer, besitzt somit ein erstes Element.

7·1·3. *Ist die wohlgeordnete Menge A ähnlich abgebildet auf einen ihrer Teile, und ist dabei a' das Bild von a, so kann nicht $a' < a$ sein.*

Denn angenommen, es gäbe ein $a \varepsilon A$, für dessen Bild $a' < a$ gilt. Die Menge A^* aller solchen a ist dann nicht leer, besitzt also ein erstes Element a_0; für das Bild von a_0 gilt dann: $a'_0 < a_0$; daraus folgt für das Bild a''_0 von a'_0 (wegen der Ähnlichkeit der Abbildung): $a''_0 < a'_0$. Es wäre also auch $a'_0 \varepsilon A^*$, im Widerspruche damit, daß a_0 erstes Element von A^* und $a'_0 < a_0$.

7·1·4. *Damit die Menge A wohlgeordnet sei, ist notwendig und hinreichend, daß es in ihr keine Folge $((a_n))$ von Elementen mit $a_{n+1} < a_n$ gebe.*

Notwendig: Gibt es in A eine solche Folge $((a_n))$, so bilden die Elemente a_n einen Teil von A ohne erstes Element. Hinreichend: Ist A nicht wohl-

geordnet, so gibt es eine Menge A' ohne erstes Element, so daß $A \subset A' \subseteqq A$. Ist $a_1 \varepsilon A'$, so gibt es dann ein $a_2 \varepsilon A'$, so daß $a_2 \prec a_1$, sodann ein $a_3 \varepsilon A'$, so daß $a_3 \prec a_2$ usf.

2. **Abschnitte.** Ist A wohlgeordnet und $a \varepsilon A$, so heißt der durch $x \prec a$ definierte Teil von A der Abschnitt von a (in A), in Zeichen $A\,(a)$. Ist $a' \prec a$, also $a' \varepsilon A\,(a)$, so ist der Abschnitt von a' in $A\,(a)$ gleichzeitig der Abschnitt von a' in A. Ist a das erste Element von A, so ist $A\,(a) = A$.

7·2·1. *Eine wohlgeordnete Menge ist keinem ihrer Abschnitte ähnlich.*

Denn bei einer ähnlichen Abbildung von A auf $A\,(a)$ würde a auf ein Element $a' \varepsilon A\,(a)$ abgebildet, es wäre also $a' \prec a$, entgegen 7·1·3.

7·2·11. *Zwei verschiedene Abschnitte einer wohlgeordneten Menge sind nicht ähnlich.*

Denn sind $A\,(a)$, $A\,(a')$ Abschnitte von A, und ist $a' \prec a$, so ist $A\,(a')$ Abschnitt von $A\,(a)$, und die Behauptung folgt aus 7·2·1.

7·2·2. *Sind A und B wohlgeordnet, und gibt es zu jedem Abschnitte von A einen ähnlichen Abschnitt von B und umgekehrt, so ist $A \simeq B$.*

Nach 7·2·11 gibt es zu jedem Abschnitte von A auch nur einen ähnlichen Abschnitt von B und umgekehrt. Ordnen wir also ein Element $a \varepsilon A$ und ein Element $b \varepsilon B$ einander zu, wenn $A\,(a) \simeq B\,(b)$, so ist dies eine eineindeutige Abbildung von A auf B. Es ist noch zu zeigen, daß diese Abbildung ähnlich ist, d. h. wir haben zu zeigen: Ist $A\,(a) \simeq B\,(b)$, $A\,(a') \simeq B\,(b')$ und $a' \prec a$, so ist auch $b' \prec b$. Da $A\,(a) \simeq B\,(b)$ und $a' \prec a$, gibt es ein $b'' \varepsilon B\,(b)$, so daß $A\,(a') \simeq B\,(b'')$; weil auch $A\,(a') \simeq B\,(b')$, ist dann $B\,(b'') \simeq B\,(b')$, also nach 7·2·11: $b'' = b'$; wegen $b'' \varepsilon B\,(b)$ ist $b'' \prec b$, also auch $b' \prec b$, w. z. b. w.

7·2·21. *Sind A und B wohlgeordnet und gibt es in A einen Abschnitt, der keinem Abschnitte von B ähnlich ist, so ist B ähnlich einem Abschnitte von A.*

Nach Annahme ist die Menge A^* aller $a \varepsilon A$, zu deren Abschnitte $A\,(a)$ es keinen ähnlichen Abschnitt von B gibt, $\supset A$; da A wohlgeordnet, enthält A^* ein erstes Element a^*. Zu jedem Abschnitte von $A\,(a^*)$ gibt es nun einen ähnlichen Abschnitt von B. Wir zeigen, daß es auch umgekehrt zu jedem Abschnitte von B einen ähnlichen Abschnitt von $A\,(a^*)$ gibt. Anderenfalls gäbe es unter den Elementen $b \varepsilon B$, deren Abschnitt $B\,(b)$ keinem Abschnitte von $A\,(a^*)$ ähnlich ist, ein erstes b^*; ist dann $b \varepsilon B$ und $b \succ b^*$, so ist auch $B\,(b)$ keinem Abschnitte von $A\,(a^*)$ ähnlich; die den Abschnitten von $A\,(a^*)$ ähnlichen Abschnitte von B sind also auch Abschnitte von $B\,(b^*)$, und es ist somit jeder Abschnitt von $A\,(a^*)$ ähnlich einem Abschnitt von $B\,(b^*)$,

jeder Abschnitt von B (b^*) ähnlich einem Abschnitte von A (a^*); nach **7·2·2** wäre aber dann A (a^*) $\simeq B$ (b^*), entgegen der Definition von a^*. — Es ist also jeder Abschnitt von B ähnlich einem Abschnitte von A (a^*), und da auch jeder Abschnitt von A (a^*) ähnlich einem Abschnitte von B war, ist nach **7·2·2** A (a^*) $\simeq B$, wie behauptet.

7·2·3. *Sind A und B wohlgeordnet, so trifft eine und nur eine der drei folgenden Möglichkeiten zu: 1. $A \simeq B$; 2. B ist ähnlich einem Abschnitte von A; 3. A ist ähnlich einem Abschnitte von B.*

Denn entweder gibt es zu jedem Abschnitte von A einen ähnlichen Abschnitt von B und umgekehrt, dann ist $A \simeq B$ nach **7·2·2**; oder es gibt in A einen Abschnitt, der keinem Abschnitt von B ähnlich ist, dann ist B ähnlich einem Abschnitte von A nach **7·2·21**; oder es gibt in B einen Abschnitt, der keinem Abschnitt von A ähnlich ist, dann ist nach **7·2·21** A ähnlich einem Abschnitte von B. — Und daß nur eine der drei Möglichkeiten 1., 2., 3. eintreten kann, folgt aus **7·2·1**.

3. Ordinalzahlen. Die Ordnungstypen der wohlgeordneten Mengen werden als Ordinalzahlen bezeichnet. Die Ordnungstypen $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ der geordneten endlichen Mengen, der Ordnungstypus ω sind also Ordinalzahlen (nicht aber ω^*, $\omega^* + \omega$, η, λ).

Die Summe zweier Ordinalzahlen ist eine Ordinalzahl; denn sind A und B fremde wohlgeordnete Mengen, und ordnet man $A + B$, wie dies bei der Definition der Summe zweier Ordnungstypen (§ 6, 3) geschah, so ist auch $A + B$ wohlgeordnet.

Seien α und β die Ordinalzahlen der wohlgeordneten Mengen A und B; wir definieren: $\alpha < \beta$ (oder $\beta > \alpha$), wenn A ähnlich einem Abschnitte von B. Nach **7·2·3** gilt dann für je zwei Ordinalzahlen α, β eine und nur eine der drei Relationen $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$, und aus $\beta < \gamma$ folgt $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$. Offenbar ist die Relation $<$ transitiv. Damit sind die Ordinalzahlen der Größe nach geordnet. Auf Grund dieser Definition ist 0 die kleinste Ordinalzahl, ω die kleinste nicht endliche (transfinite) Ordinalzahl. Es bedeutet im folgenden stets $W(\alpha)$ die (der Größe nach geordnete) Menge aller Ordinalzahlen, die $< \alpha$ sind.

7·3·1. *Ist α eine Ordinalzahl, so ist die der Größe nach geordnete Menge $W(\alpha)$ aller Ordinalzahlen $\xi < \alpha$ wohlgeordnet, und es ist α die Ordinalzahl von $W(\alpha)$*[1].

---

[1]) Dieser Satz besagt, daß die (endlichen und transfiniten) Ordinalzahlen $< \alpha$ ebenso zum „Numerieren" der Elemente einer wohlgeordneten Menge der Ordinalzahl α verwendet werden können, wie die endlichen Ordinalzahlen $0, 1, 2, \cdots, n - 1$ zum Numerieren der Elemente einer Menge von n Elementen.

Sei in der Tat A eine wohlgeordnete Menge der Ordinalzahl α; nach Definition der Relation $<$ gibt es dann zu jedem $\xi \varepsilon W(\alpha)$ ein (und nach **7·2·11** nur ein) $a \varepsilon A$, dessen Abschnitt $A(a)$ die Ordinalzahl ξ hat. Ordnen wir jedem $\xi \varepsilon W(\alpha)$ dieses Element a von A zu, so haben wir eine ähnliche Abbildung von $W(\alpha)$ auf A, d. h. auch $W(\alpha)$ hat die Ordinalzahl α.

7·3·2. *Jede Menge der Größe nach geordneter Ordinalzahlen ist wohlgeordnet.*

Sei in der Tat M eine Menge von Ordinalzahlen und $\Lambda \subset M' \subseteqq M$; wir haben zu zeigen: unter den Ordinalzahlen $\xi \varepsilon M'$ gibt es eine kleinste. Sei $\alpha \varepsilon M'$; ist dann α nicht selbst kleinste in M', so ist $M' \, W(\alpha) \supset \Lambda$ und nach **7·3·1** und **7·1·1** wohlgeordnet; also gibt es in $M' \, W(\alpha)$ eine kleinste Ordinalzahl, die auch kleinste in M' ist.

7·3·3. *Ist A wohlgeordnet, $A' \subseteqq A$, und sind α, α' die Ordinalzahlen von A, A', so ist $\alpha' \leq \alpha$.*

In der Tat, wäre $\alpha' > \alpha$, so gäbe es eine ähnliche Abbildung von A auf einen Abschnitt $A'(a)$ von A'; bei dieser Abbildung würde das Element a von A abgebildet auf ein Element a' von $A'(a)$; es wäre also $a' < a$, entgegen **7·1·3**.

7·3·4. *Zu jeder Ordinalzahl α gibt es eine unmittelbar folgende, nämlich $\alpha + 1$.*

Nach **7·3·1** hat die Menge $W(\alpha)$ die Ordinalzahl α. Die Menge V, die aus $W(\alpha)$ durch Hinzufügung von α entsteht, hat daher, der Größe nach geordnet, die Ordinalzahl $\alpha + 1$ (§ 6, 3). Da $W(\alpha)$ ein Abschnitt von V ist, ist $\alpha < \alpha + 1$. Da jeder Abschnitt von V entweder $W(\alpha)$ oder ein Abschnitt von $W(\alpha)$ ist, ist jede Ordinalzahl, die $< \alpha + 1$ ist, auch $\leq \alpha$. Also folgt $\alpha + 1$ unmittelbar auf α.

7·3·41. *Zu jeder Menge A von Ordinalzahlen gibt es eine unmittelbar folgende*[1]).

Die Menge $B = \underset{\alpha \varepsilon A}{S} \left(W(\alpha) + \{\alpha\}\right)$ ist wohlgeordnet, nach **7·3·2**. Sei β die Ordinalzahl von B; wir behaupten: es ist die gesuchte. In der Tat, ist $\alpha \varepsilon A$, so ist $W(\alpha)$ ein Abschnitt von B, also nach **7·3·1**: $\alpha < \beta$. Wir haben noch zu zeigen: ist $\beta' < \beta$, so gibt es ein $\alpha \varepsilon A$, so daß $\beta' \leq \alpha$. Sei also $\beta' < \beta$; dann ist β' die Ordinalzahl eines Abschnittes $B(\xi)$ von B. Nach Definition von B gibt es ein $\alpha \varepsilon A$, so daß $\xi \varepsilon W(\alpha) + \{\alpha\}$, und mithin $\xi \leq \alpha$; wegen $\xi \varepsilon W(\alpha) + \{\alpha\}$ und $W(\alpha) + \{\alpha\} \subseteqq B$ folgt aus $\xi' < \xi$ auch $\xi' \varepsilon B$; also ist $B(\xi) = W(\xi)$, somit nach **7·3·1**: $\beta' = \xi$; wegen $\xi \leq \alpha$ ist also auch $\beta' \leq \alpha$, w. z. b. w.

---

[1]) Daraus folgt, daß es eine „Menge aller Ordinalzahlen" nicht geben kann. Anders gesprochen: kein Grundbereich (§ 1, 2) kann alle Ordinalzahlen enthalten.

Die Sätze 7·3·1, 7·3·4 lehren, wie man sukzessive immer größere Ordinalzahlen bilden kann, ohne dabei jemals eine auszulassen. Sei M die Menge der bereits gebildeten Ordinalzahlen, wobei keine ausgelassen sei (d. h. ist $\mu \varepsilon M$, und $\xi < \mu$, so auch $\xi \varepsilon M$). Die nächstfolgende ist dann nach 7·3·1 nichts anderes als die Ordinalzahl von M. Die erste auf alle endlichen Ordinalzahlen folgende ist ω. Die nächstfolgenden sind $\omega + 1$, $\omega + 2, \ldots, \omega + n, \ldots$; die auf alle diese folgende Ordinalzahl wird mit $\omega . 2$ bezeichnet; es folgen $\omega . 2 + 1$, $\omega . 2 + 2$, $\ldots \omega . 2 + n, \ldots$; die nächstfolgende wird mit $\omega . 3$ bezeichnet usf. Man gelangt so zu Ordinalzahlen der Form $\omega . k + n$. Die auf alle diese folgende wird mit ω^2 bezeichnet, und man kommt so zu Ordinalzahlen der Form $\omega^l . a_0 + \omega^{l-1} . a_1 + \ldots + \omega . a_{l-1} + a_l$, wo l, a_0, $a_1, \ldots, a_l$ endliche Ordinalzahlen bedeuten. Die auf alle diese folgende wird mit ω^ω bezeichnet. Näher wollen wir auf die Bezeichnungsweise und die Arithmetik der Ordinalzahlen nicht eingehen.

Wir unterscheiden die Ordinalzahlen in isolierte Zahlen und Grenzzahlen. Isolierte Zahlen sind alle diejenigen, zu denen es eine unmittelbar vorhergehende gibt (also alle endlichen Zahlen $\neq 0$, ferner z. B. $\omega + 1$, $\omega + 2$, usw.), Grenzzahlen sind alle übrigen (z. B. 0, ω, $\omega . 2$, ω^2, ω^ω). Ist α eine isolierte Zahl, so bezeichnen wir die unmittelbar vorhergehende mit $\alpha - 1$.

4. **Transfinite Induktion.** Dieselbe Rolle, die in der Reihe der natürlichen Zahlen der Satz von der „vollständigen Induktion" (der „Schluß von n auf $n + 1$") spielt, spielt in der Lehre von den transfiniten Ordinalzahlen der Satz von der transfiniten Induktion:

7·4·1. *Seien $\alpha_0 < \alpha_1$ zwei Ordinalzahlen und M eine Menge von Ordinalzahlen mit folgenden Eigenschaften: 1. $\alpha_0 \varepsilon M$; 2. ist $\xi \varepsilon M$ für $\alpha_0 \leq \xi < \alpha < \alpha_1$, so ist auch $\alpha \varepsilon M$. Dann gilt $\alpha \varepsilon M$ für $\alpha_0 \leq \alpha < \alpha_1$.*

Angenommen in der Tat, es gäbe eine Ordinalzahl β, so daß $\alpha_0 \leq \beta < \alpha_1$ und $\beta \sim \varepsilon M$. In der wohlgeordneten Menge aller der Ungleichung $\alpha_0 \leq \xi \leq \beta$ genügenden Ordinalzahlen mit $\xi \sim \varepsilon M$ muß es dann eine kleinste β_0 geben; wegen 1. ist $\beta_0 > \alpha_0$; nun gilt $\xi \varepsilon M$ für $\alpha_0 \leq \xi < \beta_0$; wegen 2. müßte also auch $\beta_0 \varepsilon M$ gelten, entgegen der Definition von β_0.

Offenbar kann 7·4·1 auch in folgender Form ausgesprochen werden:

7·4·11. *Seien $\alpha_0 < \alpha_1$ zwei Ordinalzahlen und M eine Menge von Ordinalzahlen mit folgenden Eigenschaften: 1. $\alpha_0 \varepsilon M$; 2. ist α eine isolierte Zahl $> \alpha_0$ und $< \alpha_1$ und ist $\alpha - 1 \varepsilon M$, so ist auch $\alpha \varepsilon M$; 3. ist α eine Grenzzahl $> \alpha_0$ und $< \alpha_1$ und ist $\xi \varepsilon M$ für $\alpha_0 \leq \xi < \alpha$, so ist auch $\alpha \varepsilon M$. Dann gilt $\alpha \varepsilon M$ für $\alpha_0 \leq \alpha < \alpha_1$.*

Auf 7·4·1 beruht der Beweis durch transfinite Induktion:

7·4·12. *Um zu beweisen, daß ein von einer beliebigen Ordinalzahl α handelnder Satz $\varphi(\alpha)$ für jede Ordinalzahl $\alpha \geq \alpha_0$ gilt, genügt es zu zeigen: 1. $\varphi(\alpha_0)$ gilt; 2. gilt $\varphi(\xi)$ für $\alpha_0 \leq \xi < \alpha$, so gilt $\varphi(\alpha)$.*

Sei β eine beliebige Ordinalzahl; man setze in 7·4·1 $\alpha_1 = \beta + 1$ und verstehe unter M die Menge aller der Ungleichung $\alpha_0 \leq \xi < \alpha_1$ genügenden Ordinalzahlen, für die $\varphi(\xi)$ gilt. Nach 7·4·1 ist dann $\beta \varepsilon M$, d. h. $\varphi(\beta)$ gilt, w. z. b. w.

Genau so erkennt man: Um a_α für jede Ordinalzahl $\alpha \geq \alpha_0$ zu definieren, genügt es: 1. a_{α_0} zu definieren, und 2. unter der Annahme, a_ξ sei für $\alpha_0 \leq \xi < \alpha$ schon definiert, a_α zu definieren (Definition durch transfinite Induktion).

Als Beispiel beweisen wir durch transfinite Induktion:

7·4·2. *Jede Ordinalzahl α ist auf eine und nur eine Weise in der Form darstellbar: $\alpha = \eta + n$, wo η eine Grenzzahl und n eine endliche Ordinalzahl.*

1. Die Behauptung ist offenkundig richtig für $\alpha = 0$. 2. Angenommen die Behauptung sei richtig für alle $\xi < \alpha$. Ist dann α eine isolierte Zahl, so gilt sie für $\alpha - 1$; d. h. $\alpha - 1$ ist auf eine und nur eine Weise in der Form $\eta + n$ darstellbar; dann aber ist $\alpha = \eta + (n + 1)$, also ist auch α in der behaupteten Form darstellbar; und es kann keine zweite Darstellung dieser Form geben; denn aus $\alpha = \eta' + n'$ folgt zunächst $n' > 0$, da α keine Grenzzahl; sodann folgt $\alpha - 1 = \eta' + (n' - 1)$, also nach Annahme $\eta' = \eta$, $n' - 1 = n$, d. h. $n' = n + 1$. Ist hingegen α Grenzzahl, so gibt es für α genau eine Darstellung der Form $\eta + n$, nämlich $\eta = \alpha$, $n = 0$.

Auf Grund von 7·4·2 unterscheiden wir die Ordinalzahlen α in gerade und ungerade, je nachdem in der Darstellung $\alpha = \eta + n$ von 7·4·2 die endliche Ordinalzahl n gerade oder ungerade ist. Jede Grenzzahl ist dann eine gerade Zahl ($n = 0$).

Literatur zu § 7: wie zu § 4.

§ 8. Die Vergleichung der Mächtigkeiten.

1. **Der Wohlordnungssatz.** Wir wollen nun zeigen, daß jede Menge äquivalent einer wohlgeordneten Menge ist. Sei A eine beliebige nicht leere Menge, $\mathfrak{C}$ das System ihrer nicht leeren Teile. Wir denken uns eine Auswahl aus $\mathfrak{C}$ gegeben (§ 2, 2), d. h. jedem nicht leeren Teile C von A sei eines seiner Elemente zugeordnet; es heiße das ausgezeichnete Element von C. Diese Auswahl aus $\mathfrak{C}$ denken wir uns im folgenden festgehalten. Mit $W(\beta)$ bezeichnen wir die Menge der Ordinalzahlen $\xi < \beta$. Eine eineindeutige Abbildung von $W(\beta)$ auf einen Teil B von A heiße eine

ordinale Abbildung, wenn sie folgende Eigenschaft hat: ist B_ξ das Bild von $W(\xi)$ ($\xi < \beta$), so ist das Bild a_ξ von ξ das ausgezeichnete Element von $A - B_\xi$. Das Element $a \varepsilon A$ heiße ein ordinales Bild von ξ, wenn es ein $\beta > \xi$ und eine ordinale Abbildung von $W(\beta)$ auf einen Teil von A gibt, bei der a das Bild von ξ ist. Daraus folgt unmittelbar:

8·1·1. *Besitzt die Ordinalzahl ξ ein ordinales Bild, so auch jede Ordinalzahl $< \xi$.*

8·1·11. *Zu einer Ordinalzahl α gibt es höchstens ein ordinales Bild.*

Wir beweisen das durch transfinite Induktion (7·4·12). Die Behauptung ist richtig für $\alpha = 0$; denn bei jeder ordinalen Abbildung von $W(\beta)$ ($\beta > 0$) ist — zufolge Definition der ordinalen Abbildung — das Bild a_0 von 0 das ausgezeichnete Element von $A - \Lambda = A$. Angenommen die Behauptung sei richtig für alle $\xi < \alpha$; bezeichnet dann B_α die Menge der ordinalen Bilder aller $\xi < \alpha$, so muß bei jeder ordinalen Abbildung von $W(\beta)$ ($\beta > \alpha$) das Bild a_α von α das ausgezeichnete Element von $A - B_\alpha$ sein.

8·1·12. *Ist $\alpha \neq \alpha'$ und sind $a_\alpha, a_{\alpha'}$ ordinale Bilder von α bzw. α', so ist auch $a_\alpha \neq a_{\alpha'}$.*

Sei etwa $\alpha' > \alpha$; da α' ein ordinales Bild besitzt, gibt es ein $\beta > \alpha'$ und eine ordinale Abbildung von $W(\beta)$, bei der $a_{\alpha'}$ Bild von α' ist. Wegen $\alpha < \alpha' < \beta$ und wegen 8·1·11 ist bei dieser Abbildung a_α Bild von α; und da jede ordinale Abbildung eineindeutig ist, folgt die Behauptung.

8·1·13. *Jedes Element von A ist ordinales Bild einer Ordinalzahl.*

Sei M die Menge der Ordinalzahlen, die ein ordinales Bild besitzen; nach 7·8·41 gibt es eine auf M unmittelbar folgende Ordinalzahl γ. Nach 8·1·1 und 8·1·11 hat jede Ordinalzahl $\xi < \gamma$ ein und nur ein ordinales Bild a_ξ. Ordnen wir jedem $\xi < \gamma$ sein ordinales Bild a_ξ zu, so ist dadurch eine nach 8·1·12 eineindeutige Abbildung von $W(\gamma)$ auf einen Teil A^* von A gegeben, die offenbar eine ordinale Abbildung ist. Wir haben zu zeigen: $A - A^* = \Lambda$. Wäre $A - A^* \supset \Lambda$, so gäbe es ein ausgezeichnetes Element a^* von $A - A^*$. Ordnen wir nun jeder Ordinalzahl $\xi < \gamma$ ihr ordinales Bild a_ξ und der Ordinalzahl γ das Element a^* zu, so hätten wir eine ordinale Abbildung von $W(\gamma + 1)$ auf $A^* + \{a^*\}$, und es wäre somit a^* ordinales Bild von γ, entgegen der Definition von γ. Also ist $A - A^* = \Lambda$, w. z. b. w.

8·1·2. *Zu jeder Menge A gibt es eine äquivalente wohlgeordnete Menge.*

Sei wieder γ die kleinste Ordinalzahl, die kein ordinales Bild besitzt. Ordnen wir jeder Ordinalzahl $\xi < \gamma$ ihr ordinales Bild zu, so ist dies nach 8·1·13 eine Abbildung von $W(\gamma)$ auf A, die nach 8·1·12 eineindeutig ist; also ist $A \sim W(\gamma)$; da $W(\gamma)$ nach 7·8·1 wohlgeordnet ist, ist 8·1·2 bewiesen.

Damit ist auch gezeigt:

8·1·21. *Ist A eine beliebige Menge, so gibt es eine Ordinalzahl γ, so daß die Elemente von A mit a_ξ ($\xi < \gamma$) bezeichnet werden können.*

Man drückt die Sätze 8·1·2, 8·1·21 oft kurz so aus: Jede Menge A kann wohlgeordnet werden.

Literatur: Der Satz, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, war von G. Cantor vermutet worden; er wurde zuerst bewiesen von E. Zermelo, Math. Ann. 59 (1904) S. 514; 65 (1908) S. 107.

2. **Vergleichung von Mächtigkeiten.** Um zwei Mächtigkeiten ihrer Größe nach vergleichen zu können, beweisen wir zunächst den Satz:

8·2·1. *Ist $A \supseteqq B \supseteqq C$ und $A \sim C$, so ist auch $A \sim B$.*

Nach 8·1·2 gibt es eine zu A äquivalente wohlgeordnete Menge A'; bei einer eineindeutigen Abbildung von A auf A' gehen B und C über in Mengen B' und C', für die gilt: $A' \supseteqq B' \supseteqq C'$ und $A' \sim C'$; und da $A \sim A'$, $B \sim B'$, genügt es, zu zeigen: $A' \sim B'$. Schreiben wir wieder A, B, C statt A', B', C', so können wir also von vornherein A als wohlgeordnet annehmen; nach 7·1·1 sind dann auch B und C wohlgeordnet. Wäre die Behauptung nicht richtig, so gäbe es nach 7·3·2 unter den wohlgeordneten Mengen A, für die sie nicht gilt, eine solche von kleinstmöglicher Ordinalzahl α. Sind β, γ die Ordinalzahlen von B und C, so ist nach 7·3·3 $\gamma \leq \beta \leq \alpha$. Da $A \sim C$, gibt es eine eineindeutige Abbildung von A auf C; sie führe B über in B^* und C in C^*; dann ist $B \sim B^*$, $C \sim C^*$, und aus $A \supseteqq B \supseteqq C$ folgt: $C \supseteqq B^* \supseteqq C^*$; jedoch kann nicht $C \sim B^*$ sein, da aus $C \sim B^*$, $C \sim A$, $B \sim B^*$ folgen würde: $A \sim B$, entgegen der Annahme. Es ist also $C \supseteqq B^* \supseteqq C^*$, $C \sim C^*$, aber nicht $C \sim B^*$; zufolge der Definition von α als der kleinstmöglichen Ordinalzahl, zu der es eine wohlgeordnete Menge gibt, für die die Behauptung nicht gilt, kann also nicht $\gamma < \alpha$ sein. Und da $\gamma \leq \alpha \leq \beta$ war, ist $\gamma = \beta = \alpha$, mithin $B \sim A$, im Widerspruch zur Annahme, daß für A die Behauptung nicht gilt.

Nun folgt unmittelbar der „Äquivalenzsatz“:

8·2·11. *Ist A äquivalent einem Teile von B und B äquivalent einem Teile von A, so ist $A \sim B$.*

Sei $A \sim B'$, $B \sim A'$, $B' \subseteqq B$, $A' \subseteqq A$. Eine eineindeutige Abbildung von A auf B' führt dann A' über in eine Menge $B'' \subseteqq B'$, und es ist $A' \sim B''$, also wegen $B \sim A'$ auch $B \sim B''$. Wir haben nun $B \supseteqq B' \supseteqq B''$, $B \sim B''$, also ist nach 8·2·1 $B \sim B'$, und somit wegen $A \sim B'$ auch $A \sim B$.

Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Mächtigkeiten, A eine Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{a}$, B eine Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{b}$. Wir definieren[1]: $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ (oder $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$), wenn A

[1]) Offenbar ist diese Definition unabhängig von der Wahl der Mengen A und B.

äquivalent einem Teile von B, aber nicht $A \sim B$. Dann besagt $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$: A ist äquivalent einem Teile von B. Wir werden nun zeigen, daß die so definierte Relation $<$ den Forderungen genügt, die man an den Begriff „kleiner" zu stellen hat.

8·2·2. *Zwischen zwei Mächtigkeiten* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *gilt eine und nur eine der drei Relationen*: $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$.

Habe A die Mächtigkeit $\mathfrak{a}$, B die Mächtigkeit $\mathfrak{b}$. Ist dann $A \sim B$, so ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Sei nun nicht $A \sim B$, also auch nicht $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Nach **8·1·2** gibt es wohlgeordnete Mengen A', B', so daß $A' \sim A$, $B' \sim B$. Nach **7·2·3** ist dann A' ähnlich (also auch äquivalent) einem Abschnitte von B', oder B' ähnlich einem Abschnitte von A'. Im ersten Falle ist $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$, also da nicht $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ist: $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$; ebenso ist im zweiten Falle $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$, d. h. $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$. Damit ist gezeigt, daß mindestens eine der drei Relationen $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ gilt. Wir zeigen nun, daß nur eine gelten kann. Daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ (und ebenso $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$) sich ausschließen, folgt unmittelbar aus der Definition. Es ist also nur mehr zu zeigen, daß $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ sich ausschließen. Würde sowohl $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ als auch $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ gelten, so wäre A äquivalent einem Teile von B und B äquivalent einem Teile von A; dann aber wäre nach **8·2·11** $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, was unmöglich, denn $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ schließen sich aus.

8·2·21. *Aus* $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$ *folgt* $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$.

Seien A, B, C Mengen der Mächtigkeiten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. Aus $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$ folgt dann: A ist äquivalent einem Teile B' von B, B ist äquivalent einem Teile C' von C; also ist auch A äquivalent einem Teile C'' von C'. Wegen $C'' \subseteqq C' \subseteqq C$ ist somit $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{c}$. Wäre nun $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$, d. h. $A \sim C$, so wäre wegen $A \sim C''$ auch $C \sim C''$, und aus $C \supseteqq C' \supseteqq C''$ würde nach **8·2·1** folgen $C' \sim C$, also wegen $B \sim C'$ auch $B \sim C$, entgegen der Annahme $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$. Es ist also nicht $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$; wegen $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{c}$ ist also $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$.

Nun kann **5·1·5** so ausgesprochen werden:

8·2·3. $\aleph_0$ *ist die kleinste unendliche (transfinite) Mächtigkeit.*

Ferner verschärft sich **4·3·5** zu:

8·2·4. *Für jede Mächtigkeit* $\mathfrak{b}$ *ist* $2^{\mathfrak{b}} > \mathfrak{b}$.

Sei B eine Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{C}$ das System ihrer Teile; nach **4·3·3** hat $\mathfrak{C}$ die Mächtigkeit $2^{\mathfrak{b}}$. Indem man jedem $b \,\varepsilon\, B$ die Menge $\{b\} \,\varepsilon\, \mathfrak{C}$ zuordnet, sieht man: B ist äquivalent einem Teile von $\mathfrak{C}$; also ist $\mathfrak{b} \leq 2^{\mathfrak{b}}$. Aus **4·3·5** folgt also $\mathfrak{b} < 2^{\mathfrak{b}}$.

Da nach § 5 (2): $2^{\aleph_0} = \aleph$ ist, verschärft sich nun auch die Ungleichung $\aleph \neq \aleph_0$ zu:

$$\aleph > \aleph_0. \tag{2}$$

Zufolge 8·1·2 bedeutet es keinerlei Einschränkung, wenn wir uns beim weiteren Studium der Mächtigkeiten auf die Mächtigkeiten wohlgeordneter Mengen beschränken.

Literatur: Der Äquivalenzsatz 8·2·11 wurde zuerst bewiesen von F. Bernstein (veröffentlicht in É. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898, S. 103). Ferner: Whitehead-Russell, Principia Mathematica I. Nr. 73; S. Banach, Fund. math. 6 (1924) S. 236; A. Lindenbaum u. A. Tarski, C. R. Vars. 19 (1926) S. 299.

3. **Zahlklassen, Anfangszahlen, die Alephs.** Wir fassen alle transfiniten Ordinalzahlen gleicher Mächtigkeit in eine Zahlklasse zusammen. So gehören ω, $\omega + n$, ω^2, ω^ω als Ordinalzahlen der Mächtigkeit $\aleph_0$ alle zur selben Zahlklasse, die wir mit Z_0 bezeichnen. Nach 7·3·2 gibt es in jeder Zahlklasse eine kleinste Ordinalzahl, sie heißt die Anfangszahl dieser Zahlklasse; die Anfangszahl von Z_0 ist ω. Ist ζ eine Anfangszahl, so ist nach 7·3·2 die Menge A_ζ aller Anfangszahlen $< \zeta$ wohlgeordnet; ist α die Ordinalzahl dieser Menge, so schreiben wir $\zeta = \omega_\alpha$. Verschiedene Anfangszahlen erhalten so verschiedene Indizes α, und zwar die größere Anfangszahl den größeren Index. Da ω die kleinste Anfangszahl ist, so ist in diesem Zusammenhange also $\omega = \omega_0$ zu schreiben. Die Zahlklasse, deren Anfangszahl ω_α ist, nennen wir Z_α, die Mächtigkeit jeder Ordinalzahl aus Z_α nennen wir $\aleph_\alpha$. Auf diese Weise ist jeder transfiniten Mächtigkeit eine Ordinalzahl als Index zugeordnet, und zwar der größeren Mächtigkeit der größere Index. Als kleinste transfinite Mächtigkeit ist die der abzählbaren Mengen mit $\aleph_0$ zu bezeichnen, wie wir es schon bisher getan haben.

8·3·1. *Zu jeder Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ gibt es eine nächstgrößere, nämlich $\aleph_{\alpha+1}$.*

In der Tat, sei β die auf alle Ordinalzahlen der Zahlklasse Z_α unmittelbar folgende (7·3·41). Dann hat β größere Mächtigkeit als $\aleph_\alpha$, und als erste auf Z_α folgende Ordinalzahl ist β Anfangszahl, und zwar die auf ω_α unmittelbar folgende Anfangszahl, also $\beta = \omega_{\alpha+1}$. Also ist ihre Mächtigkeit $\aleph_{\alpha+1}$ die auf $\aleph_\alpha$ unmittelbar folgende Mächtigkeit.

8·3·11. *Zu jeder Menge von Mächtigkeiten $\aleph_\mu$ ($\mu \varepsilon M$) gibt es eine nächstgrößere, nämlich $\aleph_\nu$, wenn ν die auf alle $\mu \varepsilon M$ unmittelbar folgende Ordinalzahl ist.*

In der Tat, sei β die auf $\underset{\mu \varepsilon M}{S} Z_\mu$ unmittelbar folgende Ordinalzahl. Wie bei 8·3·1 sieht man, daß β die Anfangszahl ω_ν ist, woraus die Behauptung folgt.

Aus 8·3·1 und 8·3·11 folgt nun durch transfinite Induktion, daß es zu jeder Ordinalzahl α eine Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ gibt. Die Skala der transfiniten Mächtigkeiten beginnt also mit $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, ... Auf die Mächtigkeiten $\aleph_n$ (n natürliche Zahl) folgt als nächste Mächtigkeit $\aleph_\omega$, dann $\aleph_{\omega+1}$, $\aleph_{\omega+2}$ usf.

8·3·2. $\aleph_\alpha$ *ist die Mächtigkeit der Menge* $W(\omega_\alpha)$ *aller Ordinalzahlen* $< \omega_\alpha$.

Denn diese Menge hat nach 7·3·1 die Ordinalzahl ω_α, und ω_α hat die Mächtigkeit $\aleph_\alpha$.

Da jede Mächtigkeit unter den $\aleph_\alpha$ vorkommt, so auch die Mächtigkeit $\aleph$ des Kontinuums (§ 5, 2). Es ist aber nicht bekannt, welchen Index α sie hat. G. Cantor hat vermutet, daß $\aleph = \aleph_1$ (Kontinuumhypothese). Diese Vermutung ist wegen § 5 (2) enthalten in der weitergehenden Vermutung, daß für jedes α gilt: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Literatur: Zur Kontinuumhypothese vgl. W. Sierpiński, Fund. math. 5 (1924) S. 177; D. Hilbert, Math. Ann. 95 (1926) S. 161.

4. **Die Zahlklasse Z_0.** Wir beweisen nun noch einige Sätze über die Zahlklasse Z_0 der abzählbar unendlichen Ordinalzahlen.

8·4·1. *Zu jeder abzählbaren Menge A von Ordinalzahlen aus Z_0 gibt es eine Ordinalzahl $\beta \varepsilon Z_0$, die größer als alle $\alpha \varepsilon A$ ist.*

Das bedarf eines Beweises nur, wenn es in A keine größte Ordinalzahl gibt (denn ist $\bar{\alpha}$ größte in A, so leistet $\beta = \bar{\alpha} + 1$ das Verlangte). Sei β die unmittelbar auf $\underset{\alpha \varepsilon A}{S} W(\alpha)$ folgende Ordinalzahl. Dann ist $W(\beta) = \underset{\alpha \varepsilon A}{S} W(\alpha)$ nach 5·1·31 als Summe abzählbar vieler abzählbarer Mengen abzählbar, und da β nach 7·3·1 die Ordinalzahl von $W(\beta)$, ist $\beta \varepsilon Z_0$; offenbar ist $\beta > \alpha$ für jedes $\alpha \varepsilon A$.

Ist $((\alpha_n))$ eine wachsende Folge von Ordinalzahlen $(\alpha_n < \alpha_{n+1})$, und β die auf die Menge der α_n unmittelbar folgende Ordinalzahl, so schreiben wir kurz:

$$\beta = \lim_n \alpha_n.$$

Dann folgt aus 8·4·1:

8·4·2. *Ist $((\alpha_n))$ eine wachsende Folge von Ordinalzahlen aus Z_0, so ist auch $\lim\limits_n \alpha_n \varepsilon Z_0$.*

Insbesondere: es gibt keine wachsende Folge $((\alpha_n))$, so daß $\lim\limits_n \alpha_n = \omega_1$ wäre (wo ω_1 die Anfangszahl von Z_1 bedeutet). Hingegen:

8·4·21. *Zu jeder Grenzzahl $\beta \varepsilon Z_0$ gibt es eine wachsende Folge $((\alpha_n))$, so daß $\beta = \lim\limits_n \alpha_n$.*

In der Tat, wegen $\beta \varepsilon Z_0$ ist $W(\beta)$ abzählbar, die sämtlichen Zahlen $< \beta$ können also den natürlichen Zahlen zugeordnet werden: $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ (doch ist dies natürlich i. a. nicht ihre Ordnung der Größe nach). Da β Grenzzahl, gibt es unter den β_n keine größte. Wir greifen nun aus der Folge der β_n eine wachsende Teilfolge $((\alpha_i))$ heraus nach der Regel: „$\alpha_1 = \beta_1$; sind

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ gefunden, so sei α_{i+1} die erste in der Folge $((\beta_n))$ nach α_i kommende Zahl, die $> \alpha_i$ ist." Dann ist offenbar $\beta = \lim_i \alpha_i$; denn ist $\gamma < \beta$, so kommt γ in $((\beta_n))$ vor; sei etwa α_{i*} das erste α_i, das in $((\beta_n))$ nach γ kommt; dann ist nach dem Bildungsgesetz der α_i notwendig $\alpha_{i*} > \gamma$; keine Zahl $\gamma < \beta$ ist also $> \alpha_i$ für alle i, d. h. $\beta = \lim_i \alpha_i$.

8·4·3. *Ist eine der Größe nach geordnete Menge A reeller Zahlen wohlgeordnet, so ist sie abzählbar.*

Sei in der Tat α die Ordinalzahl von A. Dann gibt es eine ähnliche Abbildung von A auf $W(\alpha)$; ist x_β dabei das Bild der Ordinalzahl β, so ist $x_\beta < x_{\beta'}$, wenn $\beta < \beta'$. Die Intervalle $(x_\beta, x_{\beta+1})$ sind also zu je zweien fremd. Nach **5·1·42** gibt es ihrer also nur abzählbar viele, somit ist auch A abzählbar, wie behauptet.

Daß es umgekehrt zu jeder Ordinalzahl $\alpha \varepsilon Z_0$ eine Menge reeller (ja sogar rationaler) Zahlen gibt, die der Größe nach geordnet die Ordinalzahl α hat, ist ein Spezialfall von **6·4·2**.

Um zu einer Anwendung der Ordinalzahl ω_1 zu gelangen, betrachten wir die Menge aller Folgen $((n_i))$ natürlicher Zahlen. Sei $a = ((n_i))$, $a' = ((n_i'))$; wir definieren: $a = a'$, bzw. $a < a'$, bzw. $a > a'$, wenn $n_i = n_i'$, bzw. $n_i < n_i'$, bzw. $n_i > n_i'$ für fast alle i; zwischen zwei beliebigen Folgen natürlicher Zahlen wird selbstverständlich i. a. keine der drei Relationen $a = a'$, $a < a'$, $a > a'$ bestehen. Doch gilt:

8·4·4. *Zu jeder abzählbaren Menge von Folgen natürlicher Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots$ gibt es eine Folge a natürlicher Zahlen, so daß $a_j < a$ für alle j.*

Sei in der Tat a_j die Folge $n_{j1}, n_{j2}, \ldots, n_{ji}, \ldots$; wir wählen $n_1 > n_{11}$, $n_2 > \max(n_{12}, n_{22})$, $n_3 > \max(n_{13}, n_{23}, n_{33})$ usf. Die Folge a der Zahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ leistet das Verlangte.

8·4·41. *Es gibt eine Menge der Mächtigkeit $\aleph_1$ von Folgen natürlicher Zahlen a_α $(\alpha < \omega_1)$, so daß $a_\alpha < a_{\alpha'}$ für $\alpha < \alpha'$.*

Sei die Folge a_0 beliebig gewählt. Wir nehmen an, für $\xi < \alpha$ $(< \omega_1)$ seien die Folgen a_ξ schon so gefunden, daß $a_\xi < a_{\xi'}$ für $\xi < \xi'$ $(< \alpha)$. Da wegen $\alpha < \omega_1$ die Menge aller $\xi < \alpha$ abzählbar ist, gibt es nach **8·4·4** eine Folge a natürlicher Zahlen, so daß $a_\xi < a$ für alle $\xi < \alpha$; eine solche Folge wählen wir für a_α. Auf diese Weise erhält man zu jedem $\alpha < \omega_1$ eine Folge a_α, und die Menge dieser a_α $(\alpha < \omega_1)$ leistet das Verlangte.

Zweites Kapitel.

Punktmengen.

§ 9. Topologische und metrische Räume.

1. **Topologische Räume.** Eine Menge E heißt eine topologische Menge oder ein topologischer Raum, wenn in ihr ein System von Teilmengen ausgezeichnet ist, die als die offenen Mengen in E bezeichnet werden, und folgenden Forderungen (den „topologischen Axiomen") zu genügen haben:

1_t) Die leere Menge ist eine offene Menge.

2_t) Zu jedem $a \varepsilon E$ gibt es eine a enthaltende offene Menge.

3_t) Der Durchschnitt zweier (und somit endlich vieler) offener Mengen ist eine offene Menge.

4_t) Die Summe eines (endlichen oder unendlichen) Systemes offener Mengen ist eine offene Menge.

5_t) Ist $a \varepsilon E$, $b \varepsilon E$, $a \neq b$, so gibt es zwei fremde offene Mengen, deren eine a, deren andere b enthält.

Die Elemente $a \varepsilon E$ heißen die Punkte von E, die Teile von E heißen Punktmengen. Ist $A \subseteqq E$, so heißt $E - A$ das Komplement von A; wir schreiben dafür kurz $-A$. Wir ziehen einige naheliegende Folgerungen aus den topologischen Axiomen.

9·1·1. *Der topologische Raum E selbst ist eine offene Menge.*

Denn nach 2_t) kann jedem Punkte $a \varepsilon E$ eine offene Menge G_a so zugeordnet werden, daß $a \varepsilon G_a$; dann ist $E = \underset{a \varepsilon E}{S} G_a$, also ist E nach 4_t) offen.

5_t) kann verschärft werden zu:

9·1·2. *Ist $a \varepsilon E$, $b_i \varepsilon E$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $b_i \neq a$, so gibt es eine a enthaltende offene Menge, die keinen der Punkte b_i enthält.*

In der Tat, nach 5_t) gibt es eine offene Menge G_i, die a, aber nicht b_i enthält. Nach 3_t) ist auch $G_1 G_2 \ldots G_n$ offen und leistet das Verlangte.

Ferner folgt aus 2_t) und 5_t) unmittelbar:

9·1·3. *Der Durchschnitt aller a enthaltenden offenen Mengen ist $\{a\}$.*

9·1·4. *Ist G offen und $a \varepsilon E$, so ist auch $G - \{a\}$ offen.*

In der Tat, wir bilden zu jedem $b \varepsilon E$, das $\neq a$ ist, nach 5_t) eine b, aber nicht a enthaltende offene Menge G_b. Dann ist $E - \{a\}$ die Summe aller dieser G_b, und somit nach 4_t) offen. Da $G - \{a\} = G(E - \{a\})$, folgt die Behauptung aus 3_t).

Aus 9·1·4 und Axiom 3_t) folgt:

9·1·41. *Ist G offen und $a_i \varepsilon E$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, so ist auch $G - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ offen.*

Zwei topologische Räume E und E' heißen homöomorf, wenn es eine eineindeutige Abbildung von E auf E' gibt, die die offenen Mengen in E überführt in die offenen Mengen in E'.

Jede den Punkt a enthaltende offene Menge nennen wir eine Umgebung von a, in Zeichen U_a; ebenso heiße eine offene Menge G eine Umgebung U_A der Menge A, wenn $A \subseteqq G$. Ist U_a eine Umgebung von a, so nennen wir die nach 9·1·4 offene Menge $U_a - \{a\}$ eine reduzierte Umgebung von a, in Zeichen U'_a.

Ist E ein topologischer Raum, $\mathfrak{G}$ das System seiner offenen Mengen und $A \subseteqq E$, so erfüllt das System aller Mengen $A\,G$ $(G \varepsilon \mathfrak{G})$ die topologischen Axiome, wenn in ihnen E durch A ersetzt wird. Also: Ist E ein topologischer Raum, so wird auch jede Punktmenge A von E zu einem topologischen Raum, indem man zum System der offenen Mengen in A die Durchschnitte von A mit den offenen Mengen in E wählt. Immer, wenn wir von einem topologischen Raume A sagen, er sei Teil des topologischen Raumes E, meinen wir damit nicht nur $A \subseteqq E$, sondern auch: die offenen Mengen in A sind die Durchschnitte mit A der offenen Mengen in E.

Literatur: Mit der Theorie der Punktmengen in „abstrakten Räumen" hat sich zuerst M. Fréchet beschäftigt: Rend. Pal. 22 (1906) S. 1; zusammenfassende Darstellung: Les éspaces abstraits et leur théorie, considérée comme introduction à l'analyse générale, Paris 1928. Die Theorie der topologischen Räume wurde besonders ausgebildet durch F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig 1914) S. 213 ff. Über verschiedene topologische Axiomensysteme: H. Tietze, Math. Ann. 88 (1923) S. 290.

2. **Metrische Räume.** Eine Menge E heißt eine metrische Menge oder ein metrischer Raum (ihre Elemente die Punkte, ihre Teile die Punktmengen dieses Raumes), wenn jedem Paare a, b aus Elementen von E eine (endliche) Zahl $a\,b$ (die Entfernung, der Abstand der Punkte a, b) so zugeordnet ist, daß die folgenden Forderungen (die „metrischen Axiome") erfüllt sind:

1_m) Es ist $a\,b = 0$ dann und nur dann, wenn $a = b$.

2_m) $a\,c \leq a\,b + c\,b$.

9·2·1. *Für je zwei Punkte* $a \neq b$ *von* E *ist* $ab > 0$.

Setzt man in 2_m) $a = c$, so erhält man nach 1_m): $0 \leq 2ab$, also $ab \geq 0$; nun folgt die Behauptung aus 1_m).

9·2·2. *Für je zwei Punkte* a, c *von* E *ist* $ac = ca$.

Setzt man in 2_m) $a = b$, so erhält man nach 1_m): $ac \leq ca$, und daraus durch Vertauschung von a und c auch $ca \leq ac$.

Das Axiom 2_m) heißt auch die Dreiecksungleichung. Aus 2_m) und 9·2·2 folgt einerseits: $ac - ab \leq bc$, andererseits (durch Vertauschung von a und b): $bc \leq ba + ca$, also:

(2) $$ac - ab \leq bc \leq ac + ab.$$

Zwei metrische Räume E und E' heißen isometrisch, wenn es eine eineindeutige Abbildung von E auf E' gibt, so daß, wenn a', b' die Bilder von a, b sind, stets $ab = a'b'$ ist.

Ist E ein metrischer Raum, so wird ein beliebiger Teil A von E zu einem metrischen Raume, indem man als Entfernung zweier Punkte in A ihre Entfernung in E betrachtet. Immer, wenn wir von einem metrischen Raum A sagen, er sei Teil des metrischen Raumes E, meinen wir damit nicht nur $A \subseteqq E$, sondern auch: die Entfernung zweier Punkte in A ist identisch mit ihrer Entfernung in E.

Ist ϱ eine positive Zahl, $a \varepsilon E$, so heißt die Menge $[\acute{x}\, a < \varrho]$ aller der Ungleichung $xa < \varrho$ genügenden Punkte x von E: die Kugel vom Mittelpunkt a und Radius ϱ (oder auch: die Umgebung ϱ von a), in Zeichen $K_{a\varrho}$. Durch Weglassen des Mittelpunktes a entsteht daraus die reduzierte Kugel (oder reduzierte Umgebung ϱ von a) $K'_{a\varrho} = K_{a\varrho} - \{a\}$.

Jeder metrische Raum E kann als topologischer Raum aufgefaßt werden[1]). Dies geschieht vermöge folgender Definition: Die Menge $G \subseteqq E$ heiße offen, wenn es zu jedem $a \varepsilon G$ eine Kugel $K_{a\varrho} \subseteqq G$ gibt. In der Tat genügt, wie wir gleich sehen werden, das System der so definierten offenen Mengen des Raumes E den topologischen Axiomen. Zunächst zeigen wir:

9·2·3. *Jede Kugel* $K_{a\varrho}$ *ist eine offene Menge.*

Sei $b \varepsilon K_{a\varrho}$; setzen wir $ab = \sigma$, so ist $\sigma < \varrho$; ist dann $xb < \varrho - \sigma$, so ist nach der Dreiecksungleichung $xa < \varrho$, also $x \varepsilon K_{a\varrho}$; d. h. $K_{b\,\varrho-\sigma} \subseteqq K_{a\varrho}$; also ist $K_{a\varrho}$ offen.

Nun zeigen wir, daß bei der eben gegebenen Definition der offenen Mengen eines metrischen Raumes die topologischen Axiome erfüllt sind. Für 1_t), 3_t), 4_t) ist dies evident; für 2_t) folgt es aus 9·2·3; um zu zeigen,

[1]) Mit der umgekehrten Frage werden wir uns in § 14, 3 befassen.

daß auch 5_t) erfüllt ist, setze man $a\,b = \varrho$; dann folgt aus der Dreiecksungleichung 2_m) sofort, daß $K_{a\frac{\varrho}{2}}$ und $K_{b\frac{\varrho}{2}}$ fremd sind, und nach **9·2·3** sind $K_{a\frac{\varrho}{2}}$, $K_{b\frac{\varrho}{2}}$ offene Mengen.

Aus **9·2·3** und **9·1·4** folgt nun:

9·2·4. *Jede reduzierte Kugel* $K'_{a\varrho}$ *ist eine offene Menge.*

Literatur: Das Studium metrischer Räume geht auf M. Fréchet zurück. Vgl. auch A. Lindenbaum, Fund. math. 8 (1926) S. 209. Eingehende Untersuchung metrischer Räume und Verallgemeinerungen: K. Menger, Math. Ann. 100 (1928) S. 75, Jahresber. Math. Ver. 40 (1931) S. 201.

3. **Beispiele metrischer Räume.** Die Menge der reellen Zahlen wird zu einem metrischen Raum durch die Abstandsdefinition:

$$a\,b = |a - b| = \sqrt{(a-b)^2}, \tag{3}$$

die offenkundig die metrischen Axiome 1_m), 2_m) erfüllt. Diesen metrischen Raum bezeichnen wir als den R_1[1]).

Die Menge der n-tupel reeller Zahlen wird zu einem metrischen Raume, den wir als den R_n bezeichnen, durch folgende Abstandsdefinition: ist a das n-tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, b das n-tupel $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, so sei:

$$a\,b = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + \ldots + (a_n-b_n)^2}. \tag{3·1}$$

Daß das metrische Axiom 1_m) erfüllt ist, ist trivial; wir haben zu zeigen, daß auch 2_m) erfüllt ist, d. h. daß die Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned}\sqrt{(a_1-c_1)^2 + \ldots + (a_n-c_n)^2} \leq{} & \sqrt{(a_1-b_1)^2 + \ldots + (a_n-b_n)^2} \\ & + \sqrt{(b_1-c_1)^2 + \ldots + (b_n-c_n)^2}.\end{aligned} \tag{3·11}$$

Wir gehen aus von der bekannten Determinantenrelation:

$$\begin{vmatrix} u_1^2 + \ldots + u_n^2 & u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n \\ u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n & v_1^2 + \ldots + v_n^2 \end{vmatrix} = \sum_{1 \leq i < k \leq n} \begin{vmatrix} u_i & u_k \\ v_i & v_k \end{vmatrix}^2.$$

Da die rechte Seite ≥ 0 ist, erhalten wir daraus die Ungleichung:

$$(u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n)^2 \leq (u_1^2 + \ldots + u_n^2)(v_1^2 + \ldots + v_n^2). \tag{3·12}$$

Wegen $|a_i - c_i| \leq |a_i - b_i| + |b_i - c_i|$ ist nun:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - c_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(b_i - c_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}|a_i - b_i|\,|b_i - c_i|,$$

---

[1]) Auch die Abstandsdefinition $a\,b = \sqrt{|a-b|}$ erfüllt die Axiome 1_m), 2_m), nicht aber die Abstandsdefinition $a\,b = (a-b)^2$.

also unter Benutzung von (3·12):

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - c_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(b_i - c_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2 \sum_{i=1}^{n}(b_i - c_i)^2},$$

was mit der zu beweisenden Ungleichung (3·11) gleichbedeutend ist.

Ist $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ein Punkt des R_n, so heißt die reelle Zahl a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ die i-te Koordinate des Punktes a. Sind alle a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ganzzahlig, so heißt a ein Gitterpunkt des R_n; sind alle a_i rational, so heißt a ein rationaler, anderenfalls ein irrationaler Punkt des R_n.

Aus (3·12) folgert man durch Grenzübergang:

$$(\sum_\nu |u_\nu v_\nu|)^2 \leq \sum_\nu u_\nu^2 \cdot \sum_\nu v_\nu^2. \tag{3·2}$$

Ist also $\sum_\nu u_\nu^2$ und $\sum_\nu v_\nu^2$ endlich, so auch $\sum_\nu (u_\nu - v_\nu)^2$. Das ermöglicht folgende Definition:

Die Menge der Folgen $((a_\nu))$ reeller Zahlen mit endlicher Quadratsumme $\sum_\nu a_\nu^2$ wird zu einem metrischen Raum, den wir als den R_ω bezeichnen, durch folgende Abstandsdefinition: sind $a = ((a_\nu))$ und $b = ((b_\nu))$ Folgen reeller Zahlen mit endlicher Quadratsumme, so sei:

$$a\,b = \sqrt{\sum_\nu (a_\nu - b_\nu)^2}. \tag{3·3}$$

Daß das metrische Axiom 1_m) erfüllt ist, ist trivial; daß 2_m) gilt erkennt man wie vorhin beim R_n, indem man sich statt auf (3·12) auf (3·2) stützt. Ist $a = ((a_\nu))$ ein Punkt des R_ω, so heißt a_ν die ν-te Koordinate des Punktes a.

Die Menge der Folgen $((k_\nu))$ natürlicher Zahlen wird zu einem metrischen Raum, den wir als den R_0 bezeichnen, durch folgende Abstandsdefinition: sind $a = ((k_\nu))$ und $b = ((l_\nu))$ Folgen natürlicher Zahlen, und ist $a = b$ (d. h. $k_\nu = l_\nu$ für alle ν), so sei $a\,b = 0$; ist hingegen $a \neq b$ und ν^* der kleinste Index mit $a_\nu \neq b_\nu$, so sei:

$$a\,b = \frac{1}{\nu^*}. \tag{3·4}$$

Daß das metrische Axiom 1_m) erfüllt ist, ist trivial; daß 2_m) gilt, folgt daraus, daß offenbar:

$$a\,c \leq \max(a\,b,\ b\,c). \tag{3·41}$$

Literatur: Der R_ω wurde eingeführt von D. Hilbert (ausführlich behandelt von M. Fréchet, Nouv. Ann. (4) 8 (1908) S. 97, 289); der R_0 wurde eingeführt von R. Baire, Acta math. 32 (1909) S. 105.

4. **Entfernung eines Punktes von einer Menge.** Sei E ein metrischer Raum, $a \varepsilon E, \Lambda \subset B \subseteqq E$. Wir definieren die Entfernung (den Abstand) des Punktes a von der Menge B durch:

$$aB = Ba = \inf_{b \varepsilon B} ab. \tag{4}$$

Ist $a \varepsilon B$, so ist $aB = 0$; die Umkehrung hiervon gilt nicht; Beispiel im R_1: ist B das Intervall (a, a'), so ist $aB = 0$, $a \sim\varepsilon B$.

Aus der Dreiecksungleichung (Axiom 2_m)) folgt leicht:

$$aC \leq ab + bC, \tag{4·1}$$

und mithin auch (vgl. den Beweis von (2)):

$$aC - ab \leq bC \leq aC + ab. \tag{4·11}$$

Ist $\varrho > 0$, $\Lambda \subset B \subseteqq E$, so heißt die Menge $[\hat{x} B < \varrho]$ aller der Ungleichung $xB < \varrho$ genügenden Punkte x: die Umgebung ϱ der Menge B, in Zeichen $U_{B\varrho}$.

9·4·1. *Für jedes $\varrho > 0$ ist die Umgebung $U_{B\varrho}$ eine offene Menge.*

Sei $b \varepsilon U_{B\varrho}$; setzen wir $bB = \sigma$, so ist $\sigma < \varrho$; ist dann $xb < \varrho - \sigma$, so ist nach (4·1) $xB < \varrho$, also $x \varepsilon U_{B\varrho}$; d. h. $K_{b\,\varrho-\sigma} \subseteqq U_{B\varrho}$; also ist $U_{B\varrho}$ offen.

9·4·2. *Für jedes $\varrho \geq 0$ ist die Menge $[\hat{x} B > \varrho]$ aller der Ungleichung $xB > \varrho$ genügenden Punkte x offen.*

Sei $bB = \sigma > \varrho$; ist dann $xb < \sigma - \varrho$, so ist nach (4·11) $xB > \varrho$; d. h. $K_{b\,\sigma-\varrho} \subseteqq [\hat{x} B > \varrho]$, d. h. $[\hat{x} B > \varrho]$ ist offen.

5. **Entfernung zweier Mengen.** Sei wieder E ein metrischer Raum, $\Lambda \subset A \subseteqq E$, $\Lambda \subset B \subseteqq E$. Wir definieren die Entfernung (den Abstand) der Mengen A und B durch:

$$\overline{AB} = \overline{BA} = \inf_{a \varepsilon A,\, b \varepsilon B} ab. \tag{5}$$

Nach (4) ist dies offenbar gleichbedeutend mit:

$$\overline{AB} = \inf_{a \varepsilon A} aB = \inf_{b \varepsilon B} Ab. \tag{5·1}$$

Ist $AB \supset \Lambda$, so ist $\overline{AB} = 0$ (aber nicht umgekehrt); insbesondere ist (für alle $A \supset \Lambda$): $\overline{AA} = 0$.

Aus der Dreiecksungleichung 2_m) folgt leicht:

$$\overline{AC} \leq Ab + bC; \tag{5·2}$$

hingegen gilt die Ungleichung $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$ i. a. nicht; Beispiel: $A = \{a\}$; $C = \{c\}$, $B = \{a, c\}$ $(a \neq c)$.

6. Durchmesser. Beschränkte Mengen. Sei wieder E ein metrischer Raum, $\Lambda \subset A \subseteqq E$, $\Lambda \subset B \subseteqq E$. Wir definieren die obere Entfernung der Mengen A und B durch:

$$d(A, B) = d(B, A) = \sup_{a \varepsilon A,\, b \varepsilon B} a\, b\,. \tag{6}$$

Natürlich kann $d(A, B) = +\infty$ sein. Aus der Dreiecksungleichung folgt:

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)\,. \tag{6·1}$$

Die Zahl $d(A, A)$ bezeichnen wir als den Durchmesser $d(A)$ der Menge A; hierdurch ist $d(A)$ nur für $A \supset \Lambda$ definiert; es ist zweckmäßig, $d(\Lambda) = 0$ zu setzen. Aus der Dreiecksungleichung 2_m) folgt:

9·6·1. *Ist* $A\, B \supset \Lambda$, *so ist* $d(A + B) \leq d(A) + d(B)$.

Ist $d(A)$ endlich, so heißt die Menge A beschränkt.

9·6·2. *Ist A beschränkt, so gibt es zu jedem $c \varepsilon E$ eine endliche Zahl δ_c, so daß $a\, c \leq \delta_c$ für alle $a \varepsilon A$.*

Denn ist b ein beliebiger Punkt von A, so gilt für alle $a \varepsilon A$: $a\, c \leq c\, b + d(A)\ (= \delta_c)$.

9·6·21. *Gibt es ein $c \varepsilon E$ und eine endliche Zahl δ, so daß $a\, c \leq \delta$ für alle $a \varepsilon A$, so ist A beschränkt.*

Denn aus $a \varepsilon A$, $b \varepsilon A$ folgt dann: $a\, b \leq a\, c + c\, b \leq 2\,\delta$, also ist $d(A) \leq 2\,\delta$.

9·6·3. *Ist A beschränkt und $B \subseteqq A$, so ist auch B beschränkt.*

Denn aus $B \subseteqq A$ folgt $d(B) \leq d(A)$.

9·6·4. *Sind A und B beschränkt, so auch $A + B$.*

Denn offenbar ist:

$$d(A + B) \leq d(A) + d(B) + \overline{A\, B}\,. \tag{6·2}$$

Aus **9·6·3** und **9·6·4** folgt:

9·6·41. *Das System aller beschränkten Mengen eines metrischen Raumes ist ein δ-Körper.*

9·6·5. *Damit die beiden (nicht leeren) Mengen A und B beschränkt seien, ist notwendig und hinreichend, daß $d(A, B)$ endlich sei.*

Notwendig: Dies folgt, da offenbar $d(A, B) \leq d(A + B)$ ist, aus **9·6·4**. Hinreichend: Ist $a \varepsilon A$, $a' \varepsilon A$, $b \varepsilon B$, so ist $a\, a' \leq a\, b + b\, a'$, also $a\, a' \leq 2\, d(A, B)$, also auch $d(A) \leq 2\, d(A, B)$; und ebenso $d(B) \leq 2\, d(A, B)$.

Wir definieren die Abweichung der beiden (nicht leeren) Mengen A und B durch:

$$e(A, B) = e(B, A) = \max\,(\sup_{a \varepsilon A} a\, B,\ \sup_{b \varepsilon B} b\, A)\,. \tag{6·3}$$

Offenbar ist:

(6·31) $$e(A, B) \leq d(A, B).$$

Es gilt die Ungleichung:

(6·32) $$e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C);$$

denn es ist nach (4·1) $aC \leq ab + bC$ für alle $a \varepsilon A$ und $b \varepsilon B$, also auch $aC \leq ab + e(B, C)$, also auch $aC \leq aB + e(B, C)$, also auch $aC \leq e(A, B) + e(B, C)$, also auch $\sup\limits_{a \varepsilon A} aC \leq e(A, B) + e(B, C)$, und ebenso $\sup\limits_{c \varepsilon C} cA \leq e(A, B) + e(B, C)$.

9·6·6. *Sind die beiden (nicht leeren) Mengen A und B beschränkt, so ist $e(A, B)$ endlich.*

Dies folgt wegen (6·31) aus 9·6·5.

Die Umkehrung gilt nicht; ist z. B. A die Halbgerade $x > 0$ und B die Halbgerade $x > 1$ des R_1, so ist $e(A, B) = 1$, aber A und B sind nicht beschränkt.

7. ϱ-**Netze.** Ist E ein metrischer Raum, $B \subseteqq A \subseteqq E$, und $\varrho > 0$, so heißt B ein ϱ-Netz in A, wenn es zu jedem $a \varepsilon A$ ein $b \varepsilon B$ mit $ab < \varrho$ gibt, während für je zwei Punkte $b \neq b'$ von B gilt: $bb' \geq \varrho$.

9·7·1. *Ist $\Lambda \subset A \subseteqq E$, so gibt es für jedes $\varrho > 0$ ein ϱ-Netz in A.*

Sei b_0 ein beliebiger Punkt von A; ist dann $ab_0 < \varrho$ für alle $a \varepsilon A$, so ist $\{b_0\}$ ein ϱ-Netz in A. Anderenfalls gibt es ein $b_1 \varepsilon A$, so daß $b_0 b_1 \geq \varrho$; gilt dann für jedes $a \varepsilon A$ eine der beiden Ungleichungen $ab_0 < \varrho$, $ab_1 < \varrho$, so ist $\{b_0, b_1\}$ ein ϱ-Netz in A. Anderenfalls gibt es ein $b_2 \varepsilon A$, so daß $b_0 b_2 \geq \varrho$, $b_1 b_2 \geq \varrho$ usf. Allgemein: sei jeder Ordinalzahl $\eta < \xi$ ein $b_\eta \varepsilon A$ so zugeordnet, daß $b_{\eta'} b_{\eta''} \geq \varrho$ für $\eta' \neq \eta''$; gibt es dann zu jedem $a \varepsilon A$ ein $\eta < \xi$, so daß $ab_\eta < \varrho$, so bilden die b_η $(\eta < \xi)$ ein ϱ-Netz in A. Anderenfalls gibt es ein $b_\xi \varepsilon A$, so daß $b_\eta b_\xi \geq \varrho$ für alle $\eta < \xi$. Ist $\aleph_\alpha$ die Mächtigkeit von A, so muß für ein $\xi < \omega_{\alpha+1}$ der Fall eintreten, daß die b_η $(\eta < \xi)$ ein ϱ-Netz in A bilden, da wir anderenfalls zu jedem $\eta < \omega_{\alpha+1}$ ein b_η erhielten, so daß $b_{\eta'} b_{\eta''} \geq \varrho$ für $\eta' \neq \eta''$, also auch $b_{\eta'} \neq b_{\eta''}$ für $\eta' \neq \eta''$; es würden also nach 8·3·2 die b_η $(\eta < \omega_{\alpha+1})$ einen Teil von A der Mächtigkeit $\aleph_{\alpha+1}$ bilden, was unmöglich, weil A nur die Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ hat.

9·7·2. *Ist $\Lambda \subset A \subseteqq E$ und ist B ein σ-Netz in A, so gibt es zu jedem positiven $\varrho < \sigma$ ein B enthaltendes ϱ-Netz in A.*

Ist $aB < \varrho$ für alle $a \varepsilon A$, so ist B selbst ein ϱ-Netz in A. Anderenfalls gibt es ein $b_0 \varepsilon A$, so daß $b_0 b \geq \varrho$ für alle $b \varepsilon B$; hat dann jedes $a \varepsilon A$ von der Menge $B + \{b_0\}$ einen Abstand $< \varrho$, so ist $B + \{b_0\}$ ein ϱ-Netz in A. Anderenfalls gibt es ein $b_1 \varepsilon A$, so daß $b_1 b_0 \geq \varrho$, $b_1 b \geq \varrho$ für alle $b \varepsilon B$; hat

dann jedes $a \varepsilon A$ von der Menge $B + \{b_0, b_1\}$ einen Abstand $< \varrho$, so ist $B + \{b_0, b_1\}$ ein ϱ-Netz in A, usw. wie beim Beweise von **9·7·1**.

§ 10. Offene, abgeschlossene Mengen.

1. **Offene Mengen.** Wir kehren zurück zur Betrachtung eines topologischen Raumes E; die Punkte und Punktmengen, von denen im folgenden die Rede ist, sind also die Elemente und Teile der Menge E. Eine Menge E wird (§ 9, 1) dadurch zu einem topologischen Raum, daß ein den topologischen Axiomen genügendes System $\mathfrak{G}$ von Teilen G von E als das System der offenen Mengen erklärt ist. Wir erinnern daran, daß nach Axiom 1_t) Λ offen ist, daß nach **9·1·1** E offen ist, und daß nach **9·1·41** das Komplement jeder endlichen Menge offen ist. Wir sprechen die Axiome 3_t) und 4_t) als Sätze aus:

10·1·1. *Der Durchschnitt zweier offener Mengen ist offen.*

10·1·2. *Die Summe eines (endlichen oder unendlichen) Systems offener Mengen ist offen.*

Aus **10·1·1** und **10·1·2** folgt:

10·1·21. *Das System aller offenen Mengen eines topologischen Raumes ist ein σ-Ring.*

Da im R_1 das Intervall (a, b) die Kugel $K_{c\varrho}$ mit $c = \frac{a+b}{2}$, $\varrho = \frac{b-a}{2}$ ist, folgt aus **9·2·3**, daß jedes Intervall (a, b) eine offene Menge des R_1 ist. Aus **10·1·2** folgt dann weiter, daß auch jede Halbgerade $x > a$ $(x < a)$ eine offene Menge des R_1 ist.

2. **Abgeschlossene Mengen.** Eine Punktmenge F heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement $-F$ offen ist. Da Λ offen ist, ist E abgeschlossen; da E offen ist, ist Λ abgeschlossen; da das Komplement jeder endlichen Menge offen ist, ist jede endliche Menge abgeschlossen. Aus **10·1·1** und **10·1·2** folgt durch Übergang zu den Komplementen nach § 2 (1·8):

10·2·1. *Die Summe zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

10·2·2. *Der Durchschnitt eines (endlichen oder unendlichen) Systems abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

Aus **10·2·1** und **10·2·2** folgt:

10·2·21. *Das System aller abgeschlossenen Mengen eines topologischen Raumes ist ein δ-Ring.*

Ist E ein metrischer Raum, $a \varepsilon E$, und $\varrho \geq 0$, so heißt die Menge $[\bar{x}a \leq \varrho]$ die abgeschlossene Kugel vom Mittelpunkt a und Radius ϱ, in Zeichen

$\overline{K}_{a\varrho}$; ist $A \subset B \subseteqq E$, so heißt die Menge $[\not{x} B \leq \varrho]$ die abgeschlossene Umgebung ϱ der Menge B, in Zeichen $\overline{U}_{B\varrho}$. Aus **9·4·2** folgt, weil das Komplement einer offenen Menge abgeschlossen ist:

10·2·3. *In einem metrischen Raume ist jede abgeschlossene Umgebung* $\overline{U}_{B\varrho}$ $(\varrho \geq 0)$ *eine abgeschlossene Menge.*

Insbesondere für $B = \{a\}$:

10·2·31. *In einem metrischen Raume ist jede abgeschlossene Kugel* $\overline{K}_{a\varrho}$ $(\varrho \geq 0)$ *eine abgeschlossene Menge.*

Aus **9·4·1** folgt:

10·2·4. *Ist E ein metrischer Raum und $A \subset B \subseteqq E$, so ist für jedes $\varrho > 0$ die Menge $[\not{x} B \geq \varrho]$ abgeschlossen.*

Nach **10·2·31** ist jedes Intervall $[a, b]$ eine abgeschlossene Menge des R_1. Als Komplement der offenen Menge $x < a$ (bzw. $x > a$) ist jede Halbgerade $x \geq a$ $(x \leq a)$ eine abgeschlossene Menge des R_1.

Literatur: Der Begriff der abgeschlossenen Menge stammt von G. Cantor, Math. Ann. 23 (1884) S. 470. Die Bezeichnung „offene Menge" ist erst neuerdings üblich geworden.

3. **Innere Punkte. Offener Kern.** Der Punkt a heißt innerer Punkt der Menge A, wenn es eine Umgebung U_a (d. h. (§ 9, 1) eine a enthaltende offene Menge) gibt, die $\subseteqq A$ ist.

10·3·1. *Ist A Punktmenge eines metrischen Raumes, so ist, damit a innerer Punkt von A sei, notwendig und hinreichend, daß es ein $\varrho > 0$ gebe, so daß $K_{a\varrho} \subseteqq A$.*

Notwendig: Sei $U_a \subseteqq A$; nach Definition der offenen Mengen eines metrischen Raumes (§ 9, 2) gibt es ein $\varrho > 0$, so daß $K_{a\varrho} \subseteqq U_a$; dann ist auch $K_{a\varrho} \subseteqq A$. Hinreichend: Nach **9·2·3** ist $K_{a\varrho}$ selbst eine Umgebung U_a.

Wir bezeichnen die Menge aller inneren Punkte von A mit A_i. Dann ist $A_i \subseteqq A$, und es gilt:

10·3·2. *Ist $B \subseteqq A$, so $B_i \subseteqq A_i$.*

10·3·3. $(A\,B)_i = A_i\,B_i$.

Denn ist $U_{1a} \subseteqq A$, $U_{2a} \subseteqq B$, so ist $U_{1a}\,U_{2a} \subseteqq A\,B$, und nach **10·1·1** ist auch $U_{1a}\,U_{2a}$ eine Umgebung von a. Also ist $A_i B_i \subseteqq (A\,B)_i$; und nach **10·3·2** ist $(A\,B)_i \subseteqq A_i$, $(A\,B)_i \subseteqq B_i$, also auch $(A\,B)_i \subseteqq A_i B_i$.

10·3·4. *A_i ist die Summe aller offenen Mengen $G \subseteqq A$.*

Sei G offen und $\subseteqq A$; jeder Punkt $a \varepsilon G$ ist dann innerer Punkt von A, d. h. es ist $G \subseteqq A_i$; also ist jeder offene Teil von A auch Teil von A_i. Sei umgekehrt $a \varepsilon A_i$; dann ist a innerer Punkt von A, d. h. es gibt eine offene

Menge $G \subseteqq A$, so daß $a \varepsilon G$; jeder Punkt von A_i ist also auch Punkt eines offenen Teiles von A. Damit ist **10·3·4** bewiesen.

In **10·3·4** ist enthalten:

10·3·41. *Jede offene Menge $G \subseteqq A$ ist auch $\subseteqq A_i$.*

Aus **10·3·4** und **10·1·2** folgt:

10·3·5. *Bei beliebigem A ist A_i offen.*

Aus **10·3·41** und **10·3·5** entnimmt man: A_i ist der größte offene Teil von A. Drum heißt A_i der offene Kern von A.

10·3·6. *Damit A offen sei, ist notwendig und hinreichend, daß $A = A_i$, d. h. daß jeder Punkt von A innerer Punkt von A sei.*

Dies folgt aus **10·3·41** zusammen mit $A_i \subseteqq A$, und aus **10·3·5**.

4. **Häufungspunkte.** Der Punkt a heißt Häufungspunkt der Menge A, wenn zu jeder Umgebung U_a unendlich viele Punkte von A gehören.

10·4·1. *Ist A Punktmenge eines metrischen Raumes, so ist, damit a Häufungspunkt von A sei, notwendig und hinreichend, daß für jedes $\varrho > 0$ zu $K_{a\varrho}$ unendlich viele Punkte von A gehören.*

Notwendig: Nach **9·2·3** ist $K_{a\varrho}$ eine Umgebung U_a. Hinreichend: Da a innerer Punkt von U_a, gibt es nach **10·3·1** ein $K_{a\varrho} \subseteqq U_a$.

10·4·2. *Damit a Häufungspunkt von A sei, ist notwendig und hinreichend, daß jede reduzierte Umgebung U'_a mindestens einen Punkt von A enthält.*

Notwendig: ist trivial. Hinreichend: Sei a nicht Häufungspunkt von A; dann gibt es eine Umgebung U_a, die nur endlich viele von a verschiedene Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von A enthält. Nach **9·1·41** ist $U_a - \{a, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ offen, also eine reduzierte Umgebung von a, die keinen Punkt von A enthält.

Analog wie **10·4·1** beweist man nun:

10·4·21. *Ist A Punktmenge eines metrischen Raumes, so ist, damit a Häufungspunkt von A sei, notwendig und hinreichend, daß die reduzierte Kugel $K'_{a\varrho}$ für jedes $\varrho > 0$ mindestens einen Punkt von A enthält.*

10·4·3. *Ist a Häufungspunkt von A und gibt es eine Umgebung U_{1a} von a, so daß $A\, U_{1a} \subseteqq B$, so ist a auch Häufungspunkt von B.*

Denn ist U_a eine beliebige Umgebung von a, so ist auch $U_a\, U_{1a}$ eine Umgebung von a, also enthält $U_a\, U_{1a}$ unendlich viele Punkte von A, mithin auch von B; also enthält auch U_a unendlich viele Punkte von B.

Wir bezeichnen die Menge aller Häufungspunkte von A mit A^1. Es muß nicht $A^1 \subseteqq A$ sein; Beispiel im R_1: ist $A = (a, b)$, so ist $A^1 = [a, b]$.

Aus **10·4·3** folgt:

10·4·4. *Ist $A \subseteqq B$, so $A^1 \subseteqq B^1$.*

10·4·5. $$(A + B)^1 = A^1 + B^1.$$

In der Tat, nach **10·4·4** ist $A^1 \subseteqq (A + B)^1$, $B^1 \subseteqq (A + B)^1$, also auch $A^1 + B^1 \subseteqq (A + B)^1$. Bleibt zu zeigen, daß auch $(A + B)^1 \subseteqq A^1 + B^1$. Sei $a \sim \varepsilon\, A^1$, $a \sim \varepsilon\, B^1$; dann gibt es nach **10·4·2** reduzierte Umgebungen U'_{1a}, U'_{2a}, so daß $U'_{1a}\, A = \Lambda$, $U'_{2a}\, B = \Lambda$; dann ist $U'_{1a}\, U'_{2a}$ eine reduzierte Umgebung von a, für die $U'_{1a}\, U'_{2a}\, (A + B) = \Lambda$; nach **10·4·2** ist also $a \sim \varepsilon\, (A + B)^1$. Aus $a \sim \varepsilon\, A^1$, $a \sim \varepsilon\, B^1$ folgt also $a \sim \varepsilon\, (A + B)^1$, d. h. es ist $(A + B)^1 \subseteqq A^1 + B^1$, w. z. b. w.

10·4·6. *Bei beliebigem A ist A^1 abgeschlossen.*

Es ist zu zeigen, daß das Komplement $-A^1$ von A^1 offen ist. Sei also $a\, \varepsilon\, (-A^1)$, d. h. $a \sim \varepsilon\, A^1$. Dann gibt es eine Umgebung U_a, die nicht unendlich viele Punkte von A enthält. Für jedes $b\, \varepsilon\, U_a$ ist aber U_a auch eine Umgebung U_b, die nicht unendlich viele Punkte von A enthält; für $b\, \varepsilon\, U_a$ ist also $b \sim \varepsilon\, A^1$, d. h. $U_a \subseteqq (-A^1)$, d. h. a ist innerer Punkt von $-A^1$, d. h. nach **10·3·6**: $-A^1$ ist offen, w. z. b. w.

10·4·7. *Ist A Punktmenge eines metrischen Raumes und B ein ϱ-Netz in A, so ist $B^1 = A$.*

Dies folgt unmittelbar aus **10·4·1.**

5. **Abgeschlossene Hülle.** Nach **10·2·2** ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen $\supseteqq A$ selbst abgeschlossen. Wir bezeichnen ihn mit A^0 und nennen ihn die abgeschlossene Hülle von A. Es ist also A^0 die kleinste abgeschlossene Menge $\supseteqq A$; mithin:

10·5·1. *Jede abgeschlossene Menge $F \supseteqq A$ ist auch $\supseteqq A^0$.*

Da die abgeschlossenen Mengen $\supseteqq A$ und die offenen Mengen $\subseteqq (-A)$ Komplemente voneinander sind, folgt aus **10·3·4** nach § 2 (1·8):

10·5·11. $$A^0 = -(-A)_i\,.$$

Aus der Definition folgt unmittelbar:

10·5·2. *Ist $B \subseteqq A$, so $B^0 \subseteqq A^0$.*

Wegen **10·5·11** folgt aus **10·3·3** durch Komplementbildung:

10·5·3. $$(A + B)^0 = A^0 + B^0\,.$$

10·5·4. *Damit $a\, \varepsilon\, A^0$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß jede Umgebung U_a mindestens einen Punkt von A enthält.*

Denn nach **10·5·11** ist $a\, \varepsilon\, A^0$ gleichbedeutend mit $a \sim \varepsilon\, (-A)_i$, d. h. es gibt kein $U_a \subseteqq (-A)$, d. h. jedes U_a enthält mindestens einen Punkt von A.

10·5·41. *Ist A Punktmenge eines metrischen Raumes, so ist, damit $a\, \varepsilon\, A^0$ sei, notwendig und hinreichend, daß $K_{a\varrho}$ für jedes $\varrho > 0$ mindestens einen Punkt von A enthält.*

Der Beweis ist analog dem von **10·4·1.**

10·5·411. *Ist G offen, so ist $A^0 G \subseteqq (A G)^0$.*

Sei $a \varepsilon A^0 G$ und U_a eine Umgebung von a; dann ist auch $G U_a$ eine Umgebung von a; nach **10·5·4** gibt es also ein $a' \varepsilon A G U_a$; d. h. in jeder Umgebung U_a gibt es einen Punkt von $A G$, also ist nach **10·5·4** $a \varepsilon (A G)^0$.

10·5·42. $$A^0 = A + A^1.$$

Ist $a \varepsilon A + A^1$, so enthält jedes U_a mindestens einen Punkt von A, und nach **10·5·4** ist $a \varepsilon A^0$; also ist $A + A^1 \subseteqq A^0$. Bleibt zu zeigen: $A^0 \subseteqq A + A^1$, d. h. ist $a \varepsilon A^0$ und $a \sim\varepsilon A$, so ist $a \varepsilon A^1$. Sei also $a \varepsilon A^0$, $a \sim\varepsilon A$; nach **10·5·4** enthält jede Umgebung U_a einen Punkt von A, und da $a \sim\varepsilon A$, enthält auch jede reduzierte Umgebung U'_a einen Punkt von A; also ist nach **10·4·2**: $a \varepsilon A^1$, w. z. b. w.

10·5·5. *Ist E ein metrischer Raum und $\Lambda \subset A \subseteqq E$, so ist $A^0 = [\hat{x} A = 0]$.*

Aus **10·2·3** erhält man für $\varrho = 0$: $[\hat{x} A = 0]$ ist eine abgeschlossene Menge $\supseteqq A$; also ist nach **10·5·1**: $[\hat{x} A = 0] \supseteqq A^0$. Bleibt zu zeigen: $[\hat{x} A = 0] \subseteqq A^0$. Sei $a \sim\varepsilon A^0$; dann gibt es nach **10·5·41** ein $\varrho > 0$, so daß $A K_{a\varrho} = \Lambda$; dann aber ist $a A \geq \varrho > 0$, also $a \sim\varepsilon [\hat{x} A = 0]$. Aus $a \sim\varepsilon A^0$ folgt also $a \sim\varepsilon [\hat{x} A = 0]$, d. h. $[\hat{x} A = 0] \subseteqq A^0$, w. z. b. w.

10·5·6. *Damit A abgeschlossen sei, ist notwendig und hinreichend, daß $A = A^0$.*

N o t w e n d i g. Ist A abgeschlossen, so ist nach **10·5·1** $A \supseteqq A^0$, und nach Definition ist $A \subseteqq A^0$. H i n r e i c h e n d: Nach Definition ist A^0 abgeschlossen.

Aus **10·5·42** und **10·5·6** folgt:

10·5·61. *Damit A abgeschlossen sei, ist notwendig und hinreichend, daß $A^1 \subseteqq A$, d. h. daß A alle seine Häufungspunkte enthält.*

Aus **10·5·5** und **10·5·6** folgt:

10·5·62. *Ist $A \supset \Lambda$ eine abgeschlossene Punktmenge eines metrischen Raumes und ist $a \sim\varepsilon A$, so ist $a A > 0$.*

10·5·7. $$(A^0)^1 = A^1.$$

In der Tat, aus **10·5·42** und **10·4·5** folgt: $(A^0)^1 = A^1 + (A^1)^1$; da A^1 nach **10·4·6** abgeschlossen, ist hierin nach **10·5·61**: $(A^1)^1 \subseteqq A^1$, also ist $(A^0)^1 = A^1$.

Die abgeschlossene Hülle einer offenen Menge heißt ein S t ü c k. Der Raum E selbst, ebenso Λ ist ein Stück. Im R_1 ist jedes Intervall $[a, b]$, jede Halbgerade $x \geq a$ $(x \leq a)$ ein Stück.

10·5·8. *Sind A und B Stücke, so auch $A + B$.*

Nach Definition ist $A = G^0$, $B = H^0$, wo G, H offen. Nach **10·5·3** ist $A + B = G^0 + H^0 = (G + H)^0$, wo $G + H$ nach **10·1·2** offen.

10·5·9. *Damit A ein Stück sei, ist notwendig und hinreichend, daß $A = (A_i)^0$.*

Notwendig: Nach Annahme ist $A = G^0$, wo G offen. Wegen $G \subseteqq G^0$ ist dann $G \subseteqq A$, also nach **10·3·41** auch $G \subseteqq A_i$, also nach **10·5·2** $G^0 \subseteqq (A_i)^0$, d. h. $A \subseteqq (A_i)^0$. Bleibt zu beweisen: $(A_i)^0 \subseteqq A$. Aus $A_i \subseteqq A$ folgt nach **10·5·2** $(A_i)^0 \subseteqq A^0$; weil A abgeschlossen, ist nach **10·5·6** $A^0 = A$, also ist $(A_i)^0 \subseteqq A$, w. z. b. w. Hinreichend. Dies folgt aus **10·3·5.**

Literatur: Die Bezeichnung „abgeschlossene Hülle" stammt von C. Carathéodory. Axiomatische Untersuchung: C. Kuratowski, Fund. math. 3 (1922) S. 182.

6. **Rand, Begrenzung.** Wir bezeichnen nun die Menge $A_r = A - A_i$ als den Rand von A, jeden Punkt $a \varepsilon A_r$ als einen Randpunkt von A. Nach **10·5·11** ist $A_r = A\,(-A)^0$. Es ist $A_r \subseteqq A$. Für jede Menge A gilt die Zerlegung:

$$A = A_r + A_i \qquad (A_r A_i = \Lambda)\,. \tag{6}$$

Die offenen Mengen sind nach **10·3·6** charakterisiert durch $A_r = \Lambda$. Die Mengen, für die $A_i = \Lambda$, d. h. $A_r = A$ ist, heißen Randmengen; die Randmengen sind also die Mengen ohne innere Punkte, oder was dasselbe heißt: die Mengen ohne offenen Teil $\supset \Lambda$. Λ ist eine Randmenge (und zwar die einzige offene Randmenge); im R_n ist die Menge aller rationalen, sowie die Menge aller irrationalen Punkte eine Randmenge. Zufolge **10·3·2** gilt:

10·6·1. *Aus $B \subseteqq A$ folgt $B A_r \subseteqq B_r$.*

Ist hierin insbesondere A Randmenge, also $A = A_r$, so wird hieraus $B = A\,B \subseteqq B_r$, also weil $B_r \subseteqq B$ ist: $B = B_r$, d. h.:

10·6·2. *Jeder Teil einer Randmenge ist eine Randmenge.*

10·6·3. *Bei beliebigem A ist A_r eine Randmenge.*

In der Tat, **10·6·1** ergibt für $B = A_r$: $A_r \subseteqq A_{rr}$, und da $A_{rr} \subseteqq A_r$ ist: $A_r = A_{rr}$.

Sei A eine beliebige Punktmenge. Wenden wir auf A und $-A$ die Zerlegung (6) an, so erhalten wir, indem wir $A_r + (-A)_r = A_g$ setzen, folgende Zerlegung des Raumes:

$$E = A_i + (-A)_i + A_g\,. \tag{6·1}$$

Die Punkte a von A_i sind die inneren Punkte von A; sie waren charakterisiert durch: es gibt ein $U_a \subseteqq A$. Die Punkte a von $(-A)_i$ sind die inneren Punkte von $-A$; wir nennen sie auch die äußeren Punkte von A; sie sind charakterisiert durch: es gibt eine zu A fremde Umgebung U_a. Die Menge A_g heißt die Begrenzung von A, ihre Punkte a heißen Begrenzungspunkte

von A; sie sind charakterisiert durch: jede Umgebung U_a enthält Punkte von A und Punkte von $-A$. Offenbar ist:

$$A_g = (-A)_g. \tag{6·2}$$

10·6·4. *Bei beliebigem A ist A_g abgeschlossen.*

Denn nach (6·1) ist A_g das Komplement der offenen Menge $A_\iota + (-A)_\iota$.

Man beweist leicht die Formeln:

$$\begin{gathered} A_r = A\,A_g; \quad A^0 = A + A_g; \\ A^0 = A + (-A)_r; \quad (-A)^0 = (-A) + A_r. \end{gathered} \tag{6·3}$$

Aus den beiden letzten folgt durch Durchschnittsbildung:

$$A^0\,(-A)^0 = A_r + (-A)_r = A_g. \tag{6·4}$$

Die offenen Mengen sind charakterisiert durch $A\,A_g = \Lambda$, die abgeschlossenen durch $A_g \subseteqq A$; d. h. die offenen Mengen sind diejenigen, die keinen Begrenzungspunkt enthalten, die abgeschlossenen die, die sämtliche Begrenzungspunkte enthalten; daher rühren auch die Bezeichnungen „offen" und „abgeschlossen". Aus der ersten Formel (6·3) folgt nun:

10·6·5. *Damit A abgeschlossen sei, ist notwendig und hinreichend, daß $A_r = A_g$.*

7. **Die G_δ- und F_σ-Mengen.** Wir bezeichnen jede Menge, die Durchschnitt einer Folge offener Mengen ist, als eine G_δ-Menge, oder kurz als ein G_δ, jede Menge, die Summe einer Folge abgeschlossener Mengen ist, als eine F_σ-Menge oder ein F_σ. Jede offene Menge ist auch ein G_δ, jede abgeschlossene Menge ein F_σ. Jede abzählbare Menge ist ein F_σ, weil jede Menge $\{a\}$ abgeschlossen ist; z. B. ist nach **5·1·44** im R_n die Menge der rationalen Punkte ein F_σ.

10·7·1. *Das Komplement eines G_δ ist ein F_σ, das Komplement eines F_σ ist ein G_δ.*

Dies folgt, weil die offenen und abgeschlossenen Mengen Komplemente voneinander sind, aus § 2 (1·8).

Aus **10·7·1** folgt, daß im R_n die Menge der irrationalen Punkte ein G_δ ist.

10·7·2. *Das System aller G_δ-Mengen eines topologischen Raumes ist ein δ-Ring, das der F_σ-Mengen ein σ-Ring.*

Dies folgt vermöge **3·5·1** aus **10·1·21** und **10·2·21.**

10·7·3. *Jedes G_δ ist Durchschnitt einer monoton abnehmenden Folge offener Mengen, jedes F_σ Summe einer monoton wachsenden Folge abgeschlossener Mengen.*

Dies folgt vermöge **3·5·2** aus **10·1·21** und **10·2·21.**

10·7·4. *Ist $A \supset \Lambda$ eine abgeschlossene Menge eines metrischen Raumes und $((\varrho_\nu))$ eine Folge positiver Zahlen mit $\varrho_\nu \to 0$, so ist $A = \underset{\nu}{D}\, U_{A\,\varrho_\nu}$.*

Da offenbar $\underset{\nu}{D}\, U_{A\,\varrho_\nu} = [\acute{x} A = 0]$ ist, folgt dies aus **10·5·5** und **10·5·6.**

10·7·41. *Jede abgeschlossene Menge eines metrischen Raumes ist ein G_δ, jede offene ein F_σ.*

Die erste Hälfte folgt aus **10·7·4** wegen **9·4·1**, die zweite folgt sodann aus **10·7·1.**

Literatur: Die G_δ- und F_σ-Mengen wurden zuerst von W. H. Young näher untersucht (W. H. Young and Gr. Chisholm Young, The theory of sets of points, Cambridge 1906, S. 63ff.); die Bezeichnung stammt von F. Hausdorff. Über G_δ-Mengen vgl. auch W. Sierpiński, Fund. math. 6 (1924) S. 106.

8. **Offen, abgeschlossen als Relativbegriffe.** Seien A und B Punktmengen im topologischen Raume E und $A \subseteq B$. Als Teil des topologischen Raumes E ist B selbst ein topologischer Raum (§ 9, 1). Die Frage, ob A aufgefaßt als Punktmenge in B offen ist, ist dann verschieden von der Frage, ob A aufgefaßt als Punktmenge in E offen ist; denn die offenen Mengen des Raumes B sind (§ 9, 1) die Durchschnitte der offenen Mengen des Raumes E mit B, und es kann sehr wohl A Durchschnitt einer offenen Menge des Raumes E mit B sein, ohne selbst eine offene Menge des Raumes E zu sein; z. B. ist B selbst als Punktmenge des Raumes B betrachtet immer offen, auch wenn es als Punktmenge in E nicht offen ist. Der Begriff „offen“ (und daher auch der Begriff „abgeschlossen“) drückt also eine Relation zwischen einer Punktmenge A und einem A enthaltenden topologischen Raume aus; nur wo kein Zweifel besteht, welcher Raum gemeint ist, muß dieser Raum nicht eigens genannt werden; anderenfalls sagen wir: „A ist offen (abgeschlossen) in B“, wenn B der Raum ist, relativ zu dem A offen (abgeschlossen) ist. Beispiele: $[0,1)$ ist offen in der Halbgeraden $x \geq 0$, im R_1 aber nicht; $(0,1]$ ist abgeschlossen in der Halbgeraden $x > 0$, im R_1 aber nicht. Jede Punktmenge A ist offen (abgeschlossen) in A.

Im folgenden denken wir uns einen topologischen Raum E zugrunde gelegt, auf den sich die Begriffe „offen“, „abgeschlossen“, „offener Kern“, „abgeschlossene Hülle“ usw. beziehen, wenn nichts anderes gesagt ist; alle in den folgenden Sätzen auftretenden Mengen sind Punktmengen in E.

10·8·1. *Die in B offenen (abgeschlossenen) Mengen sind die Durchschnitte der offenen (abgeschlossenen) Mengen mit B.*

Für die in B offenen Mengen ist dies die Definition des topologischen[1])

---

[1]) Ist der zugrunde gelegte Raum E ein metrischer Raum, so verläuft der Beweis so: Ist A offen in B und $a \varepsilon A$, so gibt es nach **10·8·6** und **10·3·1** ein

Teilraumes B von E (§ 9, 1), für die in B abgeschlossenen Mengen folgt es durch Komplementbildung.

Wegen **10·1·1**, **10·2·2** folgt aus **10·8·1**:

10·8·11. *Jede in einer offenen (abgeschlossenen) Menge offene (abgeschlossene) Menge ist offen (abgeschlossen).*

Wendet man **10·5·61** unter Zugrundelegung des Raumes B an, so erhält man:

10·8·2. *Sei $A \subseteqq B$; damit A abgeschlossen sei in B, ist notwendig und hinreichend, daß A alle seine zu B gehörigen Häufungspunkte enthält, d. h. daß $A^1 B \subseteqq A$.*

Da nach **10·5·42** $A^0 B = A B + A^1 B$, also wenn $A \subseteqq B$ ist: $A^0 B = A + A^1 B$, folgt aus **10·8·2**:

10·8·3. *Sei $A \subseteqq B$; damit A abgeschlossen sei in B, ist notwendig und hinreichend, daß $A = A^0 B$.*

Da A^0 die kleinste abgeschlossene Menge $\supseteqq A$, so ist $A^0 B$ die kleinste in B abgeschlossene Menge $\supseteqq A$; also:

10·8·4. *Ist $A \subseteqq B$, so ist $A^0 B$ die abgeschlossene Hülle von A in B.*

Hingegen gilt nur:

10·8·41. *Ist $A \subseteqq B$, so ist $A_i B$ Teil des offenen Kernes von A in B.*

Denn nach **10·3·5** ist A_i offen, also nach **10·8·1** $A_i B$ offen in B, und mithin Teil des offenen Kernes von A in B.

Keineswegs aber ist i. a. $A_i B$ $(= A_i)$ selbst der offene Kern von A in B: j e d e Menge A ist in A offen, also ihr eigener offener Kern in A, aber wenn A nicht offen, ist n i c h t $A = A A_i$.

Aus **10·8·1** folgen unmittelbar die Sätze:

10·8·5. *Ist A offen (abgeschlossen) in B und B offen (abgeschlossen) in C, so ist auch A offen (abgeschlossen) in C.*

10·8·51. *Ist $A \subseteqq B \subseteqq C$ und A offen (abgeschlossen) in C, so auch in B.*

9. **Relative G_δ und F_σ.** Wir nennen jede Menge, die Durchschnitt einer Folge in B offener Mengen ist, ein G_δ in B, jede Menge, die Summe einer Folge in B abgeschlossener Mengen ist, ein F_σ in B.

10·9·1. *Damit A ein G_δ (ein F_σ) in B sei, ist notwendig und hinreichend, daß $A = M B$, wo M ein G_δ (ein F_σ).*

$\varrho_a > 0$, so daß $B K_{a\varrho_a} \subseteqq A$; setzen wir $G = \underset{a \varepsilon A}{S} K_{a\varrho_a}$, so ist offenbar $A = BG$, und G ist offen nach **9·2·8** und **10·1·2**. Ist umgekehrt $A = BG$, wo G offen, und ist $a \varepsilon A$, also auch $a \varepsilon G$, so gibt es nach **10·3·1** ein $\varrho > 0$, so daß $K_{a\varrho} \subseteqq G$; dann ist $B K_{a\varrho} \subseteqq BG$, also ist $BG = A$ offen in B nach **10·8·1** und **10·3·6**.

Der Beweis ergibt sich ohne weiteres aus den Formeln:

$$\underset{n}{D}(G_n B) = (\underset{n}{D} G_n) B; \qquad \underset{n}{S}(F_n B) = (\underset{n}{S} F_n) B.$$

10·9·2. *Ist A ein G_δ (ein F_σ) in B und B ein G_δ (ein F_σ) in C, so ist A ein G_δ (ein F_σ) in C.*

Denn ist A ein G_δ in B, B ein G_δ in C, so ist $A = \underset{n}{D}(G_n B) = B \underset{n}{D} G_n = \underset{m}{D}(G'_m C) \underset{n}{D} G_n = C \underset{m}{D} G'_m \underset{n}{D} G_n$ (wo G_n, G'_m offen). Ist A ein F_σ in B, B ein F_σ in C, so ist (mit abgeschlossenen F_n, F'_m):

$A = \underset{n}{S}(F_n B) = B \underset{n}{S} F_n = \underset{m}{S}(F'_m C) \underset{n}{S} F_n = C \underset{m}{S} F'_m \underset{n}{S} F_n = C \underset{m,n}{S} F'_m F_n$.

Aus **10·9·1** folgt:

10·9·21. *Ist $A \subseteqq B \subseteqq C$ und ist A ein G_δ (ein F_σ) in C, so auch in B.*

§ 11. Dichte, nirgends dichte Mengen.

1. **Dichte Mengen.** Die Menge A heißt d i c h t, wenn $-A$ eine Randmenge ist (§ 10, 6), d. h. wenn $-A$ keinen inneren Punkt hat, d. h. wenn $(-A)_i = A$. Der Raum E ist dicht. Ist $E \neq A$, so ist die leere Menge nicht dicht. Im R_n ist sowohl die Menge der rationalen, wie die der irrationalen Punkte dicht.

11·1·1. *Damit A dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß $A^0 = E$.*

In der Tat, $(-A)_i = A$ ist nach **10·5·11** gleichbedeutend mit $A^0 = E$.

Aus **11·1·1** und **10·5·6** folgt:

11·1·2. *Die einzige dichte, abgeschlossene Menge ist E.*

11·1·3. *Damit A dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß für jede offene Menge $G \supset A$ auch $A G \supset A$ sei.*

N o t w e n d i g: Sei $a \varepsilon G$; wegen $A^0 = E$ ist $a \varepsilon A^0$, und nach **10·5·4** ist $A G \supset A$. H i n r e i c h e n d: Sei für jedes offene $G \supset A$ auch $A G \supset A$. Da $(-A)_i$ offen und $A(-A)_i = A$, muß also $(-A)_i = A$ sein, d. h. A ist dicht.

Aus **11·1·1** folgt wegen **10·5·2**:

11·1·4. *Ist A dicht und $A \subseteqq B$, so ist auch B dicht.*

Also ist die Summe dichter Mengen dicht. Für den Durchschnitt gilt dies natürlich nicht (z. B. ist im R_n die Menge der rationalen und die Menge der irrationalen Punkte dicht, ihr Durchschnitt aber ist leer, und somit nicht dicht). Hingegen gilt:

11·1·5. *Ist A dicht, B dicht und offen, so ist auch $A B$ dicht.*

Denn nach **11·1·3** ist für jedes offene $G \supset A$ auch $B G \supset A$, und da $B G$ offen, ist nach **11·1·3** auch $A B G \supset A$. Also ist nach **11·1·3** $A B$ dicht.

Aus **11·1·5** folgt unmittelbar:

11·1·51. *Der Durchschnitt endlich vieler offener dichter Mengen ist dicht.*

2. **Nirgends dichte Mengen.** Die Menge A heißt nirgends dicht, wenn $(-A)_i$ dicht ist. Die leere Menge ist nirgends dicht; im R_n ist die Menge der Gitterpunkte nirgends dicht.

11·2·1. *Damit A nirgends dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß A^0 eine Randmenge ist.*

In der Tat, die Aussage „A ist nirgends dicht" bedeutet: $(-A)_i$ ist dicht; das aber heißt $-(-A)_i$ ist Randmenge; nach **10·5·11** aber ist $-(-A)_i = A^0$.

11·2·11. *Damit A nirgends dicht sei, ist notwendig, daß A eine Randmenge ist.*

Dies folgt aus **11·2·1** wegen $A \subseteqq A^0$ nach **10·6·2.**

Wegen **10·5·6** folgt aus **11·2·1**:

11·2·111. *Damit eine abgeschlossene Menge nirgends dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie eine Randmenge ist.*

Da A^0 abgeschlossen, folgt aus **11·2·1** und **11·2·111**:

11·2·12. *Damit A nirgends dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß A^0 nirgends dicht sei.*

11·2·13. *Damit die abgeschlossene Menge A nicht nirgends dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß es ein nicht leeres Stück B gebe, das $\subseteqq A$ ist.*

Notwendig: Ist A nicht nirgends dicht, so ist A nach **11·2·111** keine Randmenge, d. h. $A_i \neq A$. Weil A abgeschlossen, folgt nach **10·5·1** aus $A_i \subseteqq A$ auch $(A_i)^0 \subseteqq A$, also ist $(A_i)^0$ ein nicht leeres Stück $\subseteqq A$. Hinreichend: Sei B ein nicht leeres Stück $\subseteqq A$; als Stück ist $B = G^0$, wo G offen; es ist also $G \subseteqq A$, mithin $G \subseteqq A_i$; und weil $B \neq \Lambda$, ist auch $G \neq \Lambda$, mithin $A_i \neq \Lambda$, d. h. A ist nicht Randmenge, also nach **11·2·111** nicht nirgends dicht.

11·2·2. *Damit A nirgends dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jeder offenen Menge $G \supset \Lambda$ eine offene Menge $G' \supset \Lambda$, $G' \subseteqq G$ gebe, so daß $A\,G' = \Lambda$.*

Notwendig: Sei $G \supset \Lambda$; wir setzen $G' = (-A)_i\, G$; dann ist G' offen, $G' \subseteqq G$, und weil $(-A)_i$ dicht, ist nach **11·1·3** $G' \supset \Lambda$; wegen $G' \subseteqq (-A)_i \subseteqq -A$ ist aber $A\,G' = \Lambda$. Hinreichend: Sei $G \supset \Lambda$, $\Lambda \subset G' \subseteqq G$, $A\,G' = \Lambda$; dann ist $G' \subseteqq (-A)$, und weil G' offen, auch $G' \subseteqq (-A)_i$; es gilt also $(-A)_i\, G \supseteqq G'$, und wegen $G' \supset \Lambda$ ist $(-A)_i\, G \supset \Lambda$. Nach **11·1·3** ist also $(-A)_i$ dicht, d. h. A ist nirgends dicht.

Aus **11·2·2** folgen die Sätze:

11·2·21. *Eine offene Menge $G \supset A$ ist nicht nirgends dicht.*

11·2·3. *Ist A nirgends dicht und $B \subseteqq A$, so ist auch B nirgends dicht.*

Also ist der Durchschnitt nirgends dichter Mengen nirgends dicht.

11·2·4. *Die Summe zweier (endlich vieler) nirgends dichter Mengen ist nirgends dicht.*

Sind A, B nirgends dicht, so sind $(-A)_i$, $(-B)_i$ dichte offene Mengen; nach **11·1·51** ist also auch $(-A)_i\,(-B)_i$ dicht, d. h. nach **10·3·3**: es ist $((-A)\,(-B))_i = (-(A+B))_i$ dicht, d. h. $A + B$ ist nirgends dicht.

Aus **11·2·3** und **11·2·4** folgt:

11·2·41. *Das System aller nirgends dichten Mengen eines topologischen Raumes ist ein δ-Körper.*

11·2·5. *Ist A nirgends dicht, so ist $-A$ dicht.*

Denn es ist $(-A)_i$ dicht, nach **11·1·4** also auch $-A$.

Die Umkehrung von **11·2·5** gilt nicht allgemein, wohl aber für abgeschlossene Mengen:

11·2·51. *Eine abgeschlossene Menge A ist dann und nur dann nirgends dicht, wenn $-A$ dicht.*

In der Tat: „$-A$ ist dicht" heißt „A ist Randmenge", und nach **11·2·111** heißt das: „A ist nirgends dicht".

11·2·6. *Ist der Raum $E \neq A$, so ist keine Menge sowohl dicht als nirgends dicht.*

Denn ist A dicht, so ist $-A$ eine Randmenge, d. h. $(-A)_i = A$, also ist $(-A)_i$ nicht dicht, d. h. A ist nicht nirgends dicht.

11·2·7. *Ist A abgeschlossen, so ist A_r nirgends dicht.*

Weil A abgeschlossen, ist nach **10·6·5** $A_r = A_g$, also ist A_r nach **10·6·4** abgeschlossen, und da A_r nach **10·6·3** eine Randmenge ist, folgt die Behauptung aus **11·2·111.**

11·2·71. *Ist A offen, so ist A_g nirgends dicht.*

Denn $-A$ ist abgeschlossen, also nach **10·6·5** und **11·2·7** $(-A)_g$ nirgends dicht, also nach § 10 (6·2) auch A_g nirgends dicht.

3. **Dicht, nirgends dicht als Relativbegriffe.** Die Begriffe „dicht", „nirgends dicht" sind, ebenso wie „offen", „abgeschlossen", Relativbegriffe: sie drücken eine Relation zwischen einer Menge A und einem topologischen Raume $\supseteqq A$ aus, der, wenn erforderlich, eigens genannt werden muß. Im folgenden ist wieder ein topologischer Raum E zugrunde gelegt, auf den sich, wenn nicht anders gesagt, die auftretenden Relativbegriffe beziehen; alle auftretenden Mengen sind Punktmengen in E.

11·3·1. *Sei $A \subseteqq B$; damit A dicht sei in B, ist notwendig und hinreichend, daß $B \subseteqq A^0$.*

Da $B \subseteqq A^0$ gleichbedeutend mit $A^0 B = B$, folgt dies aus **11·1·1** (angewendet auf den Raum B) und **10·8·4**.

11·3·11. *Sei $A \subseteqq B$; damit A dicht sei in B, ist notwendig und hinreichend, daß $A^0 = B^0$.*

Notwendig: Nach **11·3·1** ist $B \subseteqq A^0$, also auch $B^0 \subseteqq A^0$; wegen $A \subseteqq B$ ist auch umgekehrt $A^0 \subseteqq B^0$. Hinreichend: Aus $A^0 = B^0$ folgt $B \subseteqq A^0$, und das ist hinreichend nach **11·3·1.**

11·3·12. *Jede Menge A ist dicht in A und dicht in A^0.*

Das erste folgt aus **11·3·11**, das zweite aus **11·3·1.**

11·3·2. *Ist $A \subseteqq A' \subseteqq B' \subseteqq B$, und ist A dicht in B, so ist auch A' dicht in B'.*

Denn nach **10·5·2** ist auch $A^0 \subseteqq A'^0 \subseteqq B'^0 \subseteqq B^0$; wegen **11·3·11** ist hierin $A^0 = B^0$, also auch $A'^0 = B'^0$, und die Behauptung folgt aus **11·3·11.**

11·3·21. *Ist $A' \subseteqq A \subseteqq B \subseteqq B'$, und ist A nirgends dicht in B, so ist auch A' nirgends dicht in B'.*

Nach **11·2·3**, angewendet auf den Raum B', genügt es zu zeigen: A ist nirgends dicht in B'. Da nach **10·8·4** $A^0 B'$ die abgeschlossene Hülle von A in B' ist, ist also nach **11·2·1** (angewendet auf den Raum B') zu zeigen: $A^0 B'$ ist eine Randmenge in B', d. h.: ist H eine in B' offene Menge $\subseteqq A^0 B'$, so ist $H = \Lambda$. Aus $H \subseteqq A^0 B'$ folgt $H B \subseteqq A^0 B' B$, also wegen $B \subseteqq B'$: $H B \subseteqq A^0 B$; da nach **10·8·1** $H B$ offen in B, und $A^0 B$ nach **11·2·1** (angewendet auf den Raum B) eine Randmenge in B, ist $H B = \Lambda$; da $B^0 B'$ die abgeschlossene Hülle von B in B', ist also nach **10·5·411**, angewendet auf den Raum B', auch $H B^0 B' = \Lambda$, d. h. $H B^0 = \Lambda$, und somit, wegen $A^0 \subseteqq B^0$, auch $H A^0 = \Lambda$; aus $H \subseteqq A^0 B' \subseteqq A^0$ folgt also $H = \Lambda$, w. z. b. w.

11·3·3. *Ist A dicht in B, B dicht in C, so ist A dicht in C.*

Denn nach **11·3·11** ist $A^0 = B^0$, $B^0 = C^0$, also $A^0 = C^0$.

Aus **11·3·3** und **11·3·12** folgt:

11·3·31. *Ist A dicht in B, so auch in B^0.*

11·3·32. *Ist $A \subseteqq B$ und nirgends dicht in B^0, so auch in B.*

Nach **11·2·2** ist zu zeigen: In jeder in B offenen Menge $B G \supset \Lambda$ gibt es eine in B offene Menge $B G' \supset \Lambda$, so daß $A G' = \Lambda$. Da A nirgends dicht in B^0, gibt es nach **11·2·2** eine offene Menge G', so daß $\Lambda \subset B^0 G' \subseteqq B^0 G$, $A G' = \Lambda$; wegen $B^0 G' \subseteqq B^0 G$ ist auch $B G' \subseteqq B G$; weil G' offen und $B^0 G' \supset \Lambda$, ist nach **10·5·4** auch $B G' \supset \Lambda$; und da $A G' = \Lambda$, ist die Behauptung bewiesen.

11·3·4. *Ist A_m dicht in B_m für jedes $m \varepsilon M$, so ist $A = \underset{m \varepsilon M}{S} A_m$ dicht in $B = \underset{m \varepsilon M}{S} B_m$.*

Wegen $A_m \subseteqq B_m$ ist $A \subseteqq B$; wegen **11·3·11** ist $A_m^0 = B_m^0$, also $B = \underset{m \varepsilon M}{S} B_m \subseteqq \underset{m \varepsilon M}{S} B_m^0 = \underset{m \varepsilon M}{S} A_m^0 \subseteqq A^0$; die Behauptung folgt also aus **11·3·1**.

11·3·5. *Ist $A\,B$ dicht in B, so ist $B \subseteqq A^0$.*

Denn bei Benutzung von **11·3·11** ist $B \subseteqq B^0 = (A\,B)^0 \subseteqq A^0$.

Die Umkehrung hiervon gilt nicht (Beispiel: A die Menge der rationalen, B die der irrationalen Punkte des R_n). Wohl aber gilt:

11·3·51. *Ist B eine offene Menge $\subseteqq A^0$, so ist $A\,B$ dicht in B.*

Dann nach **10·5·411** ist $(A\,B)^0 \supseteqq A^0 B = B$; die Behauptung folgt also aus **11·3·1**.

Nun erhalten wir neben **11·1·3** und **11·2·2** die folgenden Bedingungen dafür, daß eine Menge dicht, bzw. nirgends dicht sei.

11·3·6. *Damit A dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß $A\,G$ dicht in G sei für jedes offene G.*

Notwendig: Ist A dicht, so ist nach **11·1·1** $A^0 = E$, also gewiß $G \subseteqq A^0$, und die Behauptung folgt aus **11·3·51**. Hinreichend: Man wähle $G = E$.

11·3·61. *Damit A nirgends dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß $A\,G$ nirgends dicht in G sei für jedes offene G.*

Notwendig: Sei $C \supset A$ und offen in G, also nach **10·8·11** auch offen (in E). Nach **11·2·2** gibt es eine offene Menge $C' \supset A$, $C' \subseteqq C$, so daß $A\,C' = A$, also auch $A\,G\,C' = A$. Wegen $C' \subseteqq G \subseteqq E$, ist C' nach **10·8·51** auch offen in G; nach **11·2·2** angewendet auf den Raum G ist also $A\,G$ nirgends dicht in G. Hinreichend: Man wähle $G = E$.

11·3·7. *Damit A nirgends dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß es keine offene Menge $G \supset A$ gebe, für die $A\,G$ dicht in G ist.*

Notwendig: Sei $G \supset A$ und offen; nach **11·3·61** ist $A\,G$ nirgends dicht in G, also nach **11·2·6** nicht dicht in G. Hinreichend: Ist die Bedingung erfüllt, so kann nach **11·3·51** keine offene Menge G, die $\supset A$ ist, $\subseteqq A^0$ sein, d. h. A^0 ist Randmenge, und nach **11·2·1** ist A nirgends dicht.

11·3·8. *Ist A dicht in B und G offen, so ist $A\,G$ dicht in $B\,G$.*

Nach **11·3·1** ist $B \subseteqq A^0$, also $B\,G \subseteqq A^0 G$, also nach **10·5·411** $B\,G \subseteqq (A\,G)^0$; nach **11·3·1** ist also $A\,G$ dicht in $B\,G$.

11·3·9. *Ist B dicht in C und A nirgends dicht in C, so ist $A\,B$ nirgends dicht in B.*

Nach **11·2·3** ist AB nirgends dicht in C; da nach **11·3·1** $C \subseteqq B^0$, ist also nach **11·3·21** AB auch nirgends dicht in B^0, also nach **11·3·32** auch in B.

Literatur zu § 11: Die Grundbegriffe dieses Paragraphen stammen von G. Cantor; eine eingehende Darstellung bei F. Hausdorff, Mengenlehre § 27.

§ 12. Isolierte, separierte, insichdichte Mengen.

1. **Absolute Eigenschaften.** Wie wir in § 10, 8 und § 11, 3 sahen, stellen die Begriffe: offen, abgeschlossen, dicht, nirgends dicht Relationen einer Menge zu einem sie umfassenden topologischen Raum dar, oder, was dasselbe heißt, Relationen eines topologischen Raumes A zu einem topologischen Raum $E \supseteqq A$: ist $E \supseteqq A$ und $E_1 \supseteqq A$, so kann A in E offen sein, in E_1 nicht. Wir fragen nun nach Eigenschaften, die einem topologischen Raume an sich, nicht relativ zu einem anderen zukommen; wir nennen sie absolute Eigenschaften. Z. B. hat, wenn $a \varepsilon A$, die Aussage „a ist Häufungspunkt von A", sowie ihre Negation, absoluten Charakter. Das hat zur Folge: fasse ich den topologischen Raum A einmal auf als Punktmenge in $E \supseteqq A$, dann als Punktmenge in $E_1 \supseteqq A$, und trifft unsere Aussage im einen Falle zu, so auch im anderen. Absolute Eigenschaften kommen einem topologischen Raum A an sich zu, gleichgültig in welchen topologischen Raum E ich ihn eingebettet denke. Da jede Punktmenge in einem topologischen Raume selbst ein topologischer Raum ist, so können wir absolute Eigenschaften auch von Punktmengen (nicht nur von topologischen Räumen) aussagen.

2. **Isolierte Punkte.** Einen Punkt von A, der nicht Häufungspunkt von A ist, nennen wir einen isolierten Punkt von A. Die Menge aller isolierten Punkte von A bezeichnen wir mit A_i; die Menge aller Punkte von A, die Häufungspunkte von A sind, mit A_h. Es ist also:

(2) $$A = A_i + A_h \qquad (A_i A_h = \Lambda).$$

Da die Aussage: „Der Punkt a von A ist isolierter Punkt (ist Häufungspunkt) von A" absoluten Charakter hat, so auch die Zerlegung (2) — im Gegensatze zur Zerlegung § 10 (6) in Rand und offenen Kern, die relativen Charakter hat, d. h. verschieden ausfallen kann, je nachdem als Teil welchen topologischen Raumes A aufgefaßt wird.

Nach Definition ist (§ 10, 4):

(2·1) $$A_i = A - A^1, \qquad A_h = A\,A^1;$$

obwohl hierin A^1 relativen Charakter hat (bei verschiedener Wahl des topo-

logischen Raumes $E \supseteqq A$ verschieden ausfällt), hat A_j (und ebenso A_h) absoluten Charakter (ist dieselbe Menge, wie immer $E \supseteqq A$ gewählt sein mag).

Ersetzen wir in (2·1) A durch A^0, und beachten, daß nach **10·5·7** $(A^0)^1 = A^1$ ist, so erhalten wir, da nach **10·5·42** $A^0 A^1 = A^1$ ist:

(2·11) $$(A^0)_h = A^1 .$$

Nach (2) ist also: $A^0 = (A^0)_j + A^1$ und $(A^0)_j A^1 = \Lambda$; durch Vergleich mit **10·5·42** ergibt sich daraus: $(A^0)_j = A - A^1$, also nach (2·1):

(2·111) $$(A^0)_j = A_j .$$

Wegen (2·11), (2·111) ergibt die Zerlegung (2), angewendet auf A^0:

(2·2) $$A^0 = A_j + A^1 \qquad (A_j A^1 = \Lambda) .$$

Aus der Definition von A_h folgt:

12·2·1. *Ist $A \subseteqq B$, so $A_h \subseteqq B_h$, $A B_j \subseteqq A_j$.*

12·2·2. $(A+B)_h = (A+B)(A^1+B^1)$; $(A+B)_j = (A+B) - (A^1+B^1)$.

Nach (2·1) ist $(A+B)_h = (A+B)(A+B)^1$, also folgt die erste Gleichung aus **10·4·5**, sodann die zweite durch Komplementbildung bezüglich $A+B$.

12·2·3. *A_h ist abgeschlossen in A; A_j ist offen in A.*

Die erste Hälfte folgt wegen (2·1) aus **10·4·6** und **10·8·1**, die zweite sodann aus (2).

Bedeutet E den zugrunde gelegten topologischen Raum, so gilt:

12·2·4. *Ist $a \varepsilon E_j$, so ist die Menge $\{a\}$ offen und ein Stück.*

Denn ist $a \varepsilon E_j$, so gibt es nach **10·4·2** eine reduzierte Umgebung U'_a, die leer ist; ist aber $U'_a = \Lambda$, so ist $U_a = \{a\}$, U_a aber ist nach Definition (§ 9, 1) offen. Da die Menge $\{a\}$ aber auch abgeschlossen ist, so ist sie ein Stück.

12·2·41. *Jeder Teil von A_j ist offen in A.*

Dies folgt aus **12·2·4** und **10·1·2.**

12·2·5. *Eine dichte Menge enthält jeden isolierten Punkt a des Raumes.*

Dies folgt aus **11·1·3**, indem man dort für G die Menge $\{a\}$ wählt.

12·2·51. *Eine nirgends dichte Menge enthält keinen isolierten Punkt des Raumes.*

Wegen **12·2·4** folgt dies aus **11·2·11.**

12·2·52. *Ist A dicht in B, so ist $A_j = B_j$.*

Aus **12·2·5** (angewendet auf den Raum B) folgt: $B_j \subseteqq A$, d. h. $B_j = A B_j$, also nach **12·2·1**: $B_j \subseteqq A_j$. Bleibt zu zeigen $A_j \subseteqq B_j$, oder was dasselbe

heißt: $B_h \subseteqq - A_j$. Nach **11·3·1** ist $B \subseteqq A^0$, also $B^1 \subseteqq (A^0)^1$, also nach **10·5·7** $B_h \subseteqq B^1 \subseteqq A^1$, also weil $A^1 A_j = \Lambda$ ist: $B_h \subseteqq - A_j$, w. z. b. w.

12·2·6. *Ist $a \varepsilon E_h$, so ist die Menge $\{a\}$ nirgends dicht.*

Dies folgt aus **11·2·111**; denn ist $a \varepsilon E_h$, so ist offenbar $\{a\}$ eine Randmenge.

3. **Isolierte Mengen.** Ist $A_h = \Lambda$, also $A = A_j$, d. h. ist jeder Punkt von A isoliert, so heißt A eine isolierte Menge; dies ist gleichbedeutend mit $A A^1 = \Lambda$. Der Begriff „isolierte Menge" hat absoluten Charakter.

Die leere Menge, jede endliche Menge ist isoliert; die Menge der Gitterpunkte des R_n, die Menge der Punkte $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des R_1 ist isoliert.

Aus **12·2·1** folgt:

12·3·1. *Jeder Teil einer isolierten Menge ist isoliert.*

12·3·2. *Bei beliebigem A ist A_j isoliert.*

Aus $A_j \subseteqq A$ folgt nach **12·2·1**: $A_{jh} \subseteqq A_h$, und da auch $A_{jh} \subseteqq A_j$, ist $A_{jh} \subseteqq A_h A_j$; wegen $A_h A_j = \Lambda$ ist also auch $A_{jh} = \Lambda$, d. h. A_j ist isoliert.

12·3·3. *In jedem unendlichen*[1]) *Raume E gibt es isolierte unendliche Mengen.*

Dies ist trivial, wenn E selbst isoliert; wir nehmen also an: $E_h \supset \Lambda$. Sei $a \varepsilon E_h$. Wir definieren durch Induktion eine Folge von Punkten a_n und zwei Folgen offener Mengen G_n und G'_n: 1. a_1 sei ein beliebiger Punkt $\neq a$, und G_1, G'_1 seien zwei fremde offene Mengen, so daß $a \varepsilon G_1$, $a_1 \varepsilon G'_1$ (§ 9, 1, Axiom 5_t). 2. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (unter einander und von a verschieden) gegeben, seien ferner G_n, G'_n zwei fremde offene Mengen, so daß $a \varepsilon G_n$, $a_i \varepsilon G'_n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; da $a \varepsilon E_h$, gibt es in G_n einen Punkt $\neq a$; einen solchen wählen wir für a_{n+1}; sodann seien H_n, H'_n zwei fremde offene Mengen, so daß $a \varepsilon H_n$, $a_{n+1} \varepsilon H'_n$, und sei $G_{n+1} = G_n H_n$, $G'_{n+1} = G'_n + H'_n$; dann sind auch G_{n+1}, G'_{n+1} zwei fremde offene Mengen, und es ist $a \varepsilon G_{n+1}$, $a_i \varepsilon G'_{n+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$. Die so gebildete Menge A der Punkte a_n $(n = 1, 2 \ldots)$ ist isoliert; denn da $a_n \varepsilon G'_n$, $a_i \varepsilon G_n$ $(i > n)$ und $G_n G'_n = \Lambda$, kann a_n nicht Häufungspunkt von A sein.

Aus **10·4·7** folgt unmittelbar:

12·3·4. *Ist A eine metrische Menge und B ein ϱ-Netz in A, so ist B isoliert.*

12·3·41. *Sind A_1 und A_2 metrische Mengen, ist B_1 ein ϱ_1-Netz in A_1 und B_2 ein ϱ_2-Netz in A_2, so ist $B_1 + B_2$ isoliert.*

Nach **10·4·7** ist $B_1^1 = \Lambda$, $B_2^1 = \Lambda$, also nach **10·4·5** auch $(B_1 + B_2)^1 = \Lambda$.

---

[1]) d. h. aus unendlich vielen Punkten bestehenden.

4. **Insichdichte Mengen.** Ist $A_j = A$, also $A = A_h$, d. h. ist jeder Punkt von A Häufungspunkt, so heißt A insichdicht[1]); dies ist gleichbedeutend mit $A \subseteqq A^1$, sowie mit $A^0 = A^1$. Der Begriff „insichdicht" hat absoluten Charakter. Die leere Menge, jede Halbgerade, jedes Intervall des R_1, der R_n, die Menge aller rationalen, die Menge aller irrationalen Punkte des R_n ist insichdicht. Aus **12·2·1** folgt:

12·4·1. *Die Summe eines (endlichen oder unendlichen) Systemes insichdichter Mengen ist insichdicht.*

12·4·2. *Eine offene Menge G, die keinen isolierten Punkt des Raumes E enthält, ist insichdicht.*

Sei in der Tat $a \varepsilon G$, U_a eine Umgebung von a; dann ist auch $U_a G$ eine Umgebung von a, und da a Häufungspunkt von E, besteht $U_a G$ aus unendlich vielen Punkten, daher enthält U_a unendlich viele Punkte von G, und a ist Häufungspunkt von G.

12·4·21. *Jede in einer insichdichten Menge B offene Menge ist insichdicht.*

Dies ist ein Spezialfall von **12·4·2**; man hat nur in **12·4·2** für E die Menge B zu wählen.

12·4·3. *Ist A dicht in B, so ist, damit A insichdicht sei, notwendig und hinreichend, daß B insichdicht ist.*

Dies ist ein Spezialfall von **12·2·52.**

Da nach **11·3·12** A dicht in A^0, folgt daraus:

12·4·31. *Damit A insichdicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß A^0 insichdicht sei.*

12·4·32. *Ist A insichdicht und $A \subseteqq B \subseteqq A^0$, so ist auch B insichdicht.*

Denn aus $A \subseteqq B \subseteqq A^0$ folgt $A^0 = B^0$; ist nun A insichdicht, so nach **12·4·31** auch A^0, also auch B^0, also nach **12·4·31** auch B.

12·4·4. *$A - (A_j)^0$ ist insichdicht.*

Wir setzen $A - (A_j)^0 = B$, $-(A_j)^0 = G$; dann ist G offen und $B \subseteqq A_h$, d. h. jeder Punkt von B ist Häufungspunkt von A; da aber $AG = B = BG$, ist nach **10·4·3** jeder Punkt von B auch Häufungspunkt von B, d. h. B ist insichdicht.

12·4·5. *Ist A insichdicht, B isoliert, so ist $A \subseteqq (A - B)^1$.*

Andernfalls gäbe es ein $a \varepsilon A$, so daß $a \sim\varepsilon (A-B)^1$. Nach **10·4·2** gäbe es dann eine reduzierte Umgebung U'_a, so daß $(A-B)\, U'_a = \Lambda$, d. h. $A\, U'_a \subseteqq B$; nach **12·3·1** wäre also $A\, U'_a$ isoliert. Das aber ist unmöglich, denn nach **12·4·21** ist $A\, U'_a$ insichdicht, und nach **10·4·2** ist $A\, U'_a \supset \Lambda$.

[1]) In einem Worte zu schreiben: Jede Menge A ist dicht in A, also dicht in sich; aber keineswegs ist jede Menge insichdicht.

12·4·6. *Ist A eine insichdichte metrische Menge, so gibt es ein $B \subseteqq A$, so daß sowohl B als $A - B$ dicht in A.*

Dies ist trivial, wenn $A = \Lambda$; sei also $A \supset \Lambda$. Nach **9·7·1** gibt es in A ein 1-Netz B_1; da A insichdicht, B_1 nach **12·3·4** isoliert, ist $A - B_1 \supset \Lambda$. Sei B_2 ein $\frac{1}{2}$-Netz in $A - B_1$; da $B_1 + B_2$ nach **12·3·41** isoliert, ist $A - (B_1 + B_2) \supset \Lambda$. Sei B_3 ein $\frac{1}{3}$-Netz in $A - (B_1 + B_2)$ usf. Wir setzen $B = \mathop{S}\limits_n B_{2n}$; dann gilt: $A - B \supseteqq \mathop{S}\limits_n B_{2n-1}$. Ist dann $a \varepsilon A$ und $\varrho > 0$, so ist $K_{a\varrho} B_n \supset \Lambda$ für $n > \frac{1}{\varrho}$; denn nach **12·4·5** ist $a \varepsilon \left(A - (B_1 + B_2 + \dots + B_{n-1})\right)^1$, nach **10·4·1** gibt es also ein $a' \varepsilon A - (B_1 + B_2 + \dots + B_{n-1})$, so daß $a a' < \varrho - \frac{1}{n}$, und weil B_n ein $\frac{1}{n}$-Netz in $A - (B_1 + B_2 + \dots + B_{n-1})$ ist, gibt es ein $b \varepsilon B_n$, so daß $a' b < \frac{1}{n}$; aus $a a' < \varrho - \frac{1}{n}$, $a' b < \frac{1}{n}$ folgt aber $a b < \varrho$, also ist $K_{a\varrho} B_n \supset \Lambda$, wie behauptet. Nach **10·5·41** folgt daraus: $A \subseteqq B^0$, $A \subseteqq (A - B)^0$, also sind nach **11·3·1** B und $A - B$ dicht in A.

12·4·61. *Ist A eine insichdichte metrische Menge, so gibt es eine Zerlegung $A = \mathop{S}\limits_n A_n$ von A in $\aleph_0$ disjunkte, in A dichte Teile.*

Nach **12·4·6** gibt es eine Zerlegung $A = (A - B_1) + B_1$, so daß $A - B_1$ und B_1 dicht in A. Nach **12·4·3** ist B_1 insichdicht, also gibt es nach **12·4·6** eine Zerlegung $B_1 = A_2 + B_2$ in zwei fremde, in B_1 dichte Summanden; nach **11·3·3** sind A_2 und B_2 auch dicht in A, also nach **12·4·3** auch insichdicht. Daher gibt es wieder nach **12·4·6** eine ebensolche Zerlegung $B_2 = A_3 + B_3$ usf. Nun ist für jedes n: $A = (A - B_1) + A_2 + \dots + A_n + B_n$, also $A = (A - B_1) + \mathop{S}\limits_{n \geqq 2} A_n + \mathop{D}\limits_n B_n$, und jede der Mengen $A - B_1$, $A_2, \dots, A_n, \dots$ ist dicht in A. Setzen wir noch $(A - B_1) + \mathop{D}\limits_n B_n = A_1$, so ist $A = \mathop{S}\limits_n A_n$, und nach **11·3·2** ist auch A_1 dicht in A.

Literatur: Die insichdichten Mengen wurden eingeführt von G. Cantor, Math. Ann. 23 (1884) S. 471.

5. **Perfekte Mengen.** Eine Menge, die zugleich abgeschlossen und insichdicht ist, heißt perfekt. Die leere Menge ist perfekt. Ist der Raum E insichdicht, so ist er perfekt; der R_n ist also perfekt. Im R_1 ist jedes Intervall $[a, b]$, jede Halbgerade $x \geq a$ $(x \leq a)$ perfekt. „A ist perfekt“, ist gleich-

bedeutend mit $A = A^1$. Der Begriff „perfekt“ hat, ebenso wie „abgeschlossen“ relativen Charakter; z. B. ist $(0, 1]$ perfekt in der Halbgeraden $x > 0$, nicht aber im R_1.

12·5·1. *Die Summe endlich vieler perfekter Mengen ist perfekt.*

Dies folgt aus **12·4·1** und **10·2·1.**

12·5·2. *Ist A perfekt, so ist auch jedes Stück in A perfekt.*

Ist B ein Stück in A, so ist B die abgeschlossene Hülle in A einer in A offenen Menge G. Nach **12·4·21** ist G insichdicht, nach **12·4·31** also auch B, und als Stück in A ist B auch abgeschlossen in A, also nach **10·8·11** abgeschlossen.

12·5·3. *Damit A insichdicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß A^0 perfekt sei.*

Dies folgt aus **12·4·31** und der Tatsache, daß A^0 abgeschlossen.

12·5·4. *Ist A insichdicht, so ist A^1 perfekt.*

Dies folgt aus 12·5·3, da für insichdichte Mengen $A^0 = A^1$.

Die Umkehrung von **12·5·4** gilt nicht; z. B. ist für jede endliche Menge $A^1 = \Lambda$, also perfekt.

Literatur: Die perfekten Mengen wurden eingeführt von G. Cantor, Math. Ann. 21 (1883) S. 575.

6. **Separierte Mengen.** Eine Menge, die keinen insichdichten Teil $\supset \Lambda$ hat, heißt separiert.

12·6·1. *Jede isolierte Menge A ist separiert.*

Sei $B \supset \Lambda$ ein insichdichter Teil von A; jeder Punkt $b \varepsilon B$ ist dann Häufungspunkt von B, nach **10·4·3** also auch von A, also ist A nicht isoliert.

Die Umkehrung hiervon gilt nicht; z. B. ist die aus den Punkten 0 und $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des R_1 bestehende Menge separiert, aber nicht isoliert.

12·6·2. *Jeder Teil einer separierten Menge ist separiert.*

Dies folgt unmittelbar aus der Definition.

12·6·3. *Sind A und B separiert, so auch $A + B$.*

Es ist zu zeigen: jede insichdichte Menge $C \subseteqq A + B$ ist $= \Lambda$. Es ist $C = A\,C + B\,C$. Da $C - (A\,C)^0$ offen in C, so ist nach **12·4·21** $C - (A\,C)^0$ insichdicht, also als Teil der separierten Menge B leer, d. h. $C \subseteqq (A\,C)^0$, also auch $C^0 \subseteqq (A\,C)^0$; da aber wegen $A\,C \subseteqq C$ auch $(A\,C)^0 \subseteqq C^0$, ist $(A\,C)^0 = C^0$, d. h. nach **11·8·11**: $A\,C$ ist dicht in C, und mithin nach **12·4·3**: $A\,C$ ist insichdicht. Weil A separiert, ist also $A\,C = \Lambda$. Ebenso sieht man: $B\,C = \Lambda$. Also ist $C = \Lambda$, w. z. b. w.

Aus **12·6·2** und **12·6·3** folgt:

12·6·31. *Das System aller separierten Mengen eines topologischen Raumes ist ein δ-Körper.*

12·6·4. *Eine separierte Menge A, die keinen isolierten Punkt des Raumes enthält, ist nirgends dicht.*

Wäre A nicht nirgends dicht, so gäbe es nach **11·3·7** eine offene Menge $G \supset \Lambda$, so daß $A\,G$ dicht in G; dann ist $A\,G \supset \Lambda$, und da AG keinen isolierten Punkt des Raumes enthält, kann nach **12·2·5** auch G keinen isolierten Punkt des Raumes enthalten. Also ist G nach **12·4·2** insichdicht, und nach **12·4·3** ist auch $A\,G$ insichdicht. Wegen $A\,G \supset \Lambda$ steht das im Widerspruche zur Voraussetzung, A sei separiert.

Literatur: Die separierten Mengen (in der französischen Literatur neuerdings als „ensembles clairsemés" bezeichnet) wurden eingeführt von G. Cantor, Acta math. 7 (1885) S. 106. Eingehendere Betrachtungen: M. Fréchet, Fund. math. 10 (1927) S. 328.

7. **Insichdichter Kern.** Da Λ insichdicht, hat jede Menge einen insichdichten Teil. Nach **12·4·1** ist die Summe aller insichdichten Teile von A wieder insichdicht; sie heißt der insichdichte Kern A_k von A und ist der größte insichdichte Teil von A. Wir setzen $A - A_k = A_s$, und nennen A_s den separierten Bestandteil von A. Denn es gilt:

12·7·1. *Bei beliebigem A ist A_s separiert.*

Hätte nämlich A_s einen insichdichten Teil $B \supset \Lambda$, so wäre $A_k + B$ zufolge **12·4·1** ein insichdichter Teil von A, der $\supset A_k$ wäre, entgegen der Definition von A_k.

Die Zerlegung:

$$A = A_k + A_s \qquad (A_k\,A_s = \Lambda) \tag{7}$$

hat absoluten Charakter. Aus der Definition von A_k und A_s folgt unmittelbar:

$$A_k \subseteqq A_h, \qquad A_s \supseteqq A_j. \tag{7·1}$$

12·7·2. *A_j ist dicht in A_s.*

Nach **12·4·4** ist $A - (A_j)^0 \subseteqq A_k$; durch Komplementbildung bezüglich A folgt also: $(A_j)^0 \supseteqq A_s$, und daraus folgt die Behauptung nach **11·3·1.**

12·7·3. *Ist $A \subseteqq B$, so $A_k \subseteqq B_k$.*

Denn jeder insichdichte Teil von A ist auch insichdichter Teil von B.

12·7·31. *Ist $A \subseteqq B$, so $A\,B_s \subseteqq A_s$.*

Denn aus **12·7·3** folgt durch Komplementbildung bezüglich B, daß: $B - A_k \supseteqq B_s$, also $A\,(B - A_k) \supseteqq A\,B_s$; wegen $A \subseteqq B$, $A_k \subseteqq A$ ist aber hierin $A\,(B - A_k) = A\,B - A\,A_k = A - A_k = A_s$.

12·7·4. $$(A+B)_k = (A+B)\left((A_k)^0 + (B_k)^0\right).$$

Wir setzen $(A+B)\left((A_k)^0 + (B_k)^0\right) = M$. Wegen $A_k \subseteqq (A+B)(A_k)^0 \subseteqq (A_k)^0$ ist nach **12·4·32** $(A+B)(A_k)^0$, und ebenso $(A+B)(B_k)^0$ insichdicht, daher nach **12·4·1** auch $(A+B)\left((A_k)^0 + (B_k)\right)^0$; somit ist $M \subseteqq (A+B)_k$. Es ist also nur mehr zu zeigen: $(A+B)_k \subseteqq M$, oder was dasselbe heißt: Jeder insichdichte Teil C von $A+B$ ist $\subseteqq M$. Wäre nicht $C \subseteqq M$, so wäre $C - M \supset \Lambda$, und weil $CM = C\left((A_k)^0 + (B_k)^0\right)$ abgeschlossen in C, wäre $C - M$ offen in C, also nach **12·4·21** insichdicht. Es genügt also weiter, zu zeigen: $(A+B) - M$ hat keinen insichdichten Teil $\supset \Lambda$, d. h. $(A+B) - M$ ist separiert. Nun ist

$$\begin{aligned}(A+B) - M &= (A+B) - \left((A_k)^0 + (B_k)^0\right) = \left(A - \left((A_k)^0 + (B_k)^0\right)\right) \\ &\quad + \left(B - \left((A_k)^0 + (B_k)^0\right)\right) \subseteqq (A - A_k) + (B - B_k) = A_s + B_s;\end{aligned}$$

nach **12·7·1** sind A_s und B_s separiert, nach **12·6·3** also auch $A_s + B_s$, und somit nach **12·6·2** auch $(A+B) - M$, w. z. b. w.

12·7·5. *A_k ist perfekt in A; A_s ist offen in A.*

Indem man in **12·7·4** $A = B$ setzt, erhält man $A_k = A\,(A_k)^0$, also ist A_k abgeschlossen in A, mithin $A - A_k = A_s$ offen in A; weil A_k insichdicht, ist A_k auch perfekt in A.

12·7·51. *Ist A abgeschlossen, so ist A_k perfekt.*

Dies folgt aus **12·7·5** und **10·8·11.**

Wegen **12·7·51** nennen wir, wenn A abgeschlossen, A_k auch den perfekten Kern von A.

8. **Kohärenzen, Adhärenzen.** Sei A eine beliebige Punktmenge. Wir definieren durch transfinite Induktion (§ 7, 4) die ξ-te Kohärenz (oder Kohärenz ξ-ter Ordnung) A_ξ von A mittels folgender Vorschriften:

(8) $$1.\ A_0 = A;\qquad 2.\ A_{\xi+1} = (A_\xi)_h;\qquad 3.\ A_\xi = \underset{\eta<\xi}{D}\, A_\eta,$$

wenn $\xi\ (>0)$ Grenzzahl. Hierdurch ist A_ξ für alle Ordinalzahlen ξ definiert. Die Menge $A_\xi - A_{\xi+1} = (A_\xi)_j$ heißt die ξ-te Adhärenz von A. Die Kohärenzen und Adhärenzen haben absoluten Charakter. Aus der Definition folgt unmittelbar:

(8·1) $$A_{\xi'} \subseteqq A_\xi \qquad \text{für } \xi' > \xi.$$

12·8·1. *Die ξ-te Kohärenz A_ξ ist abgeschlossen in A.*

Beweis durch transfinite Induktion (**7·4·12**). Die Behauptung ist richtig für $\xi = 0$, da $A_0 = A$. Angenommen, sie sei richtig für alle $\eta < \xi$; dann gilt sie auch für ξ: ist ξ eine isolierte Zahl, so ist $A_\xi = (A_{\xi-1})_h$, also nach **12·2·3** abgeschlossen in $A_{\xi-1}$, also nach **10·8·5** auch abgeschlossen

in A, da $A_{\xi-1}$ nach Annahme abgeschlossen in A; ist hingegen ξ eine Grenzzahl, so ist $A_\xi = \underset{\eta<\xi}{D} A_\eta$, und da hierin die A_η abgeschlossen in A, so nach 10·2·2 auch A_ξ.

Für jedes ξ gilt:

$$A = \underset{\eta<\xi}{S} (A_\eta - A_{\eta+1}) + A_\xi . \tag{8·2}$$

Denn ist $a \,\varepsilon\, A - A_\xi$, so gibt es eine kleinste Ordinalzahl μ ($\leq \xi$), so daß $a \sim\varepsilon\, A_\mu$; wegen 1. in (8) ist $\mu > 0$, und wegen 3. in (8) ist μ nicht Grenzzahl, kann also in der Form $\mu = \eta + 1$ geschrieben werden; dann aber ist $\eta < \xi$ und $a \,\varepsilon\, A_\eta - A_{\eta+1}$.

12·8·2. *Es gibt eine kleinste Ordinalzahl α, so daß $A_\xi = A_\alpha$ für $\xi \geq \alpha$.*

Sei $\aleph_\nu$ die Mächtigkeit von A; setzen wir in (8·2) $\xi = \omega_{\nu+1}$, so können nicht alle Summanden $A_\eta - A_{\eta+1} \supset A$ sein; es gibt also eine kleinste Ordinalzahl α ($< \omega_{\nu+1}$), so daß $A_\alpha - A_{\alpha+1} = A$, d. h. $A_{\alpha+1} = A_\alpha$; aus (8) folgt unmittelbar, daß dann $A_\xi = A_\alpha$ für alle $\xi \geq \alpha$.

Die Menge A_α von 12·8·2 wird als die letzte Kohärenz von A bezeichnet. Es gilt:

12·8·21. *Die letzte Kohärenz von A ist der insichdichte Kern von A.*

In der Tat, $A_{\alpha+1} = A_\alpha$ besagt: $(A_\alpha)_h = A_\alpha$, d. h. A_α ist insichdicht, also $A_\alpha \subseteqq A_k$. Bleibt zu zeigen, daß auch $A_k \subseteqq A_\alpha$, oder was wegen (8·1) dasselbe heißt: $A_k \subseteqq A_\xi$ für alle ξ. Wir zeigen dies durch transfinite Induktion: Die Behauptung ist richtig für $\xi = 0$, da $A_0 = A$; angenommen sie sei richtig für alle $\eta < \xi$; ist dann ξ eine isolierte Zahl, so ist, weil A_k insichdichter Teil von $A_{\xi-1}$ ist: $A_k \subseteqq (A_{\xi-1})_h = A_\xi$; ist hingegen ξ eine Grenzzahl, so folgt $A_k \subseteqq A_\xi$ unmittelbar aus 3. in (8).

Literatur: Der Begriff der Kohärenzen und Adhärenzen stammt von G. Cantor, Acta math. 7 (1885) S. 110. Vgl. auch C. Kuratowski, Fund. math. 3 (1922) S. 76.

9. **Ableitungen.** Die ξ-te Kohärenz von A^0 wird mit A^ξ bezeichnet, und heißt die ξ-te Ableitung von A. Für $\xi = 1$ ist dies nach § 12 (2·11) die schon in § 10, 4 mit A^1 bezeichnete Menge aller Häufungspunkte von A. Für abgeschlossene Mengen stimmt die ξ-te Ableitung mit der ξ-ten Kohärenz überein.

12·9·1. *Die ξ-te Ableitung A^ξ ist abgeschlossen.*

Nach 12.8.1 ist A^ξ abgeschlossen in A^0, und da A^0 abgeschlossen, ist A^ξ abgeschlossen nach 10·8·11.

Die letzte Kohärenz von A^0 heißt die letzte Ableitung von A. Aus 12·8·21 folgt:

12·9·2. *Die letzte Ableitung von A ist der perfekte Kern von A^0.*

Ist A^α die letzte Ableitung von A, so ist $A^\xi \supset A^{\xi+1}$ für $\xi < \alpha$, und da $A^{\xi+1} = (A^\xi)_h$, ist A^ξ nicht perfekt für $\xi < \alpha$; man kann deshalb A^α auch als die perfekte Ableitung von A bezeichnen.

Selbstverständlich kann die letzte Ableitung von A auch leer sein. Besteht z. B. A aus endlich vielen Punkten, so ist $A^1 = \Lambda$ die letzte Ableitung von A.

12·9·3. *Ist β eine Ordinalzahl $< \omega_1$ (§ 8, 3), so gibt es im Intervalle $[a, b]$ des R_1 eine abzählbare, abgeschlossene Punktmenge A, für die $A^\xi \supset \Lambda$, wenn $\xi \leq \beta$, und $A^{\beta+1} = \Lambda$.*

Wir beweisen dies durch transfinite Induktion. Die Behauptung ist richtig für $\beta = 0$. Angenommen, sie sei richtig für alle $\xi < \beta$; sei dann $((a_n))$ eine Punktfolge aus (a, b) mit $a_n < a_{n+1}$ und $a_n \to b$; ferner sei $((\beta_n))$ eine Folge von Ordinalzahlen, in der alle $\beta_n = \beta - 1$, falls β eine isolierte Zahl, hingegen $\beta_n < \beta_{n+1}$ und $\beta = \lim\limits_n \beta_n$, wenn β eine Grenzzahl > 0 (8·4·21). Nach Annahme gibt es in $[a_n, a_{n+1}]$ eine abgeschlossene Punktmenge A_n, so daß $(A_n)^\xi \supset \Lambda$ für $\xi \leq \beta_n$, $(A_n)^{\beta_n+1} = \Lambda$; für $A = \underset{n}{S}\, A_n + \{b\}$ gilt dann offenbar: $A^\beta = \{b\}$, $A^{\beta+1} = \Lambda$.

In **12·9·3** ist die Voraussetzung $\beta < \omega_1$ wesentlich, wie aus **13·2·4** folgt. Ferner werden wir in **15·3·2** sehen, daß es, wenn γ eine Grenzzahl ist, in $[a, b]$ keine Punktmenge A geben kann, für die $A^\xi \supset \Lambda$, wenn $\xi < \gamma$, $A^\gamma = \Lambda$. Wohl aber gilt:

12·9·31. *Ist γ eine Ordinalzahl $< \omega_1$, so gibt es im R_1 eine abzählbare, abgeschlossene Punktmenge A, für die $A^\xi \supset \Lambda$, wenn $\xi < \gamma$, und $A^\gamma = \Lambda$.*

Ist γ eine isolierte Zahl, so ist dies (für $\beta = \gamma - 1$) in **12·9·3** enthalten. Sei also γ eine Grenzzahl (> 0). Nach **8·4·21** gibt es eine wachsende Folge $((\gamma_n))$ von Ordinalzahlen mit $\gamma = \lim\limits_n \gamma_n$. Nach **12·9·3** gibt es im Intervalle $[n, n+1]$ eine Punktmenge A_n, so daß $(A_n)^{\gamma_n} \supset \Lambda$, $(A_n)^{\gamma_n+1} = \Lambda$. Für $A = \underset{n}{S}\, A_n$ gilt dann offenbar: $A^\xi \supset \Lambda$ für $\xi < \gamma$, $A^\gamma = \Lambda$.

Literatur: Die Ableitungen einer Punktmenge wurden eingeführt von G. Cantor, Math. Ann. 5 (1872) S. 129.

§ 13. Separable Mengen.

1. **Separable Mengen.** Sei A eine Punktmenge; wir nennen ein System $\mathfrak{H}$ nicht leerer, in A offener Mengen ein ausgezeichnetes System in A offener Mengen, wenn es in $\mathfrak{H}$ zu jedem $a \varepsilon A$ und zu jeder a enthaltenden, in A offenen Menge G eine Menge H gibt, so daß $a \varepsilon H$, $H \subseteqq G$.

13·1·1. *Ist $\mathfrak{H}$ ein ausgezeichnetes System in A offener Mengen, so ist jede in A offene Menge G Summe eines Teilsystemes von $\mathfrak{H}$.*

Denn zu jedem $a \varepsilon G$ gibt es ein $H_a \varepsilon \mathfrak{H}$, so daß $a \varepsilon H_a$, $H_a \subseteqq G$. Dann aber ist $G = \underset{a \varepsilon G}{S} H_a$, wie behauptet.

Gibt es ein abzählbares ausgezeichnetes System in A offener Mengen, so heißt A separabel. Der Begriff „separabel" hat absoluten Charakter.

13·1·2. *Jeder Teil B einer separablen Menge A ist separabel.*

Denn bilden die Mengen $A\,G_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ein ausgezeichnetes System in A offener Mengen, so bilden die nicht leeren $B\,G_n$ ein ausgezeichnetes System in B offener Mengen.

13·1·3. *Ist A separabel, so gibt es einen in A dichten abzählbaren Teil von A.*

Sei H_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ein ausgezeichnetes System in A offener Mengen, und sei $a_n \varepsilon H_n$. Ist G eine in A offene Menge $\supset \Lambda$, so gibt es ein $H_n \subseteqq G$, also auch ein $a_n \varepsilon G$, nach **11·1·3** ist also die abzählbare Menge der a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ dicht in A.

In metrischen Räumen gilt hiervon die Umkehrung:

13·1·31. *Ist A Punktmenge eines metrischen Raumes, und gibt es einen in A dichten abzählbaren Teil von A, so ist A separabel.*

Sei in der Tat die abzählbare Menge A' der Punkte a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ dicht in A. Dann bilden die abzählbar vielen Mengen $A\,K_{a_n \frac{1}{m}}$ $(m, n = 1, 2, \ldots)$ ein ausgezeichnetes System in A offener Mengen; denn ist G offen in A und $a \varepsilon G$, so gibt es nach **10·3·1** ein $\varrho > 0$, so daß $A\,K_{a\varrho} \subseteqq G$; ist dann $\frac{1}{m} < \frac{\varrho}{2}$, so gibt es, da nach **11·3·1** $a \varepsilon A'^0$, zufolge **10·5·41** ein a_n, so daß $a_n a < \frac{1}{m}$; dann aber ist $a \varepsilon K_{a_n \frac{1}{m}}$ und $K_{a_n \frac{1}{m}} \subseteqq K_{a\varrho}$, also $a \varepsilon A\,K_{a_n \frac{1}{m}}$ und $A\,K_{a_n \frac{1}{m}} \subseteqq A\,K_{a\varrho} \subseteqq G$.

13·1·32. *Der R_n ist separabel.*

Denn die abzählbare Menge der rationalen Punkte des R_n ist dicht im R_n.

13·1·321. *Der R_ω ist separabel.*

Denn offenbar ist die Menge der Punkte $((a_\nu))$ des R_ω, deren Koordinaten rational und fast alle $= 0$ sind, abzählbar und dicht im R_ω.

13·1·322. *Der R_0 ist separabel.*

Denn offenbar ist die Menge der Punkte $((k_\nu))$ des R_0, deren Koordinaten fast alle $= 1$ sind, abzählbar und dicht im R_0.

13·1·4. *Sind A und B Mengen eines metrischen Raumes, ist A separabel und dicht in B, so ist auch B separabel.*

Denn nach **13·1·3** gibt es einen abzählbaren in A dichten Teil A' von A; nach **11·3·3** ist A' auch dicht in B, also ist B separabel nach **13·1·31.**

13·1·5. *Die Summe abzählbar vieler separabler Mengen eines metrischen Raumes ist separabel.*

Ist A_n separabel, so gibt es nach **13·1·3** eine abzählbare Menge $A'_n \subseteqq A_n$, die dicht in A_n ist; dann ist auch $\underset{n}{S} A'_n$ abzählbar und nach **11·3·4** dicht in $\underset{n}{S} A_n$, also ist $\underset{n}{S} A_n$ nach **13·1·31** separabel.

Aus **13·1·5** und **13·1·2** folgt:

13·1·51. *Das System aller separ ablen Mengen eines metrischen Raumes is ein σ-Körper und ein δ-Körper.*

13·1·6. *Damit die metrische Menge A separabel sei, ist notwendig und hinreichend, daß jedes ϱ-Netz in A abzählbar sei.*

Notwendig: Sei B ein unabzählbares ϱ-Netz in A. Nach **12·2·5** ist kein echter Teil, insbesondere kein abzählbarer Teil von B dicht in B; nach **13·1·3** ist also B nicht separabel, nach **13·1·2** ist auch A nicht separabel. Hinreichend: Nach **9·7·1** gibt es für jedes n ein $\frac{1}{n}$ -Netz B_n in A; nach Annahme ist B_n abzählbar, also ist auch $C = \underset{n}{S} B_n$ abzählbar. Zu jedem $a \varepsilon A$ gibt es nun ein $b_n \varepsilon B_n$, so daß $b_n a < \frac{1}{n}$; somit gibt es zu jedem $a \varepsilon A$ und zu jedem $\varrho > 0$ ein $c \varepsilon C$, so daß $c a < \varrho$; nach **10·5·41** ist demnach $A \subseteqq C^0$, also ist nach **11·3·1** C dicht in A, also ist nach **13·1·31** A separabel.

Eine monoton abnehmende Folge $((U_{na}))$ von Umgebungen des Punktes a heißt eine sich auf a zusammenziehende Umgebungsfolge (oder: eine sich auf a zusammenziehende Folge offener Mengen), wenn für jede beliebige Umgebung U_a gilt: $U_{na} \subseteqq U_a$ für fast alle n. Nach **9·1·3** gilt für jede sich auf a zusammenziehende Umgebungsfolge: $\underset{n}{D}\, U_{na} = \{a\}$. — In einem metrischen Raume ist, wenn $((\varrho_n))$ eine monoton abnehmende Zahlenfolge mit $\varrho_n \to 0$ bedeutet, $((K_{a\varrho_n}))$ eine sich auf a zusammenziehende Umgebungsfolge.

13·1·7. *Ist der Raum E separabel, so gibt es zu jedem $a \varepsilon E$ eine sich auf a zusammenziehende Umgebungsfolge.*

Sei $\mathfrak{H}$ ein abzählbares ausgezeichnetes System in E offener Mengen, und seien $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ die a enthaltenden Mengen aus $\mathfrak{H}$. Wir setzen $U_{na} = H_1 H_2 \ldots H_n$; dann ist $U_{n+1\,a} \subseteqq U_{na}$; sei ferner U_a eine beliebige Umgebung von a; dann gibt es unter den H_n eines, etwa $H_{\bar{n}}$, so daß $H_{\bar{n}} \subseteqq U_a$; dann aber ist $U_{na} \subseteqq U_a$ für $n \geq \bar{n}$; also ist $((U_{na}))$ eine sich auf a zusammenziehende Umgebungsfolge.

13·1·71. *Ist A separabel und $a \varepsilon A^1$, so gibt es ein $B \subseteqq A$, so daß $B^1 = \{a\}$.*

Nach **13·1·7** (angewendet auf den Raum A) gibt es eine sich auf a zusammenziehende Folge $((G_n))$ in A offener Mengen. Da $a \varepsilon A^1$, gibt es in G_n ein $a_n \neq a$; die Menge der a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ heiße B. Ist U_a eine Umgebung von a, so ist $G_n \subseteqq U_a$ für fast alle n, also $a_n \varepsilon U_a$ für fast alle n, und da wegen $\underset{n}{D}\, G_n = \{a\}$ nicht unendlich viele a_n zusammenfallen können, ist $a \varepsilon B^1$. Ist $b \neq a$, so gibt es Umgebungen U_a, U_b, so daß $U_a\, U_b = \Lambda$; da $a_n \varepsilon U_a$ für fast alle n, ist $b \sim\varepsilon B^1$. Es ist also $a \varepsilon B^1$, und $b \sim\varepsilon B^1$ für $b \neq a$, d. h. es ist $B^1 = \{a\}$.

13·1·8. *Jede separable insichdichte Menge A (jede insichdichte Menge A eines metrischen Raumes) enthält einen abzählbaren insichdichten Teil.*

Sei $a \varepsilon A$; nach **13·1·7** gibt es eine sich auf a zusammenziehende Umgebungsfolge U_{n_1} $(n_1 = 1, 2, \ldots)$; da A insichdicht gibt es in $A\, U_{n_1}$ ein $a_{n_1} \neq a$. Zu jedem dieser Punkte a_{n_1} gibt es wieder eine sich auf a_{n_1} zusammenziehende Umgebungsfolge $U_{n_1 n_2}$ $(n_2 = 1, 2, \ldots)$ und in $A\, U_{n_1 n_2}$ einen Punkt $a_{n_1 n_2} \neq a_{n_1}$ u. s. f. Die Menge aller so gebildeten Punkte $a_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ ist ein abzählbarer insichdichter Teil von A.

Literatur: Der Begriff der separablen Menge wurde eingeführt von M. Fréchet, Rend. Pal. 22 (1906) S. 23; vgl. auch W. Sierpiński, Fund. math. 2 (1921) S. 178 und C. Kuratowski, Fund. math. 3 (1922) S. 41.

2. **Mächtigkeitssätze.** Für die Mächtigkeit einer separablen Menge gilt:

13·2·1. *Eine separable Menge A hat höchstens die Mächtigkeit $\aleph$.*

Sei $a \varepsilon A$, $b \varepsilon A$, $a \neq b$; nach **9·1·2** gibt es eine offene Menge G, so daß $a \varepsilon G$, $b \sim\varepsilon G$; in einem ausgezeichneten Systeme $\mathfrak{H}$ in A offener Mengen gibt es also ein H, so daß $a \varepsilon H$, $b \sim\varepsilon H$. Der Durchschnitt des Systemes $\mathfrak{H}_a$ aller a enthaltenden Mengen aus $\mathfrak{H}$ ist also $\{a\}$. Aus $a \neq b$ folgt daher $\mathfrak{H}_a \neq \mathfrak{H}_b$. Nach **5·2·1** gibt es aber, wenn $\mathfrak{H}$ abzählbar, höchstens $\aleph$ Teilsysteme von $\mathfrak{H}$, daher gibt es auch höchstens $\aleph$ Punkte von A.

In Verallgemeinerung von **5·1·42** zeigen wir nun:

13·2·2. *Ist A separabel, so ist jedes disjunkte System $\mathfrak{S}$ in A offener Mengen abzählbar.*

Sei $\mathfrak{H}$ ein abzählbares ausgezeichnetes System in A offener Mengen. Zu jedem nicht leeren $G \varepsilon \mathfrak{S}$ gibt es ein $H_G \varepsilon \mathfrak{H}$, so daß $H_G \subseteqq G$; da je zwei G fremd, folgt aus $G \neq G'$ auch $H_G \neq H_{G'}$; da es nur abzählbar viele $H \varepsilon \mathfrak{H}$ gibt, so auch nur abzählbar viele $G \varepsilon \mathfrak{S}$.

Ein Mengensystem $\mathfrak{M}$ heiße monoton, wenn zwischen je zwei verschiedenen Mengen $A \varepsilon \mathfrak{M}$ und $B \varepsilon \mathfrak{M}$ eine der beiden Relationen $A \subset B$ oder $B \subset A$ besteht. Das monotone Mengensystem $\mathfrak{M}$ heißt aufsteigend

(absteigend) wohlgeordnet, falls die durch die Festsetzung: „$A \prec B$, wenn $A \subset B$ (bzw. wenn $A \supset B$)“ definierte Ordnung von $\mathfrak{M}$ eine Wohlordnung ist.

13·2·3. *Ist A separabel, so ist jedes aufsteigend (absteigend) wohlgeordnete System in A offener Mengen abzählbar.*

Sei $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ ein ausgezeichnetes System in A offener Mengen und G_ξ ($\xi < \alpha$) ein aufsteigend wohlgeordnetes System in A offener Mengen. Nach Annahme ist $G_{\xi+1} - G_\xi \supset A$ (für $\xi + 1 < \alpha$). Nach **13·1·1** gibt es also ein n_ξ, so daß $H_{n_\xi} \subseteqq G_{\xi+1}$, aber nicht $H_{n_\xi} \subseteqq G_\xi$; verschiedenen G_ξ sind so verschiedene H_{n_ξ} zugeordnet; da es aber nur abzählbar viele H_n gibt, kann es auch nur abzählbar viele G_ξ geben.

Durch Komplementbildung folgt aus **13·2·3**:

13·2·31. *Ist A separabel, so ist jedes absteigend (aufsteigend) wohlgeordnete System in A abgeschlossener Mengen abzählbar.*

Wegen **12·8·1** folgt daraus:

13·2·4. *Ist A separabel und A_α die letzte Kohärenz von A, so ist $\alpha < \omega_1$.*

13·2·5. *In einem separablen unendlichen Raume E gibt es $\aleph$ offene Mengen.*

Sei $\mathfrak{H}$ ein abzählbares ausgezeichnetes System in E offener Mengen. Da $\mathfrak{H}$ nach **5·2·1** $\aleph$ Teilsysteme hat, gibt es nach **13·1·1** in E höchstens $\aleph$ offene Mengen. Andererseits gibt es nach **12·3·3** in E eine unendliche isolierte Punktmenge; diese enthält nach **5·1·5** einen Teil A der Mächtigkeit $\aleph_0$, der nach **12·3·1** gleichfalls isoliert ist. Sei $B \subseteqq A$; setzen wir $G_B = E - B^0$, so ist G_B offen, und weil A isoliert, also $(A - B)\, B^0 = A$ ist: $A - B \subseteqq G_B$, d. h. $A - B = (A - B) G_B$; da $B G_B = A$, ist also $A - B = A G_B$; daraus folgt, daß verschiedenen Teilen B von A verschiedene G_B zugeordnet sind; und da es nach **5·2·1** $\aleph$ verschiedene Teile B von A gibt, gibt es also auch mindestens $\aleph$ offene Mengen.

Da die offenen und abgeschlossenen Mengen Komplemente voneinander sind, folgt aus **13·2·5**:

13·2·51. *In einem separablen unendlichen Raume gibt es $\aleph$ abgeschlossene Mengen.*

Literatur zu **13·2·3**, **13·2·31**: F. Hausdorff, Mengenlehre S. 170, 171; A. Denjoy, C. R. 192 (1931) S. 1011; A. Lindenbaum, C. R. 192 (1931) S. 1511.

3. **Überdeckungssatz.** Wir nennen ein System in A offener Mengen, deren Summe A ist, ein A überdeckendes System, oder ein Überdeckungssystem von A.

13·3·1. *Ist A separabel, so gibt es in jedem A überdeckenden System $\mathfrak{B}$ ein A überdeckendes abzählbares Teilsystem.*

Sei $\mathfrak{H}$ ein abzählbares ausgezeichnetes System in A offener Mengen. Zu jedem $a \varepsilon A$ gibt es ein $G \varepsilon \mathfrak{B}$, so daß $a \varepsilon G$; sodann gibt es zu diesem G ein $H \varepsilon \mathfrak{H}$, so daß $a \varepsilon H$, $H \subseteqq G$. Bezeichnen wir die sämtlichen so den Punkten von a zugeordneten $H \varepsilon \mathfrak{H}$ mit $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$, so ist $A = \underset{n}{S} H_n$; jedes dieser H_n aber war Teil eines $G_n \varepsilon \mathfrak{B}$; also ist erst recht $A = \underset{n}{S} G_n$; diese G_n bilden also ein abzählbares, A überdeckendes Teilsystem von $\mathfrak{B}$.

In metrischen Räumen gilt hiervon auch die Umkehrung:

13·3·11. *Damit die metrische Menge A separabel sei, ist notwendig und hinreichend, daß es in jedem A überdeckenden Systeme $\mathfrak{B}$ ein A überdeckendes abzählbares Teilsystem gebe.*

Notwendig: Dies ist enthalten in **13·3·1.** Hinreichend: Das System $\mathfrak{G}_n$ der Mengen $A\, K_{a\,\frac{1}{n}}$ $(a \varepsilon A)$ ist ein Überdeckungssystem von A; nach Voraussetzung gibt es in $\mathfrak{G}_n$ ein A überdeckendes abzählbares Teilsystem $A\, K_{a_\nu \frac{1}{n}}$ $(\nu = 1, 2 \ldots)$; sei C_n die Menge der Punkte a_ν $(\nu = 1, 2 \ldots)$. Dann ist $C = \underset{n}{S} C_n$ ein abzählbarer Teil von A. Da es zu jedem $a \varepsilon A$ und jedem n ein $c \varepsilon C$ mit $ac < \frac{1}{n}$ gibt, ist (vgl. den Beweis von **13·1·6**) C dicht in A; also ist A separabel nach **13·1·31.**

13·3·2. *Ist A separabel und $\mathfrak{F}$ ein System in A abgeschlossener Mengen, von denen je abzählbar viele einen Punkt gemein haben, so haben alle $F \varepsilon \mathfrak{F}$ einen Punkt gemein.*

Denn bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}$ das System der (in A offenen) Komplemente $A - F$ $(F \varepsilon \mathfrak{F})$, so besagt **13·3·2**: gibt es in $\mathfrak{B}$ kein abzählbares, A überdeckendes Teilsystem, so ist auch $\mathfrak{B}$ kein A überdeckendes System. Das aber ist gleichbedeutend mit **13·3·1.**

Literatur: Der Überdeckungssatz **13·3·1** geht zurück auf E. Lindelöf, C. R. 137 (1903) S. 697 und W. H. Young, Lond. Proc. 35 (1903) S. 384.

4. **Verdichtungspunkte.** Der Punkt a heißt Verdichtungspunkt von A, wenn zu jeder Umgebung U_a unabzählbar viele Punkte von A gehören. Ganz wie **10·4·1** beweist man:

13·4·1. *Ist A Menge eines metrischen Raumes, so ist, damit a Verdichtungspunkt von A sei, notwendig und hinreichend, daß für jedes $\varrho > 0$ zu $K_{a\varrho}$ unabzählbar viele Punkte von A gehören.*

Ganz wie **10·4·3** beweist man:

13·4·2. *Ist a Verdichtungspunkt von A und gibt es eine Umgebung U_{1a} von a, so daß $A\,U_{1a} \subseteqq B$, so ist a auch Verdichtungspunkt von B.*

Wir bezeichnen die Menge aller Verdichtungspunkte von A mit A^*. Es ist $A^* \subseteqq A^1$. Aus **13·4·2** folgt:

13·4·3. *Ist $A \subseteqq B$, so $A^* \subseteqq B^*$.*

13·4·4. $$(A + B)^* = A^* + B^*.$$

Wegen **13·4·3** ist $A^* \subseteqq (A + B)^*$, $B^* \subseteqq (A + B)^*$, also auch $A^* + B^* \subseteqq (A + B)^*$. Bleibt zu beweisen, daß auch $(A + B)^* \subseteqq A^* + B^*$. Sei $a \sim\varepsilon\, (A^* + B^*)$; dann gibt es Umgebungen U_{1a}, U_{2a}, so daß $A\,U_{1a}$, $B\,U_{2a}$ abzählbar; dann ist $U_a = U_{1a}\,U_{2a}$ eine Umgebung von a, für die $(A + B)\,U_a$ abzählbar; aus $a \sim\varepsilon\, (A^* + B^*)$ folgt also $a \sim\varepsilon\, (A + B)^*$, d. h. es ist $(A + B)^* \subseteqq A^* + B^*$, w. z. b. w.

13·4·5. *Bei beliebigem A ist A^* abgeschlossen.*

Sei $a\,\varepsilon\, (A^*)^1$; in jeder Umgebung U_a liegt dann ein $b\,\varepsilon\, A^*$, und da U_a auch eine Umgebung U_b ist, liegen in U_a unabzählbar viele Punkte von A, d. h. $a\,\varepsilon\, A^*$. Aus $a\,\varepsilon\, (A^*)^1$ folgt also $a\,\varepsilon\, A^*$, d. h. es ist $(A^*)^1 \subseteqq A^*$, also ist nach **10·5·61** A^* abgeschlossen.

5. **Verdichteter, unverdichteter Teil.** Wir setzen nun:

(5) $$A_v = A\,A^*, \qquad A_u = A - A_v.$$

Daraus folgt:

(5·1) $$A = A_u + A_v \qquad (A_u\,A_v = \Lambda).$$

A_v (d. i. die Menge aller zu A gehörigen Verdichtungspunkte von A) und A_u haben, im Gegensatze zu A^*, absoluten Charakter. Wir nennen A_v den verdichteten, A_u den unverdichteten Teil von A. Ist A abgeschlossen, so ist wegen $A^* \subseteqq A^1$ nach **10·5·61** $A^* \subseteqq A$, also nach (5): $A_v = A^*$.

Aus **13·4·3** folgt:

13·5·1. *Ist $A \subseteqq B$, so ist $A_v \subseteqq B_v$, $A\,B_u \subseteqq A_u$.*

Ganz wie **12·2·2** beweist man:

13·5·2. $$(A + B)_v = (A + B)\,(A^* + B^*);$$
$$(A + B)_u = (A + B) - (A^* + B^*).$$

Wegen (5) folgt aus **13·4·5**:

13·5·3. *A_v ist abgeschlossen in A; A_u ist offen in A.*

Die Menge A heißt unverdichtet, wenn $A_v = \Lambda$, $A = A_u$; sie heißt verdichtet, wenn $A_u = \Lambda$, $A = A_v$. Wegen $A_v \subseteqq A^* \subseteqq A^1$ ist jede verdichtete Menge insichdicht.

13·5·4. *Ist A separabel, so ist A_u abzählbar.*

In der Tat, zu jedem $a \varepsilon A_u$ gibt es ein U_a, so daß $A\, U_a$, und somit auch $A_u\, U_a$ abzählbar. Diese $A_u\, U_a$ bilden ein A_u überdeckendes System. Wegen **13·1·2** ist auch A_u separabel, also gibt es nach **13·3·1** unter unseren $A_u\, U_a$ abzählbar viele, die ein A_u überdeckendes System bilden; also ist A_u Summe abzählbar vieler abzählbarer Mengen, mithin abzählbar.

Offenbar ist jede abzählbare Menge unverdichtet. Hiervon gilt folgende Umkehrung:

13·5·41. *Jede separable unverdichtete Menge ist abzählbar.*

Denn ist A unverdichtet, so ist $A_u = A$, und die Behauptung folgt aus **13·5·4.**

Eine andere Formulierung von **13·5·41** lautet:

13·5·42. *Ist die separable Menge A unabzählbar, so ist $A_v \supset A$.*

13·5·5. *Damit die Menge A eines metrischen Raumes separabel sei, ist notwendig und hinreichend, daß für jeden unabzählbaren Teil B von A gelte: $B^1 \supset A$.*

Notwendig: Nach **13·1·2** ist B separabel, also nach **13·5·42**: $B_v \supset A$, also auch $B^1 \supset A$. Hinreichend: Ist B ein ϱ-Netz in A, so ist nach **10·4·7** $B^1 = A$; also kann nach Annahme kein ϱ-Netz in A unabzählbar sein; nach **13·1·6** ist also A separabel.

13·5·6. *Ist A separabel, so ist A_v verdichtet: $A_{vv} = A_v$.*

In der Tat, nach (5·1) und **13·5·2** ist $A_v = (A_u + A_v)\left((A_u)^* + (A_v)^*\right)$, also, da nach **13·5·4** $(A_u)^* = A$ ist: $A_v = (A_u + A_v)\,(A_v)^*$; da aber wegen **13·4·3** $(A_v)^* \subseteqq A^*$, und da $A_u\, A^* = A$, ist $A_u\,(A_v)^* = A$; wir haben also weiter: $A_v = A_v\,(A_v)^*$, somit nach (5): $A_v = A_{vv}$.

Da jede verdichtete Menge insichdicht ist, folgt aus **13·5·6** und **13·5·3**:

13·5·61. *Ist A separabel, so ist A_v perfekt in A.*

13·5·7. *Ist A separabel, so ist $(A_v)^* = A^*$.*

Denn nach (5·1) und **13·4·4** ist $A^* = (A_u)^* + (A_v)^*$, und nach **13·5·4** ist hierin $(A_u)^* = A$.

13·5·71. *Ist A separabel, so ist $(A^*)^* = A^*$.*

Denn wegen **13·5·7** und $A_v \subseteqq A^*$ ist nach **13·4·3**: $A^* = (A_v)^* \subseteqq A^{**}$. Umgekehrt ist $A^{**} \subseteqq (A^*)^1$, also, weil nach **13·4·5** $(A^*)^1 \subseteqq A^*$, auch $A^{**} \subseteqq A^*$.

In Ergänzung von **13·4·5** folgt nun:

13·5·72. *Ist A separabel, so ist A^* perfekt.*

Denn nach **13·4·5** ist A^* abgeschlossen, nach **13·5·71** verdichtet, also insichdicht.

Greifen wir zurück auf die Zerlegung § 12 (7), so erhalten wir:

13·5·8. *Ist A separabel, so ist A_s abzählbar.*

Denn nach **13·5·6** ist A_v insichdicht, also $A_v \subseteqq A_k$, also $A_u \supseteqq A_s$; wegen **13·5·4** ist also A_s abzählbar.

Aus **13·1·2** folgt nun:

13·5·81. *In einem separablen Raume ist jede separierte Menge abzählbar.*

Aus § 12 (7·1) folgt nun unmittelbar:

13·5·9. *Ist A separabel, so ist A_j abzählbar.*

13·5·91. *In einem separablen Raume ist jede isolierte Menge abzählbar.*

Literatur: Die Sätze dieser Nummer gehen großenteils zurück auf E. Lindelöf, Acta math. 29 (1905) S. 183.

§ 14. Reguläre und normale Räume.

1. **Abgesonderte Mengen.** Zwei Mengen A und B eines topologischen Raumes heißen abgesondert, wenn keine einen Punkt oder Häufungspunkt der anderen enthält, d. h. wenn:

(1) $$A\,B^0 + B\,A^0 = \Lambda\,.$$

Der Begriff „abgesondert" hat absoluten Charakter: sind A und B in einem topologischen Raum abgesondert, so in jedem, der sie beide enthält, insbesondere in ihrer Summe $A + B$. Die leere Menge ist von jeder abgesondert. Die Halbgeraden $x > a$ und $x < a$ des R_1 sind abgesondert, die Halbgeraden $x \geq a$ und $x < a$ nicht. Zwei abgesonderte Mengen sind auch fremd.

14·1·1. *Damit zwei fremde Mengen A und B abgesondert seien, ist notwendig und hinreichend, daß A (und B) in $A + B$ sowohl offen als abgeschlossen sei.*

Notwendig: Aus $A\,B^0 = \Lambda$, $B\,A^0 = \Lambda$ folgt: $A = A^0\,(A + B)$, $B = B^0\,(A + B)$; also sind A und B nach **10·8·1** abgeschlossen in $A + B$; also sind die Komplemente $A = (A + B) - B$, $B = (A + B) - A$ offen in $A + B$. Hinreichend: Da A abgeschlossen in $A + B$, so ist nach **10·8·3** $A = A^0\,(A + B) = A^0\,A + A^0\,B = A + A^0\,B$; also ist $A^0\,B \subseteqq A$, und da auch $A^0\,B \subseteqq B$, ist $A^0\,B \subseteqq A\,B$, und da $A\,B = \Lambda$, ist auch $A^0\,B = \Lambda$. Da A offen in $A + B$, ist B abgeschlossen in $A + B$, und man erhält ebenso $B^0\,A = \Lambda$. Also gilt (1), w. z. b. w.

Mit **14·1·1** ist gleichbedeutend:

14·1·11. *Damit zwei fremde Mengen A und B abgesondert seien, ist notwendig und hinreichend, daß sowohl A als B offen (oder abgeschlossen) in $A + B$ sei.*

Daraus folgt nach **10·8·51**:

14·1·2. *Zwei fremde offene (abgeschlossene) Mengen A, B sind abgesondert.*

Aus der Definition folgt unmittelbar:

14·1·3. *Sind A und B abgesondert, und ist $A' \subseteqq A$, $B' \subseteqq B$, so sind auch A' und B' abgesondert.*

14·1·4. *Sind sowohl A_1 und B, als auch A_2 und B abgesondert, so auch $A_1 + A_2$ und B.*

2. **Reguläre, normale Räume.** Wir sagen: die beiden fremden Mengen A und B sind durch offene Mengen trennbar, wenn es zwei fremde offene Mengen G, G' gibt, so daß $A \subseteqq G$, $B \subseteqq G'$. Nach Axiom 5_t) (§ 9, 1) sind zwei fremde Mengen $\{a\}$ und $\{b\}$ durch offene Mengen trennbar. Ein topologischer Raum heißt regulär, wenn in ihm jede Menge $\{a\}$ von jeder zu $\{a\}$ fremden abgeschlossenen Menge durch offene Mengen trennbar ist; er heißt normal, wenn je zwei fremde abgeschlossene Mengen durch offene Mengen trennbar sind. Da jede Menge $\{a\}$ abgeschlossen ist, gilt:

14·2·1. *Jeder normale Raum ist regulär.*

Mit der Umkehrung dieses Satzes, die nicht allgemein gilt, werden wir uns in **14·2·31** befassen.

14·2·11. *Jeder abgeschlossene Teil C eines regulären (normalen) Raumes E ist regulär (normal).*

Sei B abgeschlossen in C und $a \varepsilon C - B$; nach **10·8·11** ist B auch abgeschlossen in E, und da E regulär, gibt es in E offene Mengen G, G', so daß $a \varepsilon G$, $B \subseteqq G'$, $GG' = \Lambda$. Dann sind CG, CG' offen in C, es ist $a \varepsilon CG$, $B \subseteqq CG'$, $(CG)(CG') = \Lambda$; d. h. auch C ist ein regulärer Raum.

Wir schreiben im folgenden:

(2) $$A \Subset B, \quad \text{wenn } A^0 \subseteqq B.$$

Aus $A \Subset B$ folgt $A \subseteqq B$. Aus $A' \subseteqq A \Subset B \subseteqq B'$ folgt $A' \Subset B'$.

14·2·2. *Damit der Raum E regulär sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem $a \varepsilon E$ und jeder Umgebung U_a eine Umgebung U_a^* gebe, so daß $U_a^* \Subset U_a$.*

Notwendig: Ist E regulär, so ist $\{a\}$ von der abgeschlossenen Menge $-U_a$ durch offene Mengen trennbar; d. h. es gibt offene Mengen G^*, G^{**}, so daß $\{a\} \subseteqq G^*$, $-U_a \subseteqq G^{**}$, $G^* G^{**} = \Lambda$. Dann ist $G^* \subseteqq -G^{**}$, und da $-G^{**}$ abgeschlossen, ist nach **10·5·1** auch $(G^*)^0 \subseteqq -G^{**}$, also $(G^*)^0 - U_a = \Lambda$, also $(G^*)^0 \subseteqq U_a$. Wir können also $U_a^* = G^*$ setzen. Hinreichend: Ist B abgeschlossen und $\{a\} B = \Lambda$, so ist $-B$ eine Umgebung U_a; nach Annahme gibt es ein $U_a^* \Subset U_a$; dann ist $-(U_a^*)^0$ eine offene Menge $\supseteqq B$,

und da $U_a^* - (U_a^*)^0 = \Lambda$, sind $\{a\}$ und B durch die offenen Mengen U_a^* und $-(U_a^*)^0$ getrennt.

Indem man hierin $\{a\}$ durch eine abgeschlossene Menge A und U_a durch eine offene Menge $G \supseteqq A$ ersetzt, beweist man ganz ebenso:

14·2·21. *Damit der Raum E normal sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteqq E$ und jeder offenen Menge $G \supseteqq A$ eine offene Menge $G^* \supseteqq A$ gebe, so daß $G^* \Subset G$.*

14·2·3. *Ist der Raum E separabel und regulär, so sind je zwei abgesonderte Mengen A und B durch offene Mengen trennbar.*

Sei $\mathfrak{H}$ ein abzählbares ausgezeichnetes System in E offener Mengen. Da $A\,B^0 = \Lambda$, ist $-B^0$ für jedes $a \varepsilon A$ eine Umgebung U_a; also gibt es nach 14·2·2 zu jedem $a \varepsilon A$ eine Umgebung $U_a^* \Subset -B^0$; sodann gibt es ein $H_a \varepsilon \mathfrak{H}$, so daß $a \varepsilon H_a$, $H_a \subseteqq U_a^*$; somit ist auch $H_a \Subset -B^0$. Ebenso gibt es zu jedem $b \varepsilon B$ ein $H_b \varepsilon \mathfrak{H}$, so daß $b \varepsilon H_b$, $H_b \Subset -A^0$. Da $\mathfrak{H}$ abzählbar, gibt es nur abzählbar viele verschiedene H_a, etwa $H_1, H_2, \ldots$, und ebenso nur abzählbar viele verschiedene H_b, etwa $H_1', H_2', \ldots$ Wir setzen: $G_1 = H_1$, $G_1' = H_1' - G_1^0$, allgemein: $G_n = H_n - (G_1'^0 + G_2'^0 + \ldots + G_{n-1}'^0)$, $G_n' = H_n' - (G_1^0 + G_2^0 + \ldots + G_n^0)$. Dann sind alle G_n, G_n' offen, also auch $G = \underset{n}{S}\, G_n$, $G' = \underset{n}{S}\, G_n'$. Wegen $H_i' \Subset -A^0$ ist $H_i'^0 A = \Lambda$, also auch $G_i'^0 A = \Lambda$, und ebenso ist $G_i^0 B = \Lambda$; ist also $H_n = H_a$ $(a \varepsilon A)$, so ist wegen $a \varepsilon H_n$ auch $a \varepsilon G_n$, also ist $A \subseteqq G$, und ebenso $B \subseteqq G'$; und da offenbar jedes G_i fremd zu jedem G_j', ist $G\,G' = \Lambda$, d. h. A und B sind durch die offenen Mengen G, G' getrennt.

Da nach 14·1·2 zwei fremde abgeschlossene Mengen abgesondert sind, ist in 14·2·3 enthalten:

14·2·31. *Jeder separable reguläre Raum ist normal.*

14·2·4. *In einem metrischen Raume E sind je zwei abgesonderte Mengen A und B durch offene Mengen trennbar.*

Dies bedarf eines Beweises nur, wenn $A \supset \Lambda$, $B \supset \Lambda$. Wir setzen $G = [\not{x} A < \not{x} B]$; dann ist $G = \underset{r>0}{S}\, [\not{x} A < r]\,[\not{x} B > r]$ (wo r alle positiven rationalen Zahlen durchläuft); da $[\not{x} A < r]$ und $[\not{x} B > r]$ nach 9·4·1 und 9·4·2 offen sind, so ist nach 10·1·1, 10·1·2 auch G offen. Für alle $a \varepsilon A$ ist $a\,A = 0$ und (wegen $A\,B^0 = \Lambda$ zufolge 10·5·5) $a\,B > 0$; für alle $a \varepsilon A$ gilt also $a \varepsilon G$, d. h. es ist $A \subseteqq G$. Ebenso sieht man: die Menge $G' = [\not{x} B < \not{x} A]$ ist offen, und es ist $B \subseteqq G'$. Da $G\,G' = \Lambda$, ist 14·2·4 bewiesen.

Wegen 14·1·2 ist in 14·2·4 enthalten:

14·2·41. *Jeder metrische Raum ist normal.*

14·2·5. *Ist A eine abgeschlossene, B eine offene Menge eines normalen Raumes und $A \subseteqq B$, so gibt es zu jedem reellen x aus $[0, 1]$ eine offene Menge G_x, so daß $A \subseteqq G_0$, $B = G_1$ und $G_{x'} \Subset G_{x''}$ für $0 \leq x' < x'' \leq 1$.*

Wir setzen $B = G_1$. Nach **14·2·21** gibt es ein offenes G_0, so daß $A \subseteqq G_0 \Subset G_1$. Dann ist $G_0^0 \subseteqq G_1$, also gibt es nach **14·2·21** ein offenes $G_{\frac{1}{2}}$, so daß $G_0^0 \subseteqq G_{\frac{1}{2}} \Subset G_1$, d. h. $G_0 \Subset G_{\frac{1}{2}} \Subset G_1$. Ebenso gibt es offene Mengen $G_{\frac{1}{4}}$, $G_{\frac{3}{4}}$, so daß $G_0 \Subset G_{\frac{1}{4}} \Subset G_{\frac{1}{2}} \Subset G_{\frac{3}{4}} \Subset G_1$ usf. Wir erhalten so zu jedem endlichen Dualbruch r aus $[0, 1]$ eine offene Menge G_r, so daß aus $r' < r''$ folgt $G_{r'} \Subset G_{r''}$; für jeden endlichen Dualbruch x aus $[0, 1]$ ist dann:

$$G_x = \underset{0 \leqq r \leqq x}{S} G_r \quad (r \text{ durchläuft die endlichen Dualbrüche}), \tag{2·1}$$

und für alle übrigen x definieren wir G_x durch (2·1). Sei nun $0 \leq x' < x'' \leq 1$; dann gibt es zwei endliche Dualbrüche r', r'', so daß $x' < r' < r'' < x''$; wegen $G_{x'} \subseteqq G_{r'} \Subset G_{r''} \subseteqq G_{x''}$ ist dann auch $G_{x'} \Subset G_{x''}$. Damit ist **14·2·5** bewiesen.

14·2·6. *In einem separablen und regulären unendlichen Raume E gibt es $\aleph$ Stücke.*

Sei wie beim Beweise von **13·2·5** A ein isolierter Teil von E der Mächtigkeit $\aleph_0$ und $B \subseteqq A$; da A isoliert, sind B und $A - B$ abgesondert. Nach **14·2·3** gibt es offene Mengen G_B, G'_B, so daß $B \subseteqq G_B$, $A - B \subseteqq G'_B$, $G_B G'_B = \Lambda$; es ist also $-G'_B$ eine abgeschlossene Menge $\supseteqq G_B$, somit nach **10·5·1** $G_B^0 \subseteqq -G'_B$, also $G_B^0 (A - B) = \Lambda$; und da $B \subseteqq G_B^0$, also $B = A G_B^0$, gehören zu verschiedenen B auch verschiedene G_B^0. Da es nach **5·2·1** $\aleph$ verschiedene Teile B von A gibt, gibt es also auch $\aleph$ verschiedene G_B^0, also m i n d e s t e n s $\aleph$ verschiedene Stücke. Und nach **13·2·51** gibt es h ö c h s t e n s $\aleph$ verschiedene Stücke.

14·2·61. *In einem separablen und regulären Raume E, dessen insichdichter Kern $E_k \supset \Lambda$ ist, gibt es $\aleph$ perfekte Mengen.*

Nach **12·7·5** ist E_k perfekt, also abgeschlossen, also nach **14·2·11** regulär, und nach **13·1·2** ist E_k separabel; nach **14·2·6** gibt es also $\aleph$ Stücke in E_k, und nach **12·5·2** ist jedes Stück in E_k perfekt.

Literatur: L. Vietoris, Monatsh. f. Math. u. Phys. 31 (1921) S. 190; H. Tietze, Math. Ann. 88 (1923) S. 290; P. Alexandroff u. P. Urysohn, Math. Ann. 92 (1924) S. 275; A. Tichonoff, Math. Ann. 95 (1926) S. 139. Ein allgemeiner Trennungssatz: K. Menger, Ergebn. e. math. Koll. 1 (1931) S. 16.

3. Metrisierung. Sei nun im topologischen Raume E eine reelle Funktion $f(a)$ definiert, d. h. jedem $a \varepsilon E$ sei eine (endliche) reelle Zahl $f(a)$ zugeordnet. Eine solche Funktion heißt s t e t i g im Punkte a, wenn es

zu jedem $\delta > 0$ eine Umgebung U_a gibt, so daß $|f(a') - f(a)| < \delta$ für alle $a' \varepsilon U_a$; ist die Funktion stetig in jedem Punkte $a \varepsilon E$, so heißt sie stetig auf E.

14·3·1. *Sind G und G' zwei offene Mengen des normalen Raumes E, und ist $G \Subset G'$, so gibt es eine auf E stetige, der Ungleichung $0 \leq f(a) \leq 1$ genügende reelle Funktion $f(a)$, so daß $f(a) = 0$ für $a \varepsilon G$, $f(a) = 1$ für $a \varepsilon (-G')$.*

Wegen $G \Subset G'$ ist $G^0 \subseteqq G'$, es gibt also nach **14·2·5** zu jedem $x \varepsilon [0, 1]$ eine offene Menge G_x, so daß $G \subseteqq G^0 \subseteqq G_0$, $G' = G_1$, $G_{x'} \Subset G_{x''}$ für $0 \leq x' < x'' \leq 1$; wir setzen noch $G_x = \Lambda$ für $x < 0$, $G_x = E$ für $x > 1$, so daß nun G_x für alle reellen x definiert ist. Sei $a \varepsilon E$; wir bezeichnen mit $f(a)$ das Infimum aller x, für die $a \varepsilon G_x$; dann ist $0 \leq f(a) \leq 1$; weil $G \subseteqq G_0$, ist $f(a) = 0$ für $a \varepsilon G$, und weil $G' = G_1$, also $G_x \subseteqq G'$ für $x \leq 1$, ist $f(a) = 1$ für $a \varepsilon (-G')$. Es ist noch zu zeigen, daß f stetig auf E ist. Sei $a \varepsilon E$ und $\delta > 0$; sei ferner: $f(a) - \delta < x_0 < x_1 < f(a) < x_2 < f(a) + \delta$; dann ist $a \varepsilon G_{x_2}$, $a \sim\varepsilon G_{x_1}$, und mithin, wegen $G_{x_0} \Subset G_{x_1}$, auch $a \sim\varepsilon G^0_{x_0}$: also ist $a \varepsilon G_{x_2} - G^0_{x_0}$, und da $G_{x_2} - G^0_{x_0}$ offen, ist $G_{x_2} - G^0_{x_0}$ eine Umgebung U_a; für alle $a' \varepsilon G_{x_2} - G^0_{x_0}$ aber ist $x_0 \leq f(a') \leq x_2$, also $f(a) - \delta < f(a') < f(a) + \delta$, also $|f(a') - f(a)| < \delta$, w. z. b. w.

Sei nun E ein separabler und regulärer, also nach **14·2·31** auch normaler Raum; wir wollen zeigen, daß es eine mit E homöomorphe (§ 9, 1) Punktmenge des R_ω (§ 9, 3) gibt. Sei $\mathfrak{H}$ ein abzählbares ausgezeichnetes System in E offener Mengen $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ Nach **5·1·2** ist auch die Menge der Paare $(H_n, H_{n'})$ abzählbar, also auch die Menge der Paare $(H_n, H_{n'})$ mit $H_n \Subset H_{n'}$; seien $P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots$ diese Paare. Ist P_ν etwa das Paar $(H_n, H_{n'})$, so gibt es nach **14·3·1** eine auf E stetige, der Ungleichung $0 \leq f_\nu(a) \leq 1$ genügende Funktion $f_\nu(a)$, so daß $f_\nu(a) = 0$ für $a \varepsilon H_n$, $f_\nu(a) = 1$ für $a \varepsilon (-H_{n'})$. Wir bilden nun zu jedem $a \varepsilon E$ die Zahlenfolge

$$(3) \qquad a_\nu = \frac{1}{\nu} f_\nu(a) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Wegen $0 \leq a_\nu \leq \frac{1}{\nu}$ hat sie endliche Quadratsumme, also ist $((a_\nu))$ ein Punkt des R_ω. Bezeichnen wir die Menge aller Punkte $((a_\nu)) \varepsilon R_\omega$, deren Koordinaten der Ungleichung $0 \leq a_\nu \leq \frac{1}{\nu}$ genügen, mit Q_ω, so ist durch (3) eine Abbildung des Raumes E auf eine Punktmenge $E^* \subseteqq Q_\omega$ gegeben.

14·3·2. *Die Abbildung (3) des regulären und separablen Raumes E auf die Punktmenge $E^* \subseteqq Q_\omega$ ist eineindeutig.*

Da sie jedenfalls eindeutig ist, ist nur zu zeigen: verschiedenen Punkten a, a' von E entsprechen verschiedene Punkte $((a_\nu))$, $((a'_\nu))$ von E^*. Nach

Axiom 5_t) (§ 9, 1) gibt es eine in E offene Menge G, so daß $a \varepsilon G$, $a' \sim \varepsilon G$; im ausgezeichneten Systeme $\mathfrak{H}$ in E offener Mengen gibt es ein $H_{n'}$, so daß $H_{n'} \subseteqq G$, $a \varepsilon H_{n'}$; wegen $a' \sim \varepsilon G$, ist $a' \sim \varepsilon H_{n'}$. Nach **14·2·2** gibt es ein $U_a^* \Subset H_{n'}$, und weiter gibt es ein $H_n \varepsilon \mathfrak{H}$, so daß $H_n \subseteqq U_a^*$, $a \varepsilon H_n$. Wegen $H_n \subseteqq U_a^* \Subset H_{n'}$ ist $H_n \Subset H_{n'}$, d. h. $(H_n, H_{n'})$ ist eines unserer Paare P_ν, etwa $P_{\bar\nu}$. Für die zugehörige Funktion $f_{\bar\nu}$ gilt, weil $a \varepsilon H_n$, $a' \sim \varepsilon H_{n'}$ ist: $f_{\bar\nu}(a) = 0$, $f_{\bar\nu}(a') = 1$; für die nach (3) den Punkten a, a' zugeordneten Punkte $((a_\nu))$, $((a'_\nu))$ des R_ω ist also $a_{\bar\nu} \neq a'_{\bar\nu}$, mithin ist $((a_\nu)) \neq ((a'_\nu))$.

14·3·21. *Die eineindeutige Abbildung* (3) *führt jede in E offene Menge in eine in E^* offene Menge über.*

Sei G offen in E und $G^* \subseteqq E^*$ das Bild von G. Ist $a \varepsilon G$, so gibt es ein $H_{n'} \varepsilon \mathfrak{H}$, so daß $H_{n'} \subseteqq G$, $a \varepsilon H_{n'}$; nach **14·2·2** gibt es ein $U_a^* \Subset H_{n'}$, und weiter gibt es ein $H_n \varepsilon \mathfrak{H}$, so daß $H_n \subseteqq U_a^*$, $a \varepsilon H_n$; dann ist auch $H_n \Subset H_{n'}$, also ist $(H_n, H_{n'})$ eines unserer Paare P_ν, etwa $P_{\bar\nu}$. Für die zugehörige Funktion $f_{\bar\nu}$ ist: $f_{\bar\nu}(a) = 0$ und $f_{\bar\nu}(a') = 1$ für alle $a' \varepsilon (-G)$. Ist also $a' \varepsilon (-G)$ und sind $b = ((a_\nu))$ und $b' = ((a'_\nu))$ die Bildpunkte von a und a' vermöge der Abbildung (3), so ist $a_{\bar\nu} = 0$, $a'_{\bar\nu} = \frac{1}{\bar\nu}$, also nach § 9, (3·3): $b\,b' \geq \frac{1}{\bar\nu}$. Aus $a' \varepsilon (-G)$ folgt also $b\,b' \geq \frac{1}{\bar\nu}$; daraus folgt umgekehrt: ist $b' \varepsilon E^*$ und $b\,b' < \frac{1}{\bar\nu}$, so gilt für das Urbild $a' \varepsilon E$ von b': $a' \varepsilon G$; d. h. für alle $b' \varepsilon E^*$ mit $b\,b' < \frac{1}{\bar\nu}$ gilt $b' \varepsilon G^*$; nach **10·3·1** und **10·3·6** ist also G^* offen in E^*, w. z. b. w.

14·3·22. *Die eineindeutige Abbildung* (3) *führt jede in E^* offene Menge in eine in E offene Menge über.*

Sei G^* offen in E^* und $G \subseteqq E$ das Urbild von G^* vermöge der Abbildung (3). Ist $b \varepsilon G^*$, so gibt es nach **10·3·1** und **10·3·6** ein $\varrho > 0$, so daß für alle $b' \varepsilon E^*$ mit $b\,b' < \varrho$ gilt: $b' \varepsilon G^*$. Wir wählen $\bar\nu$ so groß, daß

$$\sum_{\nu > \bar\nu} \frac{1}{\nu^2} < \frac{\varrho^2}{2}.$$

Sei a das Urbild von b; wegen der Stetigkeit von f_ν gibt es eine Umgebung $U_{\nu a}$, so daß

$$|f_\nu(a') - f_\nu(a)| < \frac{\varrho}{\sqrt{2\bar\nu}} \quad \text{für alle } a' \varepsilon U_{\nu a}.$$

Wir setzen $U_a = U_{1a}\, U_{2a} \ldots U_{\bar\nu a}$; dann gilt für alle $a' \varepsilon U_a$, wenn b' das Bild von a' vermöge (3) bedeutet:

$$(b\,b')^2 = \sum_\nu \frac{1}{\nu^2}(f_\nu(a) - f_\nu(a'))^2 \leq \sum_{\nu=1}^{\bar\nu} (f_\nu(a) - f_\nu(a'))^2 + \sum_{\nu > \bar\nu} \frac{1}{\nu^2} < \varrho^2,$$

also $b\,b' < \varrho$; aus $b\,b' < \varrho$ folgt aber, wie wir sahen: $b' \varepsilon G^*$; das Bild jedes $a' \varepsilon U_a$ gehört also zu G^*, d. h. $U_a \subseteqq G$; also ist a innerer Punkt von G, und nach **10·3·6** ist G offen.

Die Sätze **14·3·2**, **14·3·21**, **14·3·22** besagen:

14·3·3. *Jeder separable und reguläre topologische Raum E ist homöomorph einer Punktmenge $E^* \subseteqq Q_\omega$.*

Seien nun a, a' zwei Punkte von E, und b, b' ihre Bildpunkte im R_ω; definieren wir dann den Abstand $a\,a'$ durch: $a\,a' = b\,b'$, so ist der topologische Raum E zu einem metrischen geworden (der mit E^* isometrisch ist), und aus **14·3·21**, **14·3·22** folgt, daß die offenen Mengen des topologischen Raumes E mit den nach § 9, 2 definierten offenen Mengen dieses metrischen Raumes übereinstimmen. Wir drücken das so aus:

14·3·31. *Jeder separable und reguläre topologische Raum ist metrisierbar.*

Da die wichtigeren topologischen Räume durchweg separabel und regulär sind, bedeutet also Beschränkung auf metrische Räume keine wesentliche Einschränkung.

Literatur: P. Urysohn, Math. Ann. 94 (1925) S. 309; A. D. Pitcher und E. W. Chittenden, Am. Trans. 19 (1918) S. 66; 20 (1919) S. 213; L. Vietoris, Jahresber. Math. Ver. 36 (1927), S. *14* der „Angel. d. D. Math. Ver.“

§ 15. Kompakte Mengen.

1. **Kompakte Mengen.** Die Menge A eines topologischen Raumes heißt kompakt, wenn für jeden unendlichen Teil B von A gilt: $B^1 \supset A$. Die leere Menge, jede endliche Menge ist kompakt.

Aus **5·1·5** und **10·4·4** folgt:

15·1·1. *Damit A kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß für jeden abzählbar unendlichen Teil B von A gelte: $B^1 \supset A$.*

15·1·2. *Jeder Teil einer kompakten Menge ist kompakt.*

15·1·3. *Die Summe zweier kompakter Mengen A, B ist kompakt.*

Denn ist C ein unendlicher Teil von $A + B$, so ist auch mindestens eine der beiden Mengen $A\,C$, $B\,C$ unendlich, etwa $A\,C$; dann ist $(A\,C)^1 \supset A$, also nach **10·4·4** auch $C^1 \supset A$.

Aus **15·1·2**, **15·1·3** folgt:

15·1·31. *Das System aller kompakten Mengen eines topologischen Raumes ist ein δ-Körper.*

Aus **10·4·7** folgt unmittelbar:

15·1·4. *Ist A eine kompakte Menge eines metrischen Raumes, so ist jedes ϱ-Netz in A endlich.*

Aus 15·1·4 und 13·1·6 folgt:

15·1·41. *Jede kompakte metrische Menge ist separabel.*

15·1·5. *Jede kompakte Menge A eines metrischen Raumes ist beschränkt.*

Sei A nicht beschränkt und $c \varepsilon A$. Nach 9·6·21 gibt es ein $a_n \varepsilon A$, so daß $a_n c > n$. Diese a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ bilden einen unendlichen Teil B von A; es genügt zu zeigen: $B^1 = A$. Wäre $b \varepsilon B^1$, so wäre nach 10·4·1 $a_n b < 1$ für unendlich viele n, also $a_n c < b c + 1$ für unendlich viele n, im Widerspruche zu $a_n c > n$.

Aus 15·1·5 folgt, daß der R_n und der R_ω nicht kompakt sind; in 20·2·81 werden wir sehen, daß jede beschränkte Punktmenge des R_n kompakt ist; hingegen gibt es im R_ω beschränkte Punktmengen, die nicht kompakt sind; sei z. B. b_n der Punkt des R_ω, dessen ν-te Koordinate $a_{n\nu} = 0$ ist für $\nu \neq n$, während seine n-te Koordinate $a_{nn} = 1$ sei; die unendliche Menge B der Punkte b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ist dann zugleich ein $\sqrt{2}$-Netz in B, also nach 15·1·4 nicht kompakt, aber beschränkt. — Der R_0 ist beschränkt, aber nicht kompakt: sei z. B. b_n der Punkt des R_0, dessen sämtliche Koordinaten $k_{n\nu} = n$ sind; die unendliche Menge B der Punkte b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ist dann ein 1-Netz im R_0, also ist der R_0 nach 15·1·4 nicht kompakt.

Der Begriff kompakt hat relativen Charakter; ist $A \subseteqq C$, so bedeutet die Aussage: „A ist kompakt in C": für jeden unendlichen Teil B von A ist $B^1 C \supset A$.

Offenbar gilt:

15·1·6. *Ist A kompakt in C und $C \subseteqq C'$, so ist A auch kompakt in C'.*

Literatur: Der Begriff „kompakt" wurde eingeführt von M. Fréchet, Rend. Pal. 22 (1906) S. 6.

2. **In sich kompakte Mengen.** Ist die Menge A kompakt in A, d. h. ist für jeden unendlichen Teil B von A: $B^1 A \supset A$, so heißt sie in sich kompakt. Dieser Begriff hat absoluten Charakter. Jede in sich kompakte Menge ist kompakt.

Wie 15·1·3 beweist man:

15·2·1. *Die Summe zweier in sich kompakter Mengen ist in sich kompakt.*

15·2·2. *Ist A kompakt und abgeschlossen, so ist A in sich kompakt.*

Denn ist B ein unendlicher Teil von A, so ist $B^1 \supset A$; wegen $B \subseteqq A$ ist $B^1 \subseteqq A^1$; weil A abgeschlossen, ist $A^1 \subseteqq A$; also ist $B^1 \subseteqq A$, d. h. $B^1 A = B^1$; wegen $B^1 \supset A$ ist also auch $B^1 A \supset A$.

Die Umkehrung gilt nicht allgemein. Wohl aber gilt:

15·2·21. *Eine separable, in sich kompakte Menge A ist kompakt und abgeschlossen.*

Da jede in sich kompakte Menge auch kompakt ist, haben wir nur zu zeigen: A ist abgeschlossen. Sei $a \varepsilon A^1$. Nach **13·1·71** gibt es ein $B \subseteqq A$, so daß $B^1 = \{a\}$; da A in sich kompakt, muß also $a \varepsilon A$ sein. Aus $a \varepsilon A^1$ folgt also $a \varepsilon A$, d. h. A ist abgeschlossen.

Aus **15·2·2**, **15·1·41**, **15·2·21** folgt:

15·2·22. *Damit die Menge A eines metrischen Raumes in sich kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie kompakt und abgeschlossen sei.*

15·2·3. *Ist A in sich kompakt, so auch jeder in A abgeschlossene Teil C von A.*

Nach **15·1·2** ist C kompakt in A; für jeden unendlichen Teil B von C gilt also: $B^1 A \supset \Lambda$. Da C abgeschlossen in A, ist aber nach **10·8·2** $B^1 A \subseteqq C$, also auch $B^1 A \subseteqq B^1 C$; wegen $B^1 A \supset \Lambda$ ist also auch $B^1 C \supset \Lambda$.

15·2·31. *Ist die in sich kompakte Menge A separabel (oder Menge eines metrischen Raumes), so ist, damit die Menge $C \subseteqq A$ in sich kompakt sei, notwendig und hinreichend, daß C abgeschlossen sei.*

Notwendig: Dies folgt wegen **13·1·2** aus **15·2·21** (bzw. aus **15·2·22**). Hinreichend: Nach **10·8·51** ist C abgeschlossen in A; die Behauptung folgt also aus **15·2·3**.

15·2·4. *Ist die Menge A eines metrischen Raumes kompakt, so ist A^0 in sich kompakt.*

Sei B ein abzählbar unendlicher Teil von A^0, bestehend aus den Punkten $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$; ist $b_n \varepsilon A$, so setzen wir $b_n = c_n$; ist $b_n \sim \varepsilon A$, also $b_n \varepsilon A^1$, so gibt es nach **10·4·1** ein $c_n \varepsilon A$, so daß $c_n b_n < \frac{1}{n}$ und $c_n \neq c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$; die c_n bilden dann einen unendlichen Teil C von A, und weil A kompakt, ist $C^1 \supset \Lambda$. Sei $c \varepsilon C^1$ und $\varrho > 0$; nach **10·4·1** ist $c_n c < \varrho$ für unendlich viele n; wegen $c_n b_n < \frac{1}{n}$ ist also auch $b_n c < 2\varrho$ für unendlich viele n, mithin ist nach **10·4·1** $c \varepsilon B^1$. Also ist $B^1 \supset \Lambda$, also ist A^0 nach **15·1·1** kompakt, also nach **15·2·2** auch in sich kompakt.

15·2·5. *In einem metrischen Raume gibt es zu jeder in sich kompakten Menge $B \supset \Lambda$ und jedem Punkte a ein $b \varepsilon B$, so daß $a b = a B$.*

Nach § 9 (4) gibt es in B eine Punktfolge $((b_n))$, so daß $a b_n \to a B$. Falls hierin für kein n: $a b_n = a B$, so sind unter den b_n unendlich viele verschiedene. Weil B in sich kompakt, hat dann die Menge der b_n einen Häufungspunkt $b \varepsilon B$; für jedes $\varrho > 0$ ist also nach **10·4·1** $b_n b < \varrho$ für unendlich viele n. Aus $a b \leq a b_n + b_n b$ folgt also, weil $a b_n \to a B$ war: $a b \leq a B$, mithin $a b = a B$.

15·2·51. *In einem metrischen Raume gibt es zu jeder Menge* $B \supset \Lambda$ *und jeder in sich kompakten Menge* $A \supset \Lambda$ *ein* $a \varepsilon A$, *so daß* $a\,B = \overline{A\,B}$.

Nach § 9 (5·1) gibt es in A eine Punktfolge $((a_n))$, so daß $a_n\,B \to \overline{A\,B}$. Ist hierin für kein n: $a_n\,B = \overline{A\,B}$, so sind unter den a_n unendlich viele verschiedene, und die Menge der a_n hat einen Häufungspunkt $a \varepsilon A$. Nach § 9 (4·1) ist $a\,B \leq a\,a_n + a_n\,B$, und da hierin $a_n\,B \to \overline{A\,B}$, und da für jedes $\varrho > 0$: $a\,a_n < \varrho$ für unendlich viele n, folgt hieraus $a\,B \leq \overline{A\,B}$, mithin $a\,B = \overline{A\,B}$.

Aus **15·2·51** und **15·2·5** folgt:

15·2·52. *Sind* A *und* B *in sich kompakte Mengen* $\supset \Lambda$ *eines metrischen Raumes, so gibt es ein* $a \varepsilon A$ *und ein* $b \varepsilon B$, *so daß* $a\,b = \overline{A\,B}$.

15·2·53. *Ist* $A \supset \Lambda$ *eine in sich kompakte,* $B \supset \Lambda$ *eine abgeschlossene Menge eines metrischen Raumes, und ist* $\overline{A\,B} = 0$, *so ist* $A\,B \supset \Lambda$.

Nach **15·2·51** gibt es ein $a \varepsilon A$, so daß $a\,B = 0$. Nach **10·5·5** ist dann $a \varepsilon B^0$, also, weil B abgeschlossen, nach **10·5·6** $a \varepsilon B$. Also ist $a \varepsilon A\,B$.

15·2·54. *In einem metrischen Raume gibt es zu jeder in sich kompakten Menge* $A \supset \Lambda$ *und zu jeder offenen Menge* $G \supseteqq A$ *ein* $\varrho > 0$, *so daß* $U_{A\varrho} \subseteqq G$.

Da $-G$ abgeschlossen und $A - G = \Lambda$, folgt aus **15·2·53**: $\overline{A\,(-G)} > 0$; für $\varrho < \overline{A\,(-G)}$ ist $U_{A\varrho} \subseteqq G$.

Literatur: Auf die Bedeutung des Begriffes „in sich kompakt" hat zuerst hingewiesen: H. Tietze, Math. Zeitschr. 5 (1919) S. 288.

3. **Durchschnittsatz.** Eine charakteristische Eigenschaft der in sich kompakten Mengen liefert der Satz:

15·3·1. *Damit* A *in sich kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß für jede monoton abnehmende Folge* $((A_n))$ *nicht leerer, in* A *abgeschlossener Mengen auch* $\underset{n}{D}\,A_n \supset \Lambda$ *sei.*

Notwendig: Sei $((A_n))$ eine monoton abnehmende Folge in A abgeschlossener Mengen mit $\underset{n}{D}\,A_n = \Lambda$, und sei $b_n \varepsilon A_n$. Die Menge B der b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ist dann unendlich. Da $b_{n'} \varepsilon A_n$ für $n' \geq n$, ist $B^1 \subseteqq A_n^1$, also weil A_n abgeschlossen in A, nach **10·8·2** auch $B^1\,A \subseteqq A_n$, also weil $\underset{n}{D}\,A_n = \Lambda$, auch $B^1\,A = \Lambda$; weil B ein unendlicher Teil von A war, ist somit A nicht in sich kompakt. Hinreichend: Ist A nicht in sich kompakt, so gibt es ein abzählbar unendliches $B \subseteqq A$, so daß $B^1\,A = \Lambda$. Seien $b_1, b_2, \ldots, b_\nu, \ldots$ die Punkte von B, und sei A_n die Menge der b_ν mit $\nu \geq n$; wegen $B^1\,A = \Lambda$ ist auch $A_n^1\,A = \Lambda$, also nach **10·8·2** A_n abgeschlossen in A, es ist $A_{n+1} \subseteqq A_n$ und $\underset{n}{D}\,A_n = \Lambda$.

Durch Übergang zu den Komplementen erhält man aus **15·3·1**:

15·3·11. *Damit A in sich kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß in jeder monoton wachsenden Folge $((B_n))$ in A offener Mengen mit $\underset{n}{S}\, B_n = A$ fast alle $B_n = A$ seien.*

15·3·2. *Ist β eine Grenzzahl > 0, ist A separabel und in sich kompakt, und ist die ξ-te Kohärenz $A_\xi \supset \Lambda$ für alle $\xi < \beta$, so ist auch $A_\beta \supset \Lambda$.*

Wäre $A_\beta = \Lambda$, so wäre A_β die letzte Kohärenz von A, somit nach **13·2·4**: $\beta \,\varepsilon\, Z_0$. Nach **8·4·21** gibt es dann eine wachsende Folge $((\beta_n))$ von Ordinalzahlen mit $\lim\limits_n \beta_n = \beta$. Wegen § 12 (8·1) und **12·8·1** ist dann $((A_{\beta_n}))$ eine monoton abnehmende Folge in A abgeschlossener Mengen, und nach § 12 (8) ist $A_\beta = \underset{n}{D}\, A_{\beta_n}$. Wegen $A_{\beta_n} \supset \Lambda$, $A_\beta = \Lambda$ steht das in Widerspruch zu **15·3·1.**

Literatur: Der Durchschnittsatz **15·3·1** geht im wesentlichen auf G. Cantor zurück: Math. Ann. 17 (1880) S. 358.

4. **Halbkompakte Mengen.** Eine Menge, die Summe abzählbar vieler in sich kompakter Mengen ist, heißt halbkompakt. Dieser Begriff hat absoluten Charakter. Jede abzählbare Menge ist halbkompakt; in **20·2·82** werden wir sehen, daß der R_n halbkompakt ist. Aus der Definition folgt unmittelbar:

15·4·1. *Die Summe abzählbar vieler halbkompakter Mengen ist halbkompakt.*

Aus **15·1·41** und **13·1·5** folgt:

15·4·2. *Jede halbkompakte metrische Menge ist separabel.*

15·4·3. *Jede separable halbkompakte Menge ist ein F_σ.*

Dies folgt aus **15·2·21.**

15·4·4. *Ist A halbkompakt, so auch jedes F_σ in A.*

Sei $A = \underset{\nu}{S}\, A_\nu$, wo A_ν in sich kompakt, und sei $B = \underset{n}{S}\, F_n$, wo F_n abgeschlossen in A. Dann ist $B = \underset{n,\,\nu}{S}\, F_n A_\nu$; hierin ist $F_n A_\nu$ abgeschlossen in A_ν, also nach **15·2·3** in sich kompakt; also ist B als Summe abzählbar vieler in sich kompakter Mengen halbkompakt.

15·4·41. *Ist die halbkompakte Menge A separabel (oder Menge eines metrischen Raumes), so ist, damit die Menge $C \subseteqq A$ halbkompakt sei, notwendig und hinreichend, daß C ein F_σ sei.*

Notwendig: Dies folgt wegen **13·1·2** aus **15·4·3** und **15·4·2.** Hinreichend: Da nach **10·9·21** C ein F_σ in A, folgt dies aus **15·4·4.**

5. **Überdeckungssätze.** Wir knüpfen wieder an den Begriff eines die Menge A überdeckenden Systemes (§ 13, 3).

15·5·1. *Damit A in sich kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß es in jedem abzählbaren, A überdeckenden Systeme $\mathfrak{C}$ ein endliches A überdeckendes Teilsystem gebe.*

Notwendig: Seien C_n $(n = 1, 2, \ldots)$ die in A offenen Mengen von $\mathfrak{C}$. Setzen wir $B_n = C_1 + \ldots + C_n$, so bilden die B_n eine monoton wachsende Folge in A offener Mengen mit $\underset{n}{S}\, B_n = A$. Also sind nach **15·3·11** fast alle $B_n = A$. Ist aber $B_n = A$, so bilden $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ein A überdeckendes endliches Teilsystem von $\mathfrak{C}$. Hinreichend: Jede monoton wachsende Folge $((B_n))$ in A offener Mengen mit $\underset{n}{S}\, B_n = A$ ist ein abzählbares, A überdeckendes System $\mathfrak{C}$. Nach Annahme gibt es darin ein endliches A überdeckendes Teilsystem, bestehend etwa aus $B_1, B_2, \ldots, B_n$. D. h. es ist $B_n = B_1 + B_2 + \ldots + B_n = A$, und wegen $B_{n'} \supseteqq B_n$ für $n' \geq n$ ist auch $B_{n'} = A$ für $n' \geq n$. Die Bedingung von **15·3·11** ist also erfüllt, somit ist A in sich kompakt.

15·5·11. *Ist A separabel (oder eine metrische Menge), so ist, damit A in sich kompakt sei, notwendig und hinreichend, daß es in jedem A überdeckenden Systeme $\mathfrak{B}$ ein endliches A überdeckendes Teilsystem gebe.*

Notwendig. Nach **15·1·41** ist jede in sich kompakte Menge eines metrischen Raumes separabel. Ist A separabel, so gibt es nach **13·3·1** in $\mathfrak{B}$ ein abzählbares A überdeckendes Teilsystem $\mathfrak{C}$; ist A in sich kompakt, so gibt es weiter nach **15·5·1** in $\mathfrak{C}$ ein A überdeckendes endliches Teilsystem. Hinreichend: Dies ist ein Spezialfall von **15·5·1.**

Durch Übergang zu den Komplementen findet man, daß **15·5·11** gleichbedeutend ist mit:

15·5·12. *Ist A separabel (oder eine metrische Menge), so ist, damit A in sich kompakt sei, notwendig und hinreichend, daß es für jedes System $\mathfrak{C}$ in A abgeschlossener Mengen, von denen je endlich viele Mengen einen Punkt gemein haben, auch einen Punkt gebe, der allen $C \in \mathfrak{C}$ gemein ist.*

Ist $((\mathfrak{B}_\nu))$ eine Folge von Überdeckungssystemen der Menge A, so heißt ein aus abzählbar vielen in A offenen Mengen $B_1, B_2, \ldots, B_\nu, \ldots$ bestehendes Überdeckungssystem $\mathfrak{B}$ von A eine Auswahlüberdeckung aus $((\mathfrak{B}_\nu))$, wenn jede Menge $B_\nu \in \mathfrak{B}$ Summe endlich vieler Mengen des Systems $\mathfrak{B}_\nu$ ist.

15·5·2. *Ist die halbkompakte Menge A separabel (oder eine metrische Menge), so gibt es zu jeder Folge $((\mathfrak{B}_\nu))$ von Überdeckungssystemen von A eine Auswahlüberdeckung $\mathfrak{B}$.*

Sei $A = \underset{\nu}{S}\, A_\nu$, wo A_ν in sich kompakt. Da die Durchschnitte der Mengen von $\mathfrak{B}_\nu$ mit A_ν ein A_ν überdeckendes System bilden, gibt es nach **15·5·11**

in $\mathfrak{B}_\nu$ ein endliches Teilsystem $\mathfrak{B}'_\nu$, so daß, wenn B_ν die Summe der Mengen von $\mathfrak{B}'_\nu$ bedeutet: $A_\nu \subseteqq B_\nu$. Dann ist $B_1, B_2, \ldots, B_\nu, \ldots$ die gesuchte Auswahlüberdeckung $\mathfrak{B}$.

Eine leichte Verschärfung dieses Resultates liefert der Satz:

15·5·21. *Gibt es zu jeder Folge $((\mathfrak{B}_\nu))$ von Überdeckungssystemen der Menge A eine Auswahlüberdeckung $\mathfrak{B}$, so gibt es auch eine Auswahlüberdeckung $B_1, B_2, \ldots, B_\nu, \ldots$ aus $((\mathfrak{B}_\nu))$, so daß für jeden Punkt $a \varepsilon A$ gilt: $a \varepsilon B_\nu$ für unendlich viele ν.*

Nach Annahme gibt es zur Folge $\mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{B}_{\nu+1}, \ldots, \mathfrak{B}_{\nu+n}, \ldots$ von Überdeckungssystemen eine Auswahlüberdeckung $B_{\nu\nu}, B_{\nu\,\nu+1}, \ldots, B_{\nu\,\nu+n}, \ldots$, wo $B_{\nu\,\nu+n}$ Summe endlich vieler Mengen aus $\mathfrak{B}_{\nu+n}$; wir setzen: $B_\nu = B_{1\nu} + B_{2\nu} + \ldots + B_{\nu\nu}$; dann ist B_ν Summe endlich vieler Mengen aus $\mathfrak{B}_\nu$. Sei $a \varepsilon A$; zu jedem ν^* gibt es ein $\nu \geq \nu^*$, so daß $a \varepsilon B_{\nu^*\nu}$, und mithin $a \varepsilon B_\nu$; also gilt $a \varepsilon B_\nu$ für unendlich viele ν.

Literatur: Der Überdeckungssatz **15·5·1** geht zurück auf É. Borel, Ann. éc. norm. (3) 12 (1895) S. 51, der Überdeckungssatz **15·5·11** auf H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives (Paris 1904) S. 105. Der Überdeckungssatz **15·5·2** stammt im wesentlichen von K. Menger, Wien. Ber. 133 (1924) S. 421; vgl. hierzu auch W. Hurewicz, Math. Zeitschr. 24 (1926) S. 401; Fund. math. 9 (1927) S. 193; W. Sierpiński, Fund. math. 8 (1926) S. 223. Eine zusammenfassende Darstellung der verschiedenen Überdeckungstheoreme: T. H. Hildebrandt, Am. Bull. 32 (1926) S. 423; K. Menger, Erg. e. math. Koll. 2 (1932) S. 23.

§ 16. Zusammenhängende Mengen.

1. **Zusammenhängende Mengen.** In jeder Menge A ist A und Λ sowohl offen als auch abgeschlossen. Wir nennen nun eine Menge A zusammenhängend, wenn es außer A und Λ keinen Teil von A gibt, der gleichzeitig offen und abgeschlossen in A ist; anderenfalls heißt A unzusammenhängend. Diese Begriffe haben absoluten Charakter. — Da das Komplement (bezüglich A) einer in A offenen Menge abgeschlossen in A, das Komplement einer in A abgeschlossenen Menge offen in A ist, haben wir:

16·1·1. *Die Menge A ist unzusammenhängend dann und nur dann, wenn es eine Zerlegung $A = A_1 + A_2$ von A in zwei fremde Summanden gibt, die beide $\supset \Lambda$ und beide offen (abgeschlossen) in A sind.*

Wegen **10·8·11** folgt daraus insbesondere:

16·1·11. *Eine offene (abgeschlossene) Menge ist unzusammenhängend dann und nur dann, wenn sie in zwei fremde offene (abgeschlossene) Summanden $\supset \Lambda$ zerlegt werden kann.*

Zufolge **14·1·11** ist **16·1·1** gleichbedeutend mit:

16·1·12. *Die Menge A ist unzusammenhängend dann und nur dann, wenn es eine Zerlegung $A = A_1 + A_2$ von A in zwei abgesonderte Summanden $\supset \Lambda$ gibt.*

16·1·2. *Ist $A = A_1 + A_2$ eine Zerlegung von A in zwei abgesonderte Teile, so gilt für jeden zusammenhängenden Teil B von A entweder $B \subseteqq A_1$ oder $B \subseteqq A_2$.*

Denn ist $B A_1 \supset \Lambda$ und $B A_2 \supset \Lambda$, so ist $B = A_1 B + A_2 B$ zufolge **14·1·3** eine Zerlegung von B in zwei nicht leere abgesonderte Teile, d. h. B ist unzusammenhängend.

Daraus folgt wegen **16·1·12** unmittelbar:

16·1·21. *Gibt es zu je zwei Punkten a_1 und a_2 von A einen zusammenhängenden Teil B von A, so daß $a_1 \varepsilon B$, $a_2 \varepsilon B$, so ist A zusammenhängend.*

Die leere Menge, jede Menge $\{a\}$ ist zusammenhängend; jede endliche Menge mit mehr als einem Element ist unzusammenhängend.

16·1·3. *Die einzigen zusammenhängenden Mengen des R_1 sind: Λ; die Mengen $\{a\}$, die Intervalle (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$; die Halbgeraden $x > a$, $x < a$; die Halbgeraden $x \geqq a$, $x \leqq a$; der R_1 selbst.*

Um zu beweisen, daß alle diese Mengen zusammenhängend sind, genügt es zufolge **16·1·21** zu zeigen, daß die Intervalle $[a, b]$ zusammenhängend sind. Sei also $[a, b] = A_1 + A_2$ eine Zerlegung von $[a, b]$ in zwei fremde Summanden $\supset \Lambda$, und sei A_1 abgeschlossen; es ist nach **16·1·11** zu zeigen, daß A_2 nicht abgeschlossen sein kann; sei $a_1 \varepsilon A_1$, $a_2 \varepsilon A_2$ und etwa $a_1 < a_2$; sei c das Supremum aller $x \varepsilon A_1$, die der Ungleichung $a_1 \leqq x < a_2$ genügen; weil A_1 abgeschlossen, ist $c \varepsilon A_1$, also $c < a_2$, und es ist $(c, a_2] \subseteqq A_2$; daher ist c Häufungspunkt von A_2, wegen $c \varepsilon A_1$ aber ist $c \sim\varepsilon A_2$, d. h. A_2 ist nicht abgeschlossen, w. z. b. w. — Um zu beweisen, daß es außer den in **16·1·3** aufgezählten keine anderen zusammenhängenden Mengen des R_1 gibt, genügt es, zu zeigen: ist $A \subseteqq R_1$ und gibt es im R_1 drei Punkte $a_1 < a_3 < a_2$, so daß $a_1 \varepsilon A$, $a_2 \varepsilon A$, $a_3 \sim\varepsilon A$, so ist A unzusammenhängend. Seien zu dem Zwecke A_1 und A_2 die Durchschnitte von A mit den Halbgeraden $x < a_3$, $x > a_3$; dann ist $A = A_1 + A_2$, $A_1 \supset \Lambda$, $A_2 \supset \Lambda$, $A_1 A_2 = \Lambda$, und A_1, A_2 sind offen in A; also ist A nach **16·1·1** unzusammenhängend.

Sind $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ zwei verschiedene Punkte des R_n, so verstehen wir unter der Strecke $[a, b]$ des R_n die Menge der Punkte $(a_1 + t(b_1 - a_1), \ldots, a_n + t(b_n - a_n))$ mit $0 \leqq t \leqq 1$; sind $a = ((a_\nu))$, $b = ((b_\nu))$ zwei verschiedene Punkte des R_ω, so verstehen wir unter der Strecke $[a, b]$ des R_ω die Menge der Punkte $((a_\nu + t(b_\nu - a_\nu)))$ mit $0 \leqq t \leqq 1$. Aus **16·1·3** folgert man ohne weiteres:

16·1·31. *Jede Strecke des R_n (des R_ω) ist zusammenhängend.*

Aus **16·1·31** und **16·1·21** folgt nun:

16·1·32. *Der R_n (der R_ω) ist zusammenhängend. Jede Kugel des R_n (des R_ω) ist zusammenhängend.*

16·1·4. *Die Summe zweier nicht abgesonderter zusammenhängender Mengen ist zusammenhängend.*

Denn seien B, C zusammenhängend, $A = B + C$ unzusammenhängend. Dann gibt es eine Zerlegung $A = A_1 + A_2$ in zwei nicht leere abgesonderte Teile A_1, A_2. Nach **16·1·2** ist $B \subseteqq A_1$ oder $B \subseteqq A_2$; ebenso $C \subseteqq A_1$ oder $C \subseteqq A_2$. Ist etwa $B \subseteqq A_1$, so $C \subseteqq A_2$; denn wäre auch $C \subseteqq A_1$, so wäre $A_2 = \Lambda$. Aus **14·1·3** folgt nun, daß B und C abgesondert, entgegen der Annahme.

16·1·41. *Ist A die Summe eines Systems $\mathfrak{S}$ zusammenhängender Mengen, von denen keine zwei abgesondert sind, so ist A zusammenhängend.*

Sei in der Tat $a_1 \varepsilon A$, $a_2 \varepsilon A$; es gibt ein $B_1 \varepsilon \mathfrak{S}$ und ein $B_2 \varepsilon \mathfrak{S}$, so daß $a_1 \varepsilon B_1$, $a_2 \varepsilon B_2$. Nach **16·1·4** ist $B_1 + B_2$ zusammenhängend, nach **16·1·21** also auch A.

16·1·42. *Ist A die Summe eines Systemes $\mathfrak{S}$ zusammenhängender Mengen, unter denen es eine B_0 gibt, die von keiner anderen Menge $B \varepsilon \mathfrak{S}$ abgesondert ist, so ist A zusammenhängend.*

Denn ersetzt man jedes $B \varepsilon \mathfrak{S}$ durch $B' = B + B_0$, so sind alle B' zusammenhängend nach **16·1·4**, keine zwei B' sind abgesondert, da keine zwei B' fremd sind, und A ist auch die Summe der B'. Also ist A zusammenhängend nach **16·1·41.**

16·1·5. *Ist A zusammenhängend, und $A \subseteqq B \subseteqq A^0$, so ist auch B zusammenhängend.*

Zufolge **16·1·1** haben wir zu zeigen: ist $B = B_1 + B_2$, wo B_1, B_2 abgeschlossen in B und fremd, so ist $B_1 = \Lambda$ oder $B_2 = \Lambda$. Wir setzen $A_1 = A\,B_1$, $A_2 = A\,B_2$; dann ist $A = A_1 + A_2$. Da B_1, B_2 nach **14·1·11** abgesondert, so nach **14·1·3** auch A_1 und A_2, und da A zusammenhängend, ist $A_1 = \Lambda$ oder $A_2 = \Lambda$; sei etwa $A_2 = \Lambda$. Dann ist $A \subseteqq B_1$, also $A^0 \subseteqq B_1^0$; andererseits ist wegen $B_1 \subseteqq B \subseteqq A^0$ auch $B_1^0 \subseteqq A^0$, also $A^0 = B_1^0$. Da B_1 abgeschlossen in B, ist nach **10·8·3** $B_1 = B_1^0\,B = A^0\,B = B$, also $B_2 = \Lambda$, w. z. b. w.

Insbesondere ist in **16·1·5** enthalten:

16·1·51. *Ist A zusammenhängend, so auch A^0.*

16·1·6. *Eine zusammenhängende Menge A, die mehr als einen Punkt enthält, ist insichdicht.*

Denn ist a ein isolierter Punkt von A, so ist $A = \{a\} + (A - \{a\})$ eine Zerlegung von A in zwei abgesonderte Teile $\supset \Lambda$.

Bezeichnen wir mit A_g die Begrenzung von A (§ 10, 6), so gilt:

16·1·7. *Ist A beliebig, B zusammenhängend, und ist $A B \supset \Lambda$, $(-A) B \supset \Lambda$, so ist auch $A_g B \supset \Lambda$.*

Denn wäre $A_g B = \Lambda$, so wäre wegen $A_g = A_r + (-A)_r$ auch $A_r B = \Lambda$, $(-A)_r B = \Lambda$, also $A B = A_i B$, $(-A) B = (-A)_i B$, und es wäre $B = A B + (-A) B = A_i B + (-A)_i B$ eine Zerlegung der zusammenhängenden Menge B in zwei fremde, zufolge **10·3·5** und **10·8·1** in B offene Mengen $\supset \Lambda$, entgegen **16·1·1**.

16·1·8. *Jede zusammenhängende Menge C eines separablen regulären Raumes E, die mehr als einen Punkt enthält, hat die Mächtigkeit $\aleph$.*

Nach **14·2·31** ist E normal. Sei $a \varepsilon C$, $b \varepsilon C$, $a \neq b$; es gibt ein offenes G, so daß $a \varepsilon G$, $b \sim \varepsilon G$; wir setzen in **14·2·5**: $A = \{a\}$, $B = G$; dann ist $a \varepsilon G_x$, $b \sim \varepsilon G_x$ für jedes $x \varepsilon [0, 1]$. Nach **16·1·7** ist also $(G_x)_g C \supset \Lambda$. Nun ist $(G_{x'})_g (G_{x''})_g = \Lambda$ für $x' \neq x''$; denn ist etwa $x' < x''$, so ist $G_{x'} \Subset G_{x''}$, d. h. $(G_{x'})^0 \subseteqq G_{x''}$ also, da nach § 10 (6·3) $(G_{x'})_g \subseteqq (G_{x'})^0$ ist, auch $(G_{x'})_g \subseteqq G_{x''}$, während, weil $G_{x''}$ offen, $G_{x''} (G_{x''})_g = \Lambda$ ist. Da also je zwei $(G_x)_g$ fremd sind, und $(G_x)_g C \supset \Lambda$ für jedes $x \varepsilon [0, 1]$, hat C mindestens die Mächtigkeit $\aleph$, also nach **13·2·1** die Mächtigkeit $\aleph$.

Literatur: Der hier behandelte Begriff des Zusammenhanges zuerst bei N. J. Lennes, Am. Journ. 33 (1911) S. 303 und F. Hausdorff, Grundz. d. Mengenlehre (1914) S. 244.

2. **ϱ-Ketten.** Sei $\varrho > 0$; wir sagen: die Punkte $a_0, a_1, \ldots, a_n$ eines metrischen Raumes bilden eine a_0 und a_n verbindende ϱ-Kette, wenn $a_{i-1} a_i < \varrho$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

16·2·1. *Ist A eine metrische Menge und $\sigma > 0$, so ist die Menge A' aller $a \varepsilon A$, die mit einem gegebenen Punkte $a_0 \varepsilon A$ für jedes $\varrho > \sigma$ durch eine ϱ-Kette $\subseteqq A$ verbunden sind, sowohl offen als abgeschlossen in A.*

Sei $a \varepsilon A'$, $b \varepsilon A$, $a b < \sigma$. Ist $a_0, a_1, \ldots, a_n, a$ eine a_0 und a verbindende ϱ-Kette $\subseteqq A$, und ist $\varrho > \sigma$, so ist $a_0, a_1, \ldots, a_n, a, b$ eine a_0 und b verbindende ϱ-Kette $\subseteqq A$, d. h. es ist auch $b \varepsilon A'$; also: ist $a \varepsilon A'$, so ist $A K_{a\sigma} \subseteqq A'$, d. h. A' ist offen in A. — Sei sodann $b \varepsilon A A'^1$; dann gibt es ein $a \varepsilon A'$, so daß $a b < \sigma$; da a mit a_0 durch eine zu A gehörige ϱ-Kette $(\varrho > \sigma)$ verbunden ist, so auch b; aus $b \varepsilon A A'^1$ folgt also $b \varepsilon A'$, d. h. nach **10·8·2**: A' ist abgeschlossen in A.

16·2·2. *Ist die metrische Menge A zusammenhängend, so sind je zwei Punkte von A für jedes $\varrho > 0$ verbunden durch eine ϱ-Kette $\subseteqq A$.*

Sei $a_0 \varepsilon A$ und $\sigma > 0$; nach **16·2·1** ist die Menge A' aller $a \varepsilon A$, die mit a_0 für jedes $\varrho > \sigma$ durch eine ϱ-Kette $\subseteqq A$ verbunden sind, sowohl offen als abgeschlossen in A; da jedenfalls $a_0 \varepsilon A'$, ist $A' \supset A$, also, weil A zusammenhängend: $A' = A$; d. h. jeder Punkt von A ist für jedes $\varrho > \sigma$ mit a_0 durch eine ϱ-Kette $\subseteqq A$ verbunden. Da dies für jedes $\sigma > 0$ gilt, ist **16·2·2** bewiesen.

Die Umkehrung hiervon gilt nicht allgemein; Beispiel im R_1: die Menge aller $x \neq 0$ ist nach **16·1·3** nicht zusammenhängend. Wohl aber gilt:

16·2·21. *Ist die metrische Menge A in sich kompakt, und sind je zwei Punkte von A für jedes $\varrho > 0$ verbunden durch eine ϱ-Kette $\subseteqq A$, so ist A zusammenhängend.*

Sei A unzusammenhängend. Da A nach **15·2·22** abgeschlossen, ist nach **16·1·11** $A = A_1 + A_2$, wo A_1, A_2 fremde abgeschlossene Mengen $\supset A$. Nach **15·2·31** sind A_1, A_2 in sich kompakt, also ist nach **15·2·53** $\overline{A_1\, A_2} > 0$. Ist $0 < \varrho < \overline{A_1 A_2}$ und $a_1 \varepsilon A_1$, $a_2 \varepsilon A_2$, so sind offenbar a_1 und a_2 nicht durch eine ϱ-Kette $\subseteqq A$ verbunden.

3. **Komponenten.** Sei A eine beliebige Menge $\supset A$ und $a \varepsilon A$. Wir bilden die Summe aller a enthaltenden zusammenhängenden Teile von A (zu denen mindestens $\{a\}$ gehört); nach **16·1·41** ist sie zusammenhängend; wir nennen sie: die zu a gehörige Komponente von A und bezeichnen sie mit A_a; sie ist der größte a enthaltende, zusammenhängende Teil von A.

16·3·1. *Zwei Komponenten A_a und A_b von A sind entweder abgesondert (und daher fremd) oder identisch.*

Denn sind A_a, A_b nicht abgesondert, so ist $A_a + A_b$ nach **16·1·4** zusammenhängend, also ein sowohl a als b enthaltender zusammenhängender Teil von A, also ist $A_a + A_b \subseteqq A_a$, $A_a + A_b \subseteqq A_b$, also $A_a = A_b$.

Eine nicht leere Menge ist zusammenhängend dann und nur dann, wenn sie nur eine einzige Komponente hat. Jede Menge ist Summe ihrer (zu je zweien fremden) Komponenten. Die Zerlegung einer Menge in ihre Komponenten hat absoluten Charakter.

16·3·2. *Jede Komponente von A ist abgeschlossen in A.*

Denn nach **16·1·5** ist $(A_a)^0 A$ ein zusammenhängender, a enthaltender Teil von A, also $(A_a)^0 A \subseteqq A_a$; da auch umgekehrt $A_a \subseteqq (A_a)^0 A$, ist $A_a = (A_a)^0 A$, also ist nach **10·8·3** A_a abgeschlossen in A.

Hingegen ist i. a. die Komponente A_a nicht offen in A. Beispiel: die aus den Punkten 0 und $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ bestehende Menge A des R_1; die zu 0 gehörige Komponente ist $\{0\}$ und nicht offen in A.

Literatur: F. Hausdorff, Grundz. d. Mengenlehre S. 245, 248.

4. **Kontinua.** Eine in sich kompakte, zusammenhängende Menge, die mehr als einen Punkt enthält, heißt ein Kontinuum; dieser Begriff hat absoluten Charakter. Aus **15·1·5**, **15·2·22** und **16·1·3** folgt:

16·4·1. *Die einzigen Kontinua* $\subseteqq R_1$ *sind die Intervalle* $[a, b]$.

Aus **15·2·21**, **15·2·22**, **16·1·6** folgt:

16·4·2. *Jedes separable (jedes metrische) Kontinuum ist perfekt.*

Aus **16·3·2** und **15·2·3** folgt:

16·4·3. *Jede Komponente einer in sich kompakten Menge ist ein Kontinuum oder besteht aus einem Punkte.*

Ist kein Teil der Menge A ein Kontinuum, so heißt A diskontinuierlich.

5. **Gebiete.** Eine zusammenhängende, in A offene Menge $\supseteqq A$ heißt ein Gebiet in A. Aus **16·1·3** folgt:

16·5·1. *Die einzigen Gebiete im* R_1 *sind: die Intervalle* (a, b); *die Halbgeraden* $x > a$, $x < a$; *der* R_1 *selbst.*

Die Menge A heißt im Punkte $a \varepsilon A$ lokal-zusammenhängend, wenn es zu jeder Umgebung U_a eine Umgebung U_a^* von a gibt, so daß $A\,U_a^*$ Teil der zu a gehörigen Komponente von $A\,U_a$ ist. Die Menge A heißt lokal-zusammenhängend, wenn sie in jedem ihrer Punkte lokal-zusammenhängend ist. Der Begriff „lokal-zusammenhängend" hat absoluten Charakter.

16·5·2. *Damit die Komponenten jeder in* A *offenen Menge* $\supseteqq A$ *Gebiete in* A *seien, ist notwendig und hinreichend, daß* A *lokal-zusammenhängend ist.*

Notwendig: Sei $a \varepsilon A$ und U_a eine Umgebung von a; dann ist $A\,U_a$ offen in A; die zu a gehörige Komponente B von $A\,U_a$ ist nach Voraussetzung ein Gebiet in A; also gibt es eine offene Menge C, so daß $B = C A$; setzen wir $C\,U_a = U_a^*$, so ist $A\,U_a^* = A\,C\,U_a = B\,U_a = B$; d. h. A ist in a lokal-zusammenhängend. Hinreichend: Sei G offen in A, K eine Komponente von G; es ist zu zeigen, daß auch K offen in A. Sei also $a \varepsilon K$; weil G offen in A, gibt es eine Umgebung U_a, so daß $A\,U_a \subseteqq G$. Sei B die zu a gehörige Komponente von $A\,U_a$; dann ist $B \subseteqq K$. Weil A lokal-zusammenhängend in a, gibt es eine Umgebung U_a^*, so daß $A\,U_a^* \subseteqq B \subseteqq K$; also ist a in A innerer Punkt von K, d. h. K ist offen in A, wie behauptet.

Aus **16·1·32** folgt:

16·5·3. *Der* R_n *(der* R_ω*) ist lokal-zusammenhängend.*

Somit folgt aus **16·5·2** und **16·5·1** bei Beachtung von **5·1·42**:

16·5·4. *Ist G offen im R_1 und $A \subset G \subset R_1$, so ist G Summe abzählbar vieler fremder Intervalle (a, b) und höchstens zweier zu diesen Intervallen und untereinander fremder offener Halbgeraden.*

Literatur: Der Begriff des lokalen Zusammenhanges stammt von H. Hahn, Wien. Ber. 123 (1914) S. 2433 und St. Mazurkiewicz, Fund. math. 1 (1920) S. 170. Vgl. auch H. Tietze, Monatsh. f. Math. 33 (1923) S. 15; N. Aronszajn, Monatsh. f. Math. 37 (1930) S. 241.

6. **Nulldimensionale Mengen.** Die Menge A heißt nulldimensional im Punkte $a \varepsilon A$, wenn es zu jeder Umgebung U_a eine Zerlegung $A = A_1 + A_2$ von A in zwei abgesonderte Summanden gibt, so daß $a \varepsilon A_1$ und $A_1 \subseteqq U_a$. Dieser Begriff hat absoluten Charakter.

16·6·1. *Ist A nulldimensional im Punkte a, so reduziert sich die a enthaltende Komponente A_a von A auf $\{a\}$.*

Denn nach **16·1·2** muß für jede Umgebung U_a gelten: $A_a \subseteqq U_a$.

Die Menge A heißt nulldimensional, wenn sie in jedem ihrer Punkte nulldimensional ist. Jede Komponente einer nulldimensionalen Menge besteht wegen **16·6·1** aus einem einzigen Punkte; die Umkehrung hiervon aber gilt nicht.

Aus **14·1·3** folgt:

16·6·2. *Jeder Teil einer nulldimensionalen Menge ist nulldimensional.*

16·6·3. *Damit die Menge $A \subseteqq R_1$ nulldimensional sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie kein Intervall enthält.*

Notwendig: Ist $(b, c) \subseteqq A$ und $a \varepsilon (b, c)$, so gilt wegen **16·1·3** für die a enthaltende Komponente: $A_a \supseteqq (b, c)$; die Behauptung folgt also aus **16·6·1.** Hinreichend: Sei $a \varepsilon A$, U_a eine Umgebung von a. Da U_a offen, gibt es zufolge **16·5·4** ein offenes Intervall I, so daß $a \varepsilon I$, $I \subseteqq U_a$. Da A kein Intervall enthält, gibt es in $I - A$ zwei Punkte b, c, so daß $b < a < c$. Setzen wir $A_1 = A \,.\, (b, c)$, $A_2 = A - A_1$, so ist $a \varepsilon A_1$, $A_1 \subseteqq U_a$, und A_1, A_2 sind abgesondert. Also ist A nulldimensional.

16·6·4. *Gilt in einem metrischen Raume E für je drei Punkte die Ungleichung $a\,c \leq \max\,(a\,b, b\,c)$, so ist E nulldimensional.*

Sei $a \varepsilon E$ und U_a eine Umgebung von a. Da a innerer Punkt von U_a, gibt es nach **10·3·1** ein $\varrho > 0$, so daß $K_{a\varrho} \subseteqq U_a$. Wir setzen $A_1 = K_{a\varrho}$, $A_2 = E - K_{a\varrho}$. Ist $a_1 \varepsilon A_1$, $a_2 \varepsilon A_2$, so ist $a_1 a_2 \geq \varrho$; denn anderenfalls würde nach Annahme aus $a_1 a_2 < \varrho$, $a a_1 < \varrho$ folgen $a a_2 < \varrho$, entgegen der Definition von A_2. Es ist also $\overline{A_1 A_2} \geq \varrho$, somit sind A_1 und A_2 abgesondert.

Aus 16·6·4 und § 9 (3·41) folgt:

16·6·41. *Der R_0 ist nulldimensional.*

Aus 16·6·1 folgt:

16·6·5. *Jeder zusammenhängende Teil einer nulldimensionalen Menge ist entweder $= \Lambda$ oder besteht aus einem Punkte.*

Literatur: Über den Begriff „nulldimensional“ und verwandte Begriffe vgl. K. Menger, Dimensionstheorie (Leipzig und Berlin 1928) S. 202ff.

§ 17. Mengenfolgen, Punktfolgen.

1. **Mengenfolgen.** Der Punkt a heißt ein oberer Näherungspunkt der Mengenfolge $((A_n))$, wenn für jede Umgebung U_a der Durchschnitt $A_n U_a \supset \Lambda$ ist für unendlich viele n; er heißt ein unterer Näherungspunkt von $((A_n))$, wenn für jedes U_a der Durchschnitt $A_n U_a \supset \Lambda$ ist für fast alle n. Die Menge aller oberen (unteren) Näherungspunkte von $((A_n))$ heißt die obere (untere) Näherungsgrenze von $((A_n))$ und wird (zum Unterschiede von den in § 3, 7 betrachteten Bildungen) bezeichnet mit $\overline{\lim\limits_n} A_n$ (mit $\underline{\lim\limits_n} A_n$). Läßt man aus $((A_n))$ endlich viele Mengen weg, oder fügt endlich viele hinzu, so ändern sich $\underline{\lim\limits_n} A_n$ und $\overline{\lim\limits_n} A_n$ nicht. Offenbar gilt:

(1) $$\underline{\lim_n} A_n \subseteqq \overline{\lim_n} A_n .$$

(1·1) $$\underline{\lim_n} A_n + \underline{\lim_n} B_n \subseteqq \underline{\lim_n} (A_n + B_n) \subseteqq \underline{\lim_n} A_n + \overline{\lim_n} B_n \subseteqq \overline{\lim_n} (A_n + B_n) = \overline{\lim_n} A_n + \overline{\lim_n} B_n .$$

(1·2) $$\underline{\lim_n} A_n B_n \subseteqq \underline{\lim_n} A_n \,.\, \underline{\lim_n} B_n ; \qquad \overline{\lim_n} A_n B_n \subseteqq \overline{\lim_n} A_n \,.\, \overline{\lim_n} B_n .$$

(1·3) $$\underline{\lim_n} A_n - \overline{\lim_n} B_n \subseteqq \underline{\lim_n} (A_n - B_n); \; \overline{\lim_n} A_n - \overline{\lim_n} B_n \subseteqq \overline{\lim_n} (A_n - B_n).$$

17·1·1. *Ist $A_n \subseteqq B_n$ für fast alle n, so ist:*

$$\underline{\lim_n} A_n \subseteqq \underline{\lim_n} B_n ; \qquad \overline{\lim_n} A_n \subseteqq \overline{\lim_n} B_n .$$

17·1·11. *Für jede Teilfolge $((A_{n_\nu}))$ von $((A_n))$ gilt:*

$$\underline{\lim_n} A_n \subseteqq \underline{\lim_\nu} A_{n_\nu} \subseteqq \overline{\lim_\nu} A_{n_\nu} \subseteqq \overline{\lim_n} A_n .$$

17·1·12. $$\underline{\lim_n} A_n = \underline{\lim_n} A_n^0 ; \qquad \overline{\lim_n} A_n = \overline{\lim_n} A_n^0 .$$

Wegen 17·1·1 ist $\underline{\lim\limits_n} A_n \subseteqq \underline{\lim\limits_n} A_n^0$. Es ist noch zu zeigen: $\underline{\lim\limits_n} A_n^0 \subseteqq \underline{\lim\limits_n} A_n$, d. h. aus $a \,\varepsilon\, \underline{\lim\limits_n} A_n^0$ folgt $a \,\varepsilon\, \underline{\lim\limits_n} A_n$. Sei also $a \,\varepsilon\, \underline{\lim\limits_n} A_n^0$; dann

ist $U_a A_n^0 \supset \Lambda$ für fast alle n, also nach **10·5·4** auch $U_a A_n \supset \Lambda$ für fast alle n, also $a \varepsilon \underline{\lim}_n A_n$, w. z. b. w.

17·1·13. *Bei beliebigen A_n sind $\underline{\lim}_n A_n$ und $\overline{\lim}_n A_n$ abgeschlossen.*

Sei $\underline{\lim}_n A_n = B$ und $a \varepsilon B^1$; in jedem U_a liegt dann ein $b \varepsilon B$, und da U_a auch ein U_b, ist also $A_n U_a \supset \Lambda$ für fast alle n; d. h. $a \varepsilon B$. Nach **10·5·61** ist also B abgeschlossen.

17·1·14. $$\overline{\lim_n} A_n = \underset{n}{D} \, (\underset{\nu \geqq n}{S} A_\nu)^0.$$

Wir setzen: $\underset{\nu \geqq n}{S} A_\nu = B_n$. Die Aussage $a \varepsilon \overline{\lim}_n A_n$ ist äquivalent mit: „Ist U_a eine beliebige Umgebung von a, so ist $A_n U_a \supset \Lambda$ für unendlich viele n"; dies ist äquivalent mit „$B_n U_a \supset \Lambda$ für alle n", und dies ist nach **10·5·4** äquivalent mit „$a \varepsilon B_n^0$ für alle n", d. h. mit $a \varepsilon \underset{n}{D} B_n^0$; und dies ist die Behauptung.

Gilt in (1) das Zeichen $=$, so setzen wir:

$$\lim_n A_n = \underline{\lim_n} A_n = \overline{\lim_n} A_n, \tag{1·4}$$

und nennen diese Menge: die N ä h e r u n g s g r e n z e von $((A_n))$; die Folge $((A_n))$ heißt dann k o n v e r g e n t.

Aus **17·1·1** folgt:

17·1·2. *Ist $A_n \subseteqq B_n \subseteqq C_n$ für fast alle n, und ist $\lim_n A_n = \lim_n C_n$, so ist auch $\lim_n B_n = \lim_n A_n = \lim_n C_n$.*

Aus **17·1·11** folgt:

17·1·21. *Ist $\lim_n A_n = A$, so auch für jede Teilfolge: $\lim_\nu A_{n_\nu} = A$.*

Aus **10·5·4** folgt:

17·1·22. *Ist $A_n = A$ für fast alle n, so ist $\lim_n A_n = A^0$.*

Aus **17·1·22** und **17·1·1** folgt:

17·1·23. *Ist $A_n \subseteqq A$ für fast alle n, so ist $\overline{\lim}_n A_n \subseteqq A^0$.*

Aus (1·1) folgt:

17·1·24. *Sind $((A_n))$ und $((B_n))$ konvergent, so ist $\lim_n (A_n + B_n) = \lim_n A_n + \lim_n B_n$.*

17·1·25. *In einem separablen Raume E enthält jede Mengenfolge $((A_n))$ eine konvergente Teilfolge.*

Sei $H_1, H_2, \ldots, H_\nu, \ldots$ ein ausgezeichnetes System in E offener Mengen. Wir bilden eine Folge von Teilfolgen $A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots, A_{\nu n}, \ldots$ von $((A_n))$ nach folgender Regel: 1. Es sei $A_{1n} = A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$; 2. Ist $A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots, A_{\nu n}, \ldots$ gewählt, und gibt es in dieser Folge eine Teilfolge $((A_{\nu n_i}))$, so daß $A_{\nu n_i} H_\nu = \Lambda$ $(i = 1, 2, \ldots)$, so wähle man für $A_{\nu+1\,1}, A_{\nu+1\,2}, \ldots$ eine solche Teilfolge $A_{\nu n_1}, A_{\nu n_2}, \ldots$; gibt es aber in $A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \ldots$ keine solche Teilfolge, so setze man $A_{\nu+1\,n} = A_{\nu n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Wir zeigen, daß dann $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{nn}, \ldots$ eine konvergente Teilfolge von $((A_n))$ ist; d. h. wir haben zu zeigen: ist $a \sim\varepsilon \underline{\lim}_n A_{nn}$, so ist auch $a \sim\varepsilon \overline{\lim}_n A_{nn}$. Sei also $a \sim\varepsilon \underline{\lim}_n A_{nn}$. Dann gibt es eine Umgebung U_a und eine Teilfolge $((A_{n_i n_i}))$ von $((A_{nn}))$, so daß $U_a A_{n_i n_i} = \Lambda$ für alle i; da die H_ν ein ausgezeichnetes System in E offener Mengen bilden, gibt es ein H_{ν^*}, so daß $a \,\varepsilon\, H_{\nu^*}$, $H_{\nu^*} \subseteqq U_a$; es ist also auch $H_{\nu^*} A_{n_i n_i} = \Lambda$ für alle i. Da die $A_{n_i n_i}$ $(i \geq \nu^*)$ eine Teilfolge von $A_{\nu^* 1}, A_{\nu^* 2}, \ldots$ bilden, ist nach Definition der $A_{\nu n}$ auch $A_{\nu^*+1\,n} H_{\nu^*} = \Lambda$ für alle n; und da die A_{nn} $(n \geq \nu^* + 1)$ eine Teilfolge von $A_{\nu^*+1\,1}, A_{\nu^*+1\,2}, \ldots$ bilden und $a \,\varepsilon\, H_{\nu^*}$ ist, so ist $a \sim\varepsilon \overline{\lim}_n A_{nn}$, w. z. b. w.

Wir vergleichen nun die Begriffe $\underline{\lim}_n$, $\overline{\lim}_n$ mit den Begriffen $\underline{\mathrm{Lim}}_n$, $\overline{\mathrm{Lim}}_n$ von § 3, 7.

17·1·3. $(\underline{\mathrm{Lim}}_n A_n)^0 \subseteqq \underline{\lim}_n A_n$; $(\overline{\mathrm{Lim}}_n A_n)^0 \subseteqq \overline{\lim}_n A_n$.

Sei $a \,\varepsilon\, (\underline{\mathrm{Lim}}_n A_n)^0$; dann ist nach **10·5·4** $U_a \underline{\mathrm{Lim}}_n A_n \supset \Lambda$, also auch $U_a A_n \supset \Lambda$ für fast alle n, also $a \,\varepsilon\, \underline{\lim}_n A_n$. .

17·1·31. $\underline{\mathrm{Lim}}_n A_n^0 \subseteqq \underline{\lim}_n A_n$; $\overline{\mathrm{Lim}}_n A_n^0 \subseteqq \overline{\lim}_n A_n$.

Sei $a \,\varepsilon\, \underline{\mathrm{Lim}}_n A_n^0$; dann ist $a \,\varepsilon\, A_n^0$ für fast alle n, also $U_a A_n \supset \Lambda$ für fast alle n, also $a \,\varepsilon\, \underline{\lim}_n A_n$.

17·1·32. *Ist* $((A_n))$ *monoton abnehmend, so ist* $\lim_n A_n = \mathrm{Lim}_n A_n^0 = \mathop{D}_n A_n^0$.

Nach **3·7·3** ist $\mathrm{Lim}_n A_n^0 = \mathop{D}_n A_n^0$; da nach **17·1·31** $\mathrm{Lim}_n A_n^0 \subseteqq \underline{\lim}_n A_n$, genügt es also zu zeigen: $\overline{\lim}_n A_n = \mathrm{Lim}_n A_n^0$. Da $((A_n))$ monoton abnimmt, ist $A_n = \mathop{S}_{\nu \geqq n} A_\nu$; die Behauptung folgt also aus **17·1·14**.

17·1·33. *Ist* $((A_n))$ *monoton wachsend, so ist* $\lim_n A_n = (\mathrm{Lim}_n A_n)^0 = (\mathop{S}_n A_n)^0$.

Nach **17·1·3** genügt es, zu zeigen, daß $\overline{\lim\limits_n}\, A_n = (\mathop{S}\limits_{\nu} A_\nu)^0$; da $((A_\nu))$ monoton wachsend, also $\mathop{S}\limits_{\nu \geqq n} A_\nu = \mathop{S}\limits_{\nu} A_\nu$, folgt dies aus **17·1·14.**

17·1·4. *Ist B kompakt und $\Lambda \subset A_n \subseteqq B$ für unendlich viele n, so ist $\overline{\lim\limits_n}\, A_n \supset \Lambda$.*

Sei $\Lambda \subset A_{n_i} \subseteqq B$ $(i = 1, 2, \ldots)$ und $a_i \varepsilon A_{n_i}$. Fallen unendlich viele a_i in denselben Punkt a, so ist $a \varepsilon \overline{\lim\limits_n}\, A_n$. Anderenfalls bilden die a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ einen unendlichen Teil A der kompakten Menge B; also ist $A^1 \supset \Lambda$. Ist $a \varepsilon A^1$, so liegen in jedem U_a unendlich viele Punkte von A, also ist $A_n U_a \supset \Lambda$ für unendlich viele n, somit $a \varepsilon \overline{\lim\limits_n}\, A_n$.

17·1·5. *Sind A_n und $A \supset \Lambda$ Mengen eines metrischen Raumes, und gilt für jedes $\varrho > 0$: $A_n \subseteqq U_{A\varrho}$ für fast alle n, so ist $\overline{\lim\limits_n}\, A_n \subseteqq A^0$.*

Sei $a \sim\varepsilon A^0$; dann ist nach **10·5·5** $aA > 0$; für $0 < \varrho < \frac{1}{2}\, aA$ ist $K_{a\varrho} U_{A\varrho} = \Lambda$, also ist $A_n K_{a\varrho} = \Lambda$ für fast alle n, also $a \sim\varepsilon \overline{\lim\limits_n}\, A_n$.

Die Umkehrung hiervon gilt nicht allgemein (Beispiel im R_1: $A_n = \{0, n\}$, $\overline{\lim\limits_n}\, A_n = \{0\}$, $A = \{0\}$), wohl aber in der Form:

17·1·51. *Ist B kompakt, $A \supset \Lambda$, $A_n \subseteqq B$ für fast alle n und $\overline{\lim\limits_n}\, A_n \subseteqq A$, so gilt für jede Umgebung U_A: $A_n \subseteqq U_A$ für fast alle n.*

Anderenfalls wäre $A_n - U_A \supset \Lambda$ für unendlich viele n, also gäbe es nach **17·1·4** ein $a \varepsilon \overline{\lim\limits_n}\, (A_n - U_A)$; nach **17·1·1** ist dann auch $a \varepsilon \overline{\lim\limits_n}\, A_n$, also nach Annahme auch $a \varepsilon A$; andererseits folgt aus **17·1·23**: $\overline{\lim\limits_n}\, (A_n - U_A) \subseteqq (-U_A)^0 = -U_A$, also $a \varepsilon (-U_A)$, also $a \sim\varepsilon A$, im Widerspruche zu der eben bewiesenen Aussage $a \varepsilon A$.

17·1·6. *Sind $A_n \supset \Lambda$ und A Mengen eines metrischen Raumes, und gilt für jedes $\varrho > 0$: $A \subseteqq U_{A_n \varrho}$ für fast alle n, so ist $\underline{\lim\limits_n}\, A_n \supseteqq A^0$.*

Sei $a \varepsilon A^0$ und U_a eine Umgebung von a. Es gibt ein $\varrho > 0$, so daß $K_{a\,2\varrho} \subseteqq U_a$, und ein $a' \varepsilon A$, so daß $a a' < \varrho$. Sobald $A \subseteqq U_{A_n \varrho}$, gibt es ferner ein $a_n \varepsilon A_n$, so daß $a' a_n < \varrho$, mithin $a a_n < 2\varrho$; dann aber ist $a_n \varepsilon K_{a\,2\varrho}$, also $a_n \varepsilon U_a$, also $A_n U_a \supset \Lambda$; also ist $A_n U_a \supset \Lambda$ für fast alle n, d. h. es ist $a \varepsilon \underline{\lim\limits_n}\, A_n$.

Die Umkehrung hiervon gilt nicht allgemein (Beispiel im R_1: $A_n = [-n, n]$, $\underline{\lim\limits_n}\, A_n = R_1$, $A = R_1$), wohl aber in der Form:

17·1·61. *Sind $A_n \supset A$ und A Mengen eines metrischen Raumes, ist A kompakt und $\underline{\lim}_n A_n \supseteqq A$, so gilt für jedes $\varrho > 0$: $A \subseteqq U_{A_n \varrho}$ für fast alle n.*

In der Tat, nach **9·7·1** und **15·1·4** gibt es in A ein endliches $\frac{\varrho}{2}$-Netz, bestehend etwa aus den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Weil $a_i \, \varepsilon \, \underline{\lim}_n A_n$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, gibt es ein N, so daß $K_{a_i \frac{\varrho}{2}} A_n \supset A$ für $i = 1, 2, \ldots, k$ und $n \geqq N$; sei $a_{in} \, \varepsilon \, K_{a_i \frac{\varrho}{2}} A_n$. Ist $a \, \varepsilon \, A$, so gilt für mindestens einen der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_k$, etwa für a_i: $a\, a_i < \frac{\varrho}{2}$; dann aber ist $a\, a_{in} < \varrho$ $(n \geqq N)$, es ist also $a \, \varepsilon \, U_{A_n \varrho}$ für $n \geqq N$, also auch $A \subseteqq U_{A_n \varrho}$ $(n \geqq N)$, wie behauptet.

Machen wir Gebrauch von der Abweichung $e(A, B)$ zweier Mengen (§ 9, 6), so erhalten wir:

17·1·7. *Sind $A_n \supset A$ und $A \supset A$ Mengen eines metrischen Raumes und ist $\lim_n e(A_n, A) = 0$, so ist $\lim_n A_n = A^0$.*

In der Tat, zufolge **17·1·5** ist $\overline{\lim}_n A_n \subseteqq A^0$, zufolge **17·1·6** ist $\underline{\lim}_n A_n \supseteqq A^0$, also ist $\overline{\lim}_n A_n = \underline{\lim}_n A_n = A^0$.

17·1·71. *Sind $A_n \supset A$, $A \supset A$ und B Mengen eines metrischen Raumes, ist B kompakt, $A_n \subseteqq B$ für fast alle n und $\lim_n A_n = A$, so ist $\lim_n e(A_n, A) = 0$.*

In der Tat, nach **17·1·23** ist $\lim_n A_n \subseteqq B^0$; nach **15·2·4** ist B^0 kompakt, also ist auch $\lim_n A_n = A$ kompakt. Nun folgt die Behauptung aus **17·1·51** und **17·1·61.**

Literatur: F. Hausdorff, Mengenlehre § 28.

2. **Häufungspunkte von Punktfolgen.** Besteht in der Mengenfolge $((A_n))$ jede Menge nur aus einem einzigen Punkte: $A_n = \{a_n\}$, so wird das Studium der Mengenfolge $((A_n))$ gleichbedeutend mit dem Studium der Punktfolge $((a_n))$. Die oberen Näherungspunkte von $((A_n))$ heißen dann die Häufungspunkte von $((a_n))$. Es heißt also a ein Häufungspunkt von $((a_n))$, wenn für jede Umgebung U_a gilt: $a_n \, \varepsilon \, U_a$ für unendlich viele n. Bezeichnet A die Menge der in der Folge $((a_n))$ auftretenden Punkte, so ist also jeder Häufungspunkt von A auch ein Häufungspunkt von $((a_n))$; die Umkehrung gilt nur, wenn in $((a_n))$ nicht derselbe Punkt unendlich oft auftritt; denn ist $a_n = a$ für unendlich viele n, so ist nach **17·1·81** a Häufungspunkt von $((a_n))$, braucht aber nicht Häufungspunkt von A zu sein.

Aus den Sätzen **17·1·11**, **17·1·13**, **17·1·1**, **17·1·23** folgert man der Reihe nach:

17·2·1. *Ist $((a_{n_\nu}))$ Teilfolge von $((a_n))$, so ist jeder Häufungspunkt von $((a_{n_\nu}))$ auch Häufungspunkt von $((a_n))$.*

17·2·11. *Die Menge aller Häufungspunkte von $((a_n))$ ist abgeschlossen.*

17·2·2. *Ist $a_n \varepsilon A_n$ für fast alle n, so gehört jeder Häufungspunkt von $((a_n))$ zu $\overline{\lim\limits_n} A_n$.*

17·2·21. *Ist $a_n \varepsilon A$ für fast alle n, so gehört jeder Häufungspunkt von $((a_n))$ zu A^0.*

17·2·3. *Damit B kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß jede Punktfolge aus B mindestens einen Häufungspunkt habe.*

Notwendig: Dies folgt aus **17·1·4.** Hinreichend: Ist B nicht kompakt, so gibt es nach **15·1·1** einen abzählbar unendlichen Teil A von B, so daß $A^1 = \Lambda$. Sind a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ die Punkte von A, so hat $((a_n))$ keinen Häufungspunkt.

17·2·31. *Damit B in sich kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß jede Punktfolge aus B mindestens einen Häufungspunkt $a \varepsilon B$ besitze.*

Dies ist in **17·2·3** enthalten, wenn man als den zugrunde gelegten Raum die Menge B ansieht.

3. **Grenzpunkte von Punktfolgen.** Sei wieder $A_n = \{a_n\}$; wir beschäftigen uns nun mit den unteren Näherungspunkten solcher Mengenfolgen.

17·3·1. *Ist $A_n = \{a_n\}$ und $\underline{\lim\limits_n} A_n \supset \Lambda$, so gibt es einen Punkt a, so daß $\lim\limits_n A_n = \{a\}$.*

Sei $a \varepsilon \underline{\lim\limits_n} A_n$ und $b \neq a$; dann gibt es Umgebungen U_a, U_b, so daß $U_a U_b = \Lambda$; weil $a_n \varepsilon U_a$ für fast alle n, ist $A_n U_b = \Lambda$ für fast alle n, also $b \sim\varepsilon \overline{\lim\limits_n} A_n$, also $\overline{\lim\limits_n} A_n = \{a\}$, also auch $\underline{\lim\limits_n} A_n = \{a\}$, mithin $\lim\limits_n A_n = \{a\}$.

Statt $\lim\limits_n \{a_n\} = \{a\}$ schreiben wir $\lim\limits_n a_n = a$, oder $a_n \to a$, und nennen a den Grenzpunkt der Punktfolge $((a_n))$; die Folge $((a_n))$ heißt dann konvergent; $\lim\limits_n a_n = a$ besagt also: für jede Umgebung U_a gilt: $a_n \varepsilon U_a$ für fast alle n. Nach **17·3·1** ist $a \varepsilon \underline{\lim\limits_n} \{a_n\}$ gleichbedeutend mit $\lim\limits_n a_n = a$.

Ist $a = \lim_n a_n$, so ist a auch Häufungspunkt von $((a_n))$. Aus der Definition folgt unmittelbar:

17·3·2. *Ist $a_n = a$ für fast alle n, so ist $\lim_n a_n = a$.*

17·3·21. *Ist $\lim_n a_n = a$ und $((a_{n_\nu}))$ Teilfolge von $((a_n))$, so ist auch $\lim_\nu a_{n_\nu} = a$.*

17·3·3. *In einem metrischen Raume ist $\lim_n a_n = a$ gleichbedeutend mit $\lim_n a_n\, a = 0$.*

Denn zu jeder Umgebung U_a gibt es ein $\varrho > 0$, so daß $K_{a\varrho} \subseteqq U_a$.

17.3.31. *In einem metrischen Raume folgt aus $\lim_n a_n = a$:*

$$\lim_n a_n\, b = a\, b\,, \qquad \lim_n \, a_n\, B = a\, B\,.$$

Dies ergibt sich wegen **17·3·3** aus § 9 (2) und § 9 (4·11).

17·3·32. *In einem metrischen Raume folgt aus $\lim_n a_n = a$ und $\lim_n b_n = b$: $\lim_n a_n\, b_n = a\, b$.*

Nach § 9 (2) ist $a_n\, b - b\, b_n \leqq a_n\, b_n \leqq a_n\, b + b\, b_n$; die Behauptung folgt also aus **17·3·3** und **17·3·31**.

Ist $\lim_n a_n = a$, so ist auch $\overline{\lim_n} \{a_n\} = \{a\}$, d. h. a ist der einzige Häufungspunkt von $((a_n))$. Die Umkehrung gilt nicht; Beispiel: die Punktfolge $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \ldots, \frac{1}{n}, n, \ldots$ des R_1 hat den einzigen Häufungspunkt 0, ist aber nicht konvergent. Wohl aber gilt:

17·3·4. *Ist B kompakt, $a_n \varepsilon B$, und ist a der einzige Häufungspunkt von $((a_n))$, so ist $\lim_n a_n = a$.*

Denn nach **17·1·51** gilt für jede Umgebung U_a: $a_n \varepsilon U_a$ für fast alle n.

17·3·5. *Ist $a_n \varepsilon A_n$ für fast alle n und ist $\lim_n a_n = a$, so ist $a \varepsilon \underline{\lim_n} A_n$.*

Dies folgt aus **17·1·1.** — Die Umkehrung gilt in der Form:

17·3·51. *Sind die A_n nicht leere Mengen eines separablen oder metrischen Raumes, und ist $a \varepsilon \underline{\lim_n} A_n$, so gibt es ein $a_n \varepsilon A_n$, so daß $\lim_n a_n = a$.*

Sei $((U_{\nu a}))$ eine sich auf a zusammenziehende Umgebungsfolge (**13·1·7**). Da $a \varepsilon \underline{\lim_n} A_n$, gibt es eine wachsende Indizesfolge $((n_\nu))$, so daß $A_n\, U_{\nu a} \supset \Lambda$ für $n \geqq n_\nu$; sei $a_n \varepsilon A_n$ für $n < n_1$ und $a_n \varepsilon A_n\, U_{\nu a}$ für $n_\nu \leqq n < n_{\nu+1}$. Ist U_a eine beliebige Umgebung von a, so ist $U_{\nu a} \subseteqq U_a$ für fast alle ν, also $a_n \varepsilon U_a$ für fast alle n, d. h. $\lim_n a_n = a$.

17·3·52. *Gibt es in* $((A_n))$ *eine Teilfolge* $((A_{n_\nu}))$ *und ein* $a_{n_\nu} \varepsilon A_{n_\nu}$, *so daß* $\lim\limits_\nu a_{n_\nu} = a$, *so ist* $a \varepsilon \overline{\lim\limits_n} A_n$.

Nach **17·2·2** ist $a \varepsilon \overline{\lim\limits_\nu} A_{n_\nu}$, also nach **17·1·11** auch $a \varepsilon \overline{\lim\limits_n} A_n$.

17·3·521. *Sind die* A_n *Mengen eines separablen oder metrischen Raumes, und ist* $a \varepsilon \overline{\lim\limits_n} A_n$, *so gibt es eine Teilfolge* $((A_{n_\nu}))$ *und ein* $a_{n_\nu} \varepsilon A_{n_\nu}$, *so daß* $\lim\limits_\nu a_{n_\nu} = a$.

Sei $((U_{\nu a}))$ eine sich auf a zusammenziehende Umgebungsfolge. Da $a \varepsilon \overline{\lim\limits_n} A_n$, gibt es für unendlich viele n ein $a_n \varepsilon A_n U_{\nu a}$; es gibt also eine wachsende Folge $((n_\nu))$ von Indizes, so daß $a_{n_\nu} \varepsilon A_{n_\nu} U_{\nu a}$; dann aber ist $\lim\limits_\nu a_{n_\nu} = a$.

Setzt man in **17·3·521** $A_n = \{a_n\}$, so erhält man:

17·3·53. *Ist* $((a_n))$ *eine Punktfolge in einem separablen oder metrischen Raume, so gibt es zu jedem Häufungspunkte* a *von* $((a_n))$ *eine Teilfolge* $((a_{n_\nu}))$, *so daß* $\lim\limits_\nu a_{n_\nu} = a$.

17·3·531. *Damit die Punktmenge* B *eines separablen oder metrischen Raumes kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß es in jeder Punktfolge* $((a_n))$ *aus* B *eine konvergente Teilfolge gebe.*

Notwendig: Dies folgt aus **17·2·3** und **17·3·53.** Hinreichend: Dies folgt aus **17·2·3.**

17·3·6. *Ist* A *Punktmenge eines separablen oder metrischen Raumes, so ist, damit* $a \varepsilon A^0$ *sei, notwendig und hinreichend, daß es in* A *eine Punktfolge* $((a_n))$ *mit* $\lim\limits_n a_n = a$ *gebe.*

Notwendig: Sei $((U_{na}))$ eine sich auf a zusammenziehende Umgebungsfolge. Da $a \varepsilon A^0$, gibt es nach **10·5·4** ein $a_n \varepsilon A\, U_{na}$. Ist U_a eine beliebige Umgebung von a, so ist $U_{na} \subseteqq U_a$ für fast alle n, also auch $a_n \varepsilon U_a$ für fast alle n. Hinreichend: Dies folgt aus **17·2·21.**

Ganz ebenso zeigt man, unter Berufung auf **10·4·2**:

17·3·61. *Ist* A *Punktmenge eines separablen oder metrischen Raumes, so ist, damit* $a \varepsilon A^1$ *sei, notwendig und hinreichend, daß es in* A *eine Punktfolge* $((a_n))$ *mit* $a_n \neq a$ *und* $\lim\limits_n a_n = a$ *gebe.*

17·3·62. *Ist* A *Punktmenge eines separablen oder metrischen Raumes, so ist, damit* $a \varepsilon A_i$ *sei, notwendig und hinreichend, daß für jede Punktfolge* $((a_n))$ *mit* $\lim\limits_n a_n = a$ *gelte:* $a_n \varepsilon A$ *für fast alle* n.

Notwendig: Ist $a \varepsilon A_i$, so gibt es ein $U_a \subseteqq A$, und aus $\lim\limits_n a_n = a$ folgt: $a_n \varepsilon U_a$ für fast alle n. Hinreichend: Ist $a \sim\varepsilon A_i$, so ist nach **10·5·11**

$a \varepsilon (-A)^0$, also gibt es nach **17·3·6** eine Punktfolge $((a_n))$ mit $\lim\limits_n a_n = a$ und $a_n \varepsilon (-A)$.

17·3·63. *Ist B Punktmenge eines separablen oder metrischen Raumes und $A \subseteqq B$, so ist, damit A dicht sei in B, notwendig und hinreichend, daß es zu jedem $b \varepsilon B$ in A eine Punktfolge $((a_n))$ mit $\lim\limits_n a_n = b$ gebe.*

Dies folgt aus **11·3·1** und **17·3·6.**

17·3·64. *Ist B Punktmenge eines separablen oder metrischen Raumes und ist A nirgends dicht in B, so gibt es zu jedem $a \varepsilon A$ in $B - A$ eine Punktfolge $((b_n))$ mit $\lim\limits_n b_n = a$.*

Nach **11·2·5** ist $B - A$ dicht in B; die Behauptung folgt daher aus **17·3·63.**

Wegen späterer Anwendungen zeigen wir noch:

17·3·7. *Sind $a = ((k_\nu))$ und $a_n = ((k_\nu^n))$ $(n = 1, 2, \ldots)$ Punkte des R_0, so ist, damit $\lim\limits_n a_n = a$ sei, notwendig und hinreichend, daß es zu jedem ν ein n_ν gebe, so daß $k_\nu^n = k_\nu$ für $n \geqq n_\nu$.*

Notwendig: Ist $\lim\limits_n a_n = a$, so gilt $a_n a \to 0$, also gibt es ein n_ν, so daß $a_n a < \frac{1}{\nu}$ für $n \geqq n_\nu$; dann ist nach § 9 (3·4): $k_\nu^n = k_\nu$ für $n \geqq n_\nu$. Hinreichend: Setzen wir $\bar{n}_\nu = \max(n_1, n_2, \ldots, n_\nu)$, so gilt für $n \geqq \bar{n}_\nu$: $k_1^n = k_1$, $k_2^n = k_2, \ldots, k_\nu^n = k_\nu$; also ist nach § 9 (3·4): $a_n a < \frac{1}{\nu}$ für $n \geqq \bar{n}_\nu$, also gilt $a_n a \to 0$, d. h. $\lim\limits_n a_n = a$.

§ 18. Vollständige Mengen.

1. **Cauchysche Folgen.** Die Punktfolge $((a_n))$ eines metrischen Raumes heißt eine Cauchysche Folge, wenn es zu jedem $\delta > 0$ ein n_δ gibt, so daß $a_n a_{n'} < \delta$ für $n \geqq n_\delta$, $n' \geqq n_\delta$ — oder, was damit gleichbedeutend: wenn es zu jedem $\delta > 0$ ein n_δ gibt, so daß $a_n a_{n_\delta} < \delta$ für $n \geqq n_\delta$. Es folgt sofort:

18·1·1. *Ist $((a_n))$ eine Cauchysche Folge, so auch jede Teilfolge $((a_{n_\nu}))$.*

18·1·2. *Jede konvergente Folge $((a_n))$ eines metrischen Raumes ist eine Cauchysche.*

Denn ist $\lim\limits_n a_n = a$, d. h. gilt $a_n a \to 0$, so gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein n_δ, so daß $a_n a < \frac{\delta}{2}$ für $n \geqq n_\delta$. Ist $n \geqq n_\delta$, $n' \geqq n_\delta$, so ist also $a_n a < \frac{\delta}{2}$, $a_{n'} a < \frac{\delta}{2}$, mithin $a_n a_{n'} < \delta$.

18·1·3. *Ist $((a_n))$ eine Cauchysche Folge und a Häufungspunkt von $((a_n))$, so ist $\lim\limits_n a_n = a$.*

Denn es gibt zu jedem $\delta > 0$ ein n_δ, so daß $a_n a_{n'} < \frac{\delta}{2}$ für $n \geq n_\delta$, $n' \geq n_\delta$; da a Häufungspunkt von $((a_n))$, gibt es ein $n' \geq n_\delta$, so daß $a_{n'} a < \frac{\delta}{2}$; dann aber ist $a_n a \leq a_n a_{n'} + a_{n'} a < \delta$ für $n \geq n_\delta$, d. h. $\lim\limits_n a_n = a$.

Wir nennen die Punktfolge $((a_n))$ eines metrischen Raumes E **beschränkt**, wenn es eine Zahl d gibt, so daß $a_n a_{n'} \leq d$ für alle n und n'; nach **9·6·2** und **9·6·21** ist damit gleichbedeutend: „zu jedem $c \,\varepsilon\, E$ gibt es ein δ_c, so daß $a_n c \leq \delta_c$ für alle n“, sowie: „es gibt ein $c \,\varepsilon\, E$ und ein δ, so daß $a_n c \leq \delta$ für alle n“.

18·1·4. *Jede Cauchysche Folge $((a_n))$ ist beschränkt.*

Denn es gibt ein n_1, so daß $a_n a_{n_1} < 1$ für $n \geq n_1$; setzen wir $\delta = \max(a_1 a_{n_1}, a_2 a_{n_1}, \ldots, a_{n_1-1} a_{n_1}, 1)$, so ist $a_n a_{n_1} \leq \delta$ für alle n.

18·1·5. *Für je zwei Cauchysche Folgen $((a_n))$, $((b_n))$ eines metrischen Raumes existiert der endliche Grenzwert $\lim\limits_n a_n b_n$.*

Wegen der Dreiecksungleichung ist: $a_{n'} b_{n'} \leq a_{n'} a_n + a_n b_n + b_n b_{n'}$; da $((a_n))$, $((b_n))$ Cauchysche Folgen, gibt es ein n_δ, so daß hierin: $a_{n'} a_n < \delta$, $b_n b_{n'} < \delta$ für $n \geq n_\delta$, $n' \geq n_\delta$; also ist $a_{n'} b_{n'} < a_n b_n + 2\delta$ für $n \geq n_\delta$, $n' \geq n_\delta$. Ebenso erhält man: $a_n b_n < a_{n'} b_{n'} + 2\delta$ für $n \geq n_\delta$, $n' \geq n_\delta$; also ist $\left| a_{n'} b_{n'} - a_n b_n \right| < 2\delta$ für $n \geq n_\xi$, $n' \geq n_\delta$, d. h. es existiert der endliche Grenzwert $\lim\limits_n a_n b_n$.

2. **Vollständige Mengen.** Eine Punktmenge A eines metrischen Raumes heißt **vollständig**, wenn jede Cauchysche Folge aus A einen zu A gehörigen Grenzpunkt hat. Der Begriff „vollständig“ hat absoluten Charakter[1]).

18·2·1. *Die Summe zweier vollständiger Mengen A, B ist vollständig.*

Sei $((c_n))$ eine Cauchysche Folge aus $A + B$; dann gilt sei es $c_n \,\varepsilon\, A$, sei es $c_n \,\varepsilon\, B$ für unendlich viele n; sei etwa $c_{n_\nu} \,\varepsilon\, A$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$; nach **18·1·1** ist $((c_{n_\nu}))$ eine Cauchysche Folge, also hat, weil A vollständig, $((c_{n_\nu}))$ einen Grenzpunkt $a \,\varepsilon\, A$; nach **17·2·1** ist a Häufungspunkt von $((c_n))$, also nach **18·1·3** $\lim\limits_n c_n = a$, und wegen $a \,\varepsilon\, A$ ist auch $a \,\varepsilon\, A + B$.

[1]) D. h. ist die metrische Menge A vollständig bei Zugrundelegung des metrischen Raumes $E \supseteqq A$, so auch bei Zugrundelegung jedes anderen metrischen Raumes $E' \supseteqq A$.

18·2·11. *Der Durchschnitt eines (endlichen oder unendlichen) Systemes vollständiger Mengen ist vollständig.*

Dies folgt unmittelbar aus der Definition.

Aus 18·2·1 und 18·2·11 folgt:

18·2·12. *Das System aller vollständigen Mengen eines metrischen Raumes ist ein δ-Ring.*

Der bekannte Satz, daß jede Cauchysche Folge reeller Zahlen einen Grenzwert besitzt, besagt:

18·2·2. *Der R_1 ist vollständig.*

Daß auch der R_n vollständig ist, werden wir daraus in 20·2·8 folgern.

18·2·21. *Der R_ω ist vollständig.*

Sei $((a_n))$ eine Cauchysche Punktfolge im R_ω; wir haben zu zeigen: es gibt ein $a \varepsilon R_\omega$, so daß $\lim\limits_n a_n = a$. Seien $x_{n\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ die Koordinaten von a_n; aus $a_n a_{n'} < \delta$ folgt dann $|x_{n\nu} - x_{n'\nu}| < \delta$, also ist $x_{1\nu}, x_{2\nu}, \ldots, x_{n\nu}, \ldots$ für jedes ν eine Cauchysche Folge reeller Zahlen, es existiert also $\lim\limits_n x_{n\nu} = x_\nu$. Wir setzen $a = ((x_\nu))$ und zeigen: $a \varepsilon R_\omega$, d. h. $\sum\limits_\nu x_\nu^2$ ist endlich. Nach 18·1·4 ist die Punktfolge $((a_n))$ beschränkt; es gibt also ein ϱ, so daß $\sum\limits_\nu x_{n\nu}^2 \leq \varrho$ für alle n; daher ist auch $\sum\limits_{\nu=1}^{k} x_{n\nu}^2 \leq \varrho$, also auch $\sum\limits_{\nu=1}^{k} x_\nu^2 \leq \varrho$, also auch $\sum\limits_\nu x_\nu^2 \leq \varrho$, w. z. b. w. — Nun haben wir noch zu zeigen: $\lim\limits_n a_n = a$; nach 17·3·3 ist dies gleichbedeutend mit $\lim\limits_n a_n a = 0$, d. h. mit $\lim\limits_n \sum\limits_\nu (x_{n\nu} - x_\nu)^2 = 0$. Da $((a_n))$ eine Cauchysche Folge, ist $a_n a_{n'} < \delta$ für $n \geq n_\delta$, $n' \geq n_\delta$, also: $\sum\limits_{\nu=1}^{k} (x_{n\nu} - x_{n'\nu})^2 < \delta^2$ für $n \geq n_\delta$, $n' \geq n_\delta$, also auch $\sum\limits_{\nu=1}^{k} (x_{n\nu} - x_\nu)^2 \leq \delta^2$ für $n \geq n_\delta$, und mithin auch $\sum\limits_\nu (x_{n\nu} - x_\nu)^2 \leq \delta^2$ für $n \geq n_\delta$; d. h. es ist $\lim\limits_n \sum\limits_\nu (x_{n\nu} - x_\nu)^2 = 0$, w. z. b. w.

18·2·22. *Der R_0 ist vollständig.*

Eine Folge von Punkten $a_n = ((k_{n\nu}))$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des R_0 ist eine Cauchysche Folge dann und nur dann, wenn es zu jedem ν ein n_ν und eine natürliche Zahl k_ν gibt, so daß $k_{n\nu} = k_\nu$ für $n \geq n_\nu$; setzen wir $a = ((k_\nu))$, so ist $a \varepsilon R_0$ und nach 17·3·7: $\lim\limits_n a_n = a$.

Literatur: Der Begriff des vollständigen Raumes stammt von M. Fréchet, Rend. Pal. 22 (1906) S. 23.

3. **Kompakte Mengen in vollständigen Räumen.** Ganz allgemein gilt:

18·3·1. *Jede in sich kompakte metrische Menge A ist vollständig.*

Sei $((a_n))$ eine Cauchysche Folge aus A. Nach **17·2·31** besitzt sie einen Häufungspunkt $a \varepsilon A$; nach **18·1·3** ist $\lim a_n = a$, also ist A vollständig.

18·3·2. *Damit die Menge A des vollständigen Raumes E kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß es in jeder Folge $((a_n))$ aus A eine Cauchysche Teilfolge gebe.*

Notwendig: Ist A kompakt, so besitzt $((a_n))$ nach **17·2·3** einen Häufungspunkt a; nach **17·3·53** gibt es eine Teilfolge mit $\lim\limits_{\nu} a_{n_\nu} = a$; nach **18·1·2** ist $((a_{n_\nu}))$ eine Cauchysche Folge. Hinreichend: Da der Raum E vollständig, ist jede Cauchysche Folge konvergent; die Behauptung folgt also aus **17·3·531.**

18·3·3. *Damit die Menge A eines vollständigen Raumes kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß jedes ϱ-Netz in A endlich sei.*

Notwendig: Dies ist enthalten in **15·1·4.** Hinreichend: Sei B_n ein $\frac{1}{n}$-Netz in A; nach Annahme ist B_n endlich, etwa $B_n = \{b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{nk_n}\}$; dann ist

$$A \subseteqq \mathop{S}_{i=1}^{k_n} K_{b_{ni}\frac{1}{n}}. \tag{3}$$

Wir bezeichnen die endlich vielen Kugeln $K_{b_{1i}1}$ mit K_{1m}, die endlich vielen Durchschnitte $K_{b_{1i}1}\, K_{b_{2j}\frac{1}{2}}$ mit K_{2m}, die endlich vielen Durchschnitte $K_{b_{1i}1}\, K_{b_{2j}\frac{1}{2}}\, K_{b_{3k}\frac{1}{3}}$ mit K_{3m} usf. Ist $((a_n))$ eine beliebige Punktfolge aus A, so muß es unter den endlich vielen Kugeln K_{1m} wegen (3) mindestens eine, etwa K_{1m_1}, geben, so daß $a_n \varepsilon K_{1m_1}$ für unendlich viele n; ebenso muß es ein $K_{2m_2} \subseteqq K_{1m_1}$ geben, so daß $a_n \varepsilon K_{2m_2}$ für unendlich viele n, ebenso ein $K_{3m_3} \subseteqq K_{2m_2}$ usf. Es gibt also eine wachsende Indizesfolge $((n_i))$, so daß $a_{n_i} \varepsilon K_{im_i}$; wegen $K_{i+1\, m_{i+1}} \subseteqq K_{im_i}$ ist $a_{n_j} \varepsilon K_{im_i}$ für $j \geq i$; da $d(K_{im_i}) \leq \frac{2}{i}$, ist also $((a_{n_i}))$ eine Cauchysche Teilfolge von $((a_n))$; nach **18·3·2** ist somit A kompakt.

4. **Vervollständigung eines Raumes.** Wir nennen zwei Cauchysche Folgen $((a_n))$, $((b_n))$ zusammengehörig, in Zeichen $((a_n)) \longleftrightarrow ((b_n))$, wenn $\lim\limits_{n} a_n b_n = 0$. Dann gilt:

18·4·1. *Aus* $((a_n)) \longleftrightarrow ((a'_n))$, $((b_n)) \longleftrightarrow ((b'_n))$ *folgt:* $\lim\limits_{n} a_n b_n = \lim\limits_{n} a'_n b'_n$.

Denn nach der Dreiecksungleichung ist: $a_n b_n \leq a_n a'_n + a'_n b'_n + b'_n b_n$. Hierin ist $\lim_n a_n a'_n = 0$, $\lim_n b_n b'_n = 0$, also wegen 18·1·5: $\lim_n a_n b_n \leq \lim_n a'_n b'_n$. Ganz ebenso: $\lim_n a'_n b'_n \leq \lim_n a_n b_n$, also ist $\lim_n a_n b_n = \lim_n a'_n b'_n$.

Die Relation $\longleftrightarrow$ ist offenbar reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Gleichheitsrelation (§ 4, 1). Die Gesamtheit aller Cauchyschen Folgen aus E zerfällt also in fremde Klassen untereinander zusammengehöriger. Diese Klassen bezeichnen wir mit kleinen griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \ldots$, die Menge aller dieser Klassen mit $\bar{K}$. Auf Grund von 18·1·5 und 18·4·1 können wir in $\bar{K}$ einen Abstand definieren durch: Ist $((a_n)) \varepsilon \alpha$, $((b_n)) \varepsilon \beta$, so sei:

$$\alpha \beta = \lim_n a_n b_n . \tag{4}$$

Da diese Abstandsdefinition offenbar den metrischen Axiomen 1_m), 2_m) genügt (§ 9, 2), so ist dadurch $\bar{K}$ zu einem metrischen Raum gemacht.

Die Gesamtheit aller Folgen $((a_n))$ mit $\lim_n a_n = a$ bildet eine Klasse $\alpha \varepsilon \bar{K}$; denn einerseits folgt aus $\lim_n a_n = a$, $\lim_n b_n = a$, wegen $a_n b_n \leq a_n a + a b_n$, sofort $\lim_n a_n b_n = 0$, d. h. $((a_n)) \longleftrightarrow ((b_n))$; andererseits folgt aus $((a_n)) \longleftrightarrow ((b_n))$ und $\lim_n a_n = a$, wegen $b_n a \leq b_n a_n + a_n a$, auch $\lim_n b_n a = 0$, d. h. $\lim_n b_n = a$. Wir nennen die Klasse aller $((a_n))$ mit $\lim_n a_n = a$ die zu a gehörige Klasse. Setzt man in (4) alle $a_n = a$, alle $b_n = b$, so sieht man: Ist α die zu a, β die zu b gehörige Klasse, so ist $\alpha \beta = a b$; mithin:

18·4·2. *Die Menge K aller zu den Punkten von E gehörigen $\alpha \varepsilon \bar{K}$ ist mit E isometrisch.*

Indem man in (4) alle $a_n = a$ setzt, erhält man: Ist α die zu a gehörige Klasse und $((b_n)) \varepsilon \beta$, so ist:

$$\alpha \beta = \lim_n a\, b_n . \tag{4·1}$$

Daraus folgern wir:

18·4·3. *Ist $((a_n)) \varepsilon \alpha$ und α_n die zu a_n gehörige Klasse, so ist* $\lim_n \alpha_n = \alpha$.

Denn nach (4·1) ist $\alpha_n \alpha = \lim_\nu a_n a_\nu$; da $((a_n))$ eine Cauchysche Folge, gibt es ein n_δ, so daß $a_n a_\nu < \delta$ für $n \geq n_\delta$, $\nu \geq n_\delta$; also ist $\lim_\nu a_n a_\nu \leq \delta$ für $n \geq n_\delta$, d. h. $\alpha_n \alpha \leq \delta$ für $n \geq n_\delta$, d. h. $\lim_n \alpha_n \alpha = 0$, d. h. $\lim_n \alpha_n = \alpha$.

18·4·4. *K ist dicht in $\bar{K}$.*

Denn ist $\alpha \varepsilon \bar{K}$, $((a_n)) \varepsilon \alpha$ und α_n die zu a_n gehörige Klasse, so ist nach **18·4·3** $\lim\limits_n \alpha_n = \alpha$, und da $\alpha_n \varepsilon K$, ist nach **17·3·63** K dicht in $\bar{K}$.

18·4·5. *$\bar{K}$ ist vollständig.*

Sei in der Tat $((\alpha_n))$ eine Cauchysche Folge aus $\bar{K}$. Wegen **18·4·4** gibt es ein $\beta_n \varepsilon K$, so daß $\alpha_n \beta_n < \frac{1}{n}$. Dann ist $\beta_n \beta_{n'} \leqq \beta_n \alpha_n + \alpha_n \alpha_{n'} + \alpha_{n'} \beta_{n'} < \alpha_n \alpha_{n'} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n'}$; es ist also $((\beta_n))$ ebenso wie $((\alpha_n))$ eine Cauchysche Folge. Wegen $\beta_n \varepsilon K$ gibt es ein $b_n \varepsilon E$, dessen zugehörige Klasse β_n ist, und wegen **18·4·2** ist auch $((b_n))$ eine Cauchysche Folge. Also gibt es ein $\beta \varepsilon \bar{K}$, so daß $((b_n)) \varepsilon \beta$. Nach **18·4·3** ist dann $\lim\limits_n \beta_n = \beta$, und wegen $\alpha_n \beta_n < \frac{1}{n}$ folgt daraus auch $\lim\limits_n \alpha_n = \beta$. Die Cauchysche Folge $((\alpha_n))$ hat also einen Grenzpunkt $\beta \varepsilon \bar{K}$, d. h. $\bar{K}$ ist vollständig.

Ersetzen wir nun in $\bar{K}$ den Teil K durch die nach **18·4·2** isometrische Menge E, so entsteht ein vollständiger Raum $\bar{E} \supseteqq E$, und wir haben bei Berücksichtigung von **18·4·4**:

18·4·6. *Zu jedem metrischen Raum E gibt es einen vollständigen Raum $\bar{E} \supseteqq E$, in dem E dicht ist.*

Wir beschränken also in keiner Weise die Allgemeinheit, wenn wir den zugrunde gelegten Raum E als vollständig voraussetzen.

18·4·61. *Zu jedem separablen metrischen Raum E gibt es einen vollständigen, separablen Raum $\bar{E} \supseteqq E$.*

Dies folgt aus **18·4·6** und **18·1·4**.

18·4·7. *Ist E^* ein vollständiger Raum $\supseteqq E$ und E^0 die abgeschlossene Hülle von E in E^*, so ist E^0 isometrisch mit $\bar{K}$.*

Nach **17·3·6** gibt es zu jedem $a \varepsilon E^0$ in E eine Folge $((a_n))$ mit $\lim\limits_n a_n = a$; die Klasse aller Folgen $((a_n))$ aus E mit $\lim\limits_n a_n = a$ ist offenbar eine der Klassen $\alpha \varepsilon \bar{K}$; wir nennen sie α_a. Dadurch ist eine eineindeutige Abbildung von E^0 auf $\bar{K}$ gegeben; denn ist $\alpha \varepsilon \bar{K}$ und $((a_n)) \varepsilon \alpha$, so ist $((a_n))$ eine Cauchysche Folge in E, also auch eine Cauchysche Folge im vollständigen Raume E^*, besitzt also einen Grenzpunkt $a \varepsilon E^*$; nach **17·3·6** ist $a \varepsilon E^0$, und offenbar ist $\alpha = \alpha_a$. Diese eineindeutige Abbildung von E^0 auf $\bar{K}$ ist isometrisch; denn ist $a \varepsilon E^0$, $b \varepsilon E^0$ und sind $((a_n))$, $((b_n))$ Folgen aus E mit

$\lim\limits_n a_n = a$, $\lim\limits_n b_n = b$, so ist nach **17·3·32** $a\,b = \lim\limits_n a_n b_n$ und nach (4) auch $\alpha_a\,\alpha_b = \lim\limits_n a_n\,b_n$, also $\alpha_a\,\alpha_b = a\,b$.

18·4·71. *Ist A eine metrische Menge und sind E^*, E^{**} vollständige Räume $\supseteqq A$, so sind die abgeschlossenen Hüllen von A in E^* und E^{**} isometrisch.*

Dies folgt für $E = A$ aus **18·4·7.**

Literatur: Die vorstehende Theorie der Vervollständigung eines Raumes stammt von F. Hausdorff, Mengenlehre S. 106.

5. **Absolut abgeschlossene Mengen.** Ganz allgemein gilt:

18·5·1. *Jede vollständige Menge A ist abgeschlossen.*

Sei $a \varepsilon A^1$; nach **17·3·61** gibt es in A eine Folge $((a_n))$ mit $\lim\limits_n a_n = a$; nach **18·1·2** ist $((a_n))$ eine Cauchysche Folge; weil A vollständig, ist also $a \varepsilon A$. Aus $a \varepsilon A^1$ folgt also $a \varepsilon A$, somit ist A nach **10·5·61** abgeschlossen.

18·5·11. *Jede in einer vollständigen Menge B abgeschlossene Menge A ist vollständig.*

Sei $((a_n))$ eine Cauchysche Folge aus A; weil B vollständig, besitzt $((a_n))$ einen Grenzpunkt $a \varepsilon B$; nach **17·3·6** ist $a \varepsilon A^0\,B$; weil A abgeschlossen in B, folgt daraus nach **10·8·3** $a \varepsilon A$, also ist A vollständig.

Wir nennen eine metrische Menge A **absolut abgeschlossen**, wenn sie in jedem metrischen Raume $E \supseteqq A$ abgeschlossen ist. Dann gilt:

18·5·2. *Damit die metrische Menge A absolut abgeschlossen sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie vollständig sei.*

Notwendig: Da es nach **18·4·6** einen vollständigen Raum $E \supseteqq A$ gibt, folgt dies aus **18·5·11.** Hinreichend: Dies ist enthalten in **18·5·1.**

Wir nennen eine metrische Menge A ein **absolutes F_σ**, wenn sie in jedem metrischen Raume $E \supseteqq A$ ein F_σ ist. Aus **18·5·2** folgt:

18·5·21. *Damit eine metrische Menge ein absolutes F_σ sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie Summe abzählbar vieler vollständiger Mengen sei.*

Eine metrische Menge $A \neq \Lambda$, die absolut offen (d. h. offen in jedem metrischen Raume $E \supseteqq A$) wäre, kann es nicht geben; sei nämlich $a_0 \varepsilon A$; wir bilden einen metrischen Raum $E \supset A$, indem wir zu A noch abzählbar unendlich viele Elemente b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ mit den Abstandsdefinitionen

$$a\,b_n = a\,a_0 + \frac{1}{n} \quad \text{für alle } a \varepsilon A, \qquad b_n\,b_{n'} = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right|$$

hinzufügen; dann ist $a_0\,b_n = \frac{1}{n}$, also $\lim\limits_n b_n = a_0$, und da $b_n \sim\varepsilon A$, ist nach

17·3·62 a_0 nicht innerer Punkt von A, also ist nach 10·3·6 A nicht offen in E. — Wohl aber gibt es absolute G_δ; wir werden uns mit ihnen ausführlich in § 19 beschäftigen.

Literatur: P. Alexandroff u. P. Urysohn, Math. Ann. 92 (1924) S. 261.

6. **Durchschnittssätze.** Für vollständige Mengen gilt folgender Durchschnittssatz:

18·6·1. *Ist* $((A_n))$ *eine monoton abnehmende Folge nicht leerer vollständiger Mengen mit* (§ 9, 6) $\lim\limits_n d(A_n) = 0$, *so gibt es ein* a, *so daß* $\underset{n}{D} A_n = \{a\}$.

Sei $a_n \varepsilon A_n$; da dann auch $a_{n'} \varepsilon A_n$ für $n' \geq n$, ist $a_n a_{n'} \leq d(A_n)$ für $n' \geq n$; wegen $d(A_n) \to 0$ ist also $((a_n))$ eine Cauchysche Folge; da $a_{n'} \varepsilon A_n$ für $n' \geq n$, und da A_n vollständig, hat $((a_n))$ einen Grenzpunkt $a \varepsilon A_n$; da dies für alle n gilt, ist $a \varepsilon \underset{n}{D} A_n$. Ist auch $b \varepsilon \underset{n}{D} A_n$, so ist $a\, b \leq d(A_n)$ für alle n, wegen $d(A_n) \to 0$ also $a\, b = 0$, d. h. $b = a$. Also ist $\underset{n}{D} A_n = \{a\}$.

In vollständigen Räumen gilt folgende Verschärfung von 11·1·51:

18·6·2. *In einem vollständigen Raume E ist der Durchschnitt abzählbar vieler offener dichter Mengen dicht.*

Sei $A = \underset{n}{D} G_n$, wo G_n offen und dicht. Nach 11·1·3 haben wir zu zeigen: ist $G \supset A$ und offen, so ist $A\, G \supset A$. Da G_1 dicht, gibt es nach 11·1·3 ein $a_1 \varepsilon G_1 G$. Da $G_1 G$ offen, gibt es ein $\varrho_1 > 0$ und ≤ 1, so daß die abgeschlossene Kugel $\overline{K}_{a_1 \varrho_1} \subseteqq G_1 G$. Da G_2 dicht, gibt es nach 11·1·3 ein $a_2 \varepsilon G_2 K_{a_1 \varrho_1}$ und ein $\varrho_2 > 0$ und $\leq \frac{1}{2}$, so daß $\overline{K}_{a_2 \varrho_2} \subseteqq G_2 K_{a_1 \varrho_1}$. Da G_3 dicht, gibt es ein $a_3 \varepsilon G_3 K_{a_2 \varrho_2}$ und ein $\varrho_3 > 0$ und $\leq \frac{1}{3}$, so daß $\overline{K}_{a_3 \varrho_3} \subseteqq G_3 K_{a_2 \varrho_2}$ usf. Da die Folge der $\overline{K}_{a_n \varrho_n}$ monoton abnehmend, $\varrho_n \to 0$, und $\overline{K}_{a_n \varrho_n}$ nach 18·5·11 vollständig, gibt es nach 18·6·1 ein $a \varepsilon \underset{n}{D} \overline{K}_{a_n \varrho_n}$; da $\overline{K}_{a_n \varrho_n} \subseteqq G_n$, ist auch $a \varepsilon \underset{n}{D} G_n$, d. h. $a \varepsilon A$; da $\overline{K}_{a_1 \varrho_1} \subseteqq G$, ist auch $a \varepsilon G$, also $a \varepsilon A\, G$, somit $A\, G \supset A$, w. z. b. w.

Literatur: Eine Verallgemeinerung von Satz 18·6·1 bei C. Kuratowski, Fund. math. 15 (1930) S. 302.

7. **Dyadische Schemata.** Wir nennen ein System endlich vieler Zahlen $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ einen **dyadischen Komplex**, wenn jede seiner „Stellen" k_i einen der beiden Werte 0, 1 hat; ebenso nennen wir $((k_\nu))$ eine **dyadische Folge**, wenn jede Stelle k_ν einen der beiden Werte 0, 1 hat.

18·7·1. *Zu jeder Folge dyadischer Komplexe* $(k_1^n, k_2^n, \ldots, k_n^n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *gibt es eine dyadische Folge* $k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots$, *so daß für jedes* ν *unendlich viele Komplexe* $(k_1^n, k_2^n, \ldots k_n^n)$ $(n \geq \nu)$ *mit den* ν *Stellen* $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ *beginnen.*

In der Tat, da alle auftretenden Stellen nur die Werte 0, 1 haben, muß es unter den Komplexen $(k_1^n, k_2^n, \ldots, k_n^n)$ unendlich viele mit gleichem Werte k_1 der ersten Stelle geben, unter diesen unendlich viele mit gleichem Werte k_2 der zweiten Stelle usf. Die so gebildete Folge $k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots$ leistet das Verlangte.

Sei nun jedem dyadischen Komplexe $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ eine Menge $A_{k_1 k_2 \ldots k_n} \supset \Lambda$ zugeordnet. Wir sagen, diese Mengen bilden ein dyadisches Schema, wenn sie folgenden Bedingungen genügen:

1. Jede Menge $A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ ist vollständig.

2. $$A_{k_1 k_2 \ldots k_n} \supseteqq A_{k_1 k_2 \ldots k_n k_{n+1}}.$$

3. Für jede dyadische Folge $((k_\nu))$ gilt $d(A_{k_1 k_2 \ldots k_\nu}) \to 0$.

In einem dyadischen Schema bezeichnen wir die Mengen $A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ mit n Indizes als die Mengen n-ter Stufe.

18·7·2. *Ist* d_n *der größte unter den Durchmessern der* 2^n *Mengen* n*-ter Stufe eines dyadischen Schemas, so gilt* $d_n \to 0$.

Angenommen, es wäre nicht $d_n \to 0$; da wegen 2. offenbar $d_{n+1} \leq d_n$, gäbe es dann ein $p > 0$, so daß $d_n \geq p$ für alle n. Nach Definition von d_n gibt es eine Menge $A_{k_1^n k_2^n \ldots k_n^n}$ n-ter Stufe, deren Durchmesser $= d_n$ ist. Nach 18·7·1 gibt es eine dyadische Folge $k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots$, so daß unendlich viele $(k_1^n, k_2^n, \ldots, k_n^n)$ mit den ν Stellen $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ beginnen; für diese Komplexe ist $A_{k_1^n k_2^n \ldots k_n^n} \subseteqq A_{k_1 k_2 \ldots k_\nu}$, also $d(A_{k_1 k_2 \ldots k_\nu}) \geq d(A_{k_1^n k_2^n \ldots k_n^n}) = d_n$, es wäre also $d(A_{k_1 k_2 \ldots k_\nu}) \geq p\ (> 0)$ für alle ν, entgegen 3.

Wegen 18·6·1 besteht für jede dyadische Folge $((k_\nu))$ der Durchschnitt $A_{k_1} A_{k_1 k_2} \ldots A_{k_1 k_2 \ldots k_\nu} \ldots$ aus genau einem Punkte, den wir mit $a_{((k_\nu))}$ bezeichnen. Natürlich können verschiedene dyadische Folgen denselben Punkt $a_{((k_\nu))}$ liefern.

Wir betrachten eine Folge dyadischer Folgen $((k_\nu^1)), ((k_\nu^2)), \ldots, ((k_\nu^i)), \ldots$ Es gilt:

18·7·3. *Gibt es zu jedem* n *ein* i_n, *so daß für* $i \geq i_n$ *die ersten* n *Stellen von* $((k_\nu^i))$ *mit den ersten* n *Stellen von* $((k_\nu))$ *übereinstimmen, so ist* $\lim\limits_i a_{((k_\nu^i))} = a_{((k_\nu))}$.

Wir setzen: $a_{((k_\nu^i))} = a_i$, $a_{((k_\nu))} = a$. Für $i \geq i_n$ ist $A_{k_1^i \ldots k_n^i} = A_{k_1 \ldots k_n}$, also auch $a_i \,\varepsilon\, A_{k_1 \ldots k_n}$; da auch $a \,\varepsilon\, A_{k_1 \ldots k_n}$, ist also $a a_i \leq d(A_{k_1 \ldots k_n})$ für $i \geq i_n$; wegen $d(A_{k_1 \ldots k_n}) \to 0$ gilt also auch $a a_i \to 0$, d. h. $\lim\limits_i a_i = a$.

8. Dyadisch darstellbare Mengen. Sei ein dyadisches Schema, bestehend aus den Mengen $A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ gegeben. Zu jeder dyadischen Folge $((k_\nu))$ bilden wir den zugehörigen Punkt $a_{((k_\nu))}$, d. h. den einzigen Punkt des Durchschnittes $A_{k_1} A_{k_1 k_2} \ldots A_{k_1 k_2 \ldots k_\nu} \ldots$ Die Menge A aller dieser Punkte nennen wir die durch unser dyadisches Schema dargestellte Menge; sie kann auch so aufgeschrieben werden:

$$A = \underset{((k_\nu))}{S} A_{k_1} A_{k_1 k_2} \ldots A_{k_1 k_2 \ldots k_\nu} \ldots \tag{8}$$

(die Summe erstreckt sich über alle möglichen dyadischen Folgen $((k_\nu))$). Natürlich kann ein und dieselbe Menge durch verschiedene dyadische Schemata dargestellt werden. Jede durch ein dyadisches Schema dargestellte Menge heißt eine *dyadisch darstellbare* Menge.

Wir bezeichnen nun mit $A^{(\nu)}$ die Summe der 2^ν Mengen ν-ter Stufe im dyadischen Schema der $A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$. Als Summe endlich vieler vollständiger Mengen ist auch $A^{(\nu)}$ nach **18·2·1** vollständig.

18·8·1. *Die Menge* (8) *ist auch gegeben durch*: $A = \underset{\nu}{D} A^{(\nu)}$.

Daß $A \subseteqq \underset{\nu}{D} A^{(\nu)}$ ist, ist evident. Sei umgekehrt $a \varepsilon \underset{\nu}{D} A^{(\nu)}$; dann gibt es für jedes n einen Komplex $(k_1^n, k_2^n, \ldots, k_n^n)$, so daß $a \varepsilon A_{k_1^n k_2^n \ldots k_n^n}$; nach **18·7·1** gibt es dann auch eine dyadische Folge $((k_\nu))$, so daß $a \varepsilon A_{k_1 k_2 \ldots k_\nu}$ für jedes ν; dann aber ist $a \varepsilon A$. Es ist also auch $\underset{\nu}{D} A^{(\nu)} \subseteqq A$.

18·8·2. *Damit die metrische Menge $A \supset A$ dyadisch darstellbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie in sich kompakt sei.*

Notwendig: Sei A darstellbar durch das dyadische Schema $A_{k_1 k_2 \ldots k_\nu}$ und sei $((a_i))$ eine Punktfolge aus A. Unter den Mengen n-ter Stufe gibt es mindestens eine, etwa $A_{k_1^n k_2^n \ldots k_n^n}$, die unendlich viele Glieder von $((a_i))$ enthält; nach **18·7·1** gibt es also eine dyadische Folge $((k_\nu))$, so daß (für jedes ν) $A_{k_1 k_2 \ldots k_\nu}$ unendlich viele Glieder von $((a_i))$ enthält. Sei $a = a_{((k_\nu))}$ der zugehörige Punkt von A; dann ist a Häufungspunkt von $((a_i))$; denn wegen $d(A_{k_1 k_2 \ldots k_\nu}) \to 0$ ist für fast alle ν: $A_{k_1 k_2 \ldots k_\nu} \subseteqq K_{a\varrho}$, und $A_{k_1 k_2 \ldots k_\nu}$ enthält unendlich viele Glieder von $((a_i))$. Jede Folge $((a_i))$ aus A hat also einen Häufungspunkt $a \varepsilon A$, somit ist A nach **17·2·31** in sich kompakt. Hinreichend: Sei A in sich kompakt. Nach **9·7·1** und **15·1·4** gibt es ein endliches 1-Netz in A, bestehend etwa aus den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_k$; dann ist, wenn $\overline{K}_{a_i 1}$ die abgeschlossene Kugel vom Mittelpunkt a_i und Radius 1 bedeutet: $A = \overset{k}{\underset{i=1}{S}} A \overline{K}_{a_i 1}$; nach **15·2·3** ist hierin jeder Summand in sich kom-

pakt, also nach **18·8·1** vollständig; ferner ist jeder Summand enthalten in einer abgeschlossenen Kugel vom Radius 1; indem wir eventuell einen Summanden mehrmals anschreiben, können wir annehmen, ihre Anzahl sei eine Potenz 2^{n_1} von 2; wir nehmen diese 2^{n_1} Summanden als die Mengen n_1-ter Stufe $A_{k_1 k_2 \ldots k_{n_1}}$ eines dyadischen Schemas (die Mengen niedrigerer Stufe können etwa alle $= A$ gewählt werden). Da jede dieser Mengen $A_{k_1 k_2 \ldots k_{n_1}}$ in sich kompakt ist, zeigt derselbe Schluß: jede Menge $A_{k_1 k_2 \ldots k_{n_1}}$ kann dargestellt werden als Summe endlich vieler in sich kompakter (also vollständiger) Summanden, deren jeder in einer abgeschlossenen Kugel vom Radius $\frac{1}{2}$ enthalten ist; durch mehrmaliges Anschreiben eines Summanden kann man erreichen, daß die Anzahl dieser Summanden für jedes $A_{k_1 k_2 \ldots k_{n_1}}$ dieselbe, und zwar eine Potenz 2^{n_2} von 2 ist; die sämtlichen $2^{n_1+n_2}$ Summanden der 2^{n_1} Mengen $A_{k_1 k_2 \ldots k_{n_1}}$ nehmen wir als Mengen $(n_1 + n_2)$-ter Stufe unseres dyadischen Schemas (für $n_1 < n < n_1 + n_2$ kann man als Mengen n-ter Stufe in leicht ersichtlicher Weise die Mengen $A_{k_1 k_2 \ldots k_{n_1}}$ wählen). Da die so gebildeten Mengen $(n_1 + n_2)$-ter Stufe wieder in sich kompakt sind, kann man sie nach demselben Verfahren durch endlich viele in sich kompakte (also vollständige) Summanden darstellen, deren jeder ganz in einer abgeschlossenen Kugel vom Radius $\frac{1}{3}$ enthalten ist, und die (eventuell mehrmals angeschrieben) die Mengen $(n_1 + n_2 + n_3)$-ter Stufe unseres Schemas bilden usf. Das in dieser Weise gebildete dyadische Schema stellt nach **18·8·1** offenbar die Menge A dar.

Aus **18·8·2** und **18·8·1** folgt:

18·8·21. *Jede dyadisch darstellbare Menge ist vollständig.*

18·8·22. *Jede dyadisch darstellbare Menge A ist separabel.*

Dies folgt aus **18·8·2** und **15·1·41.**

18·8·3. *Eine dyadisch darstellbare Menge A hat höchstens die Mächtigkeit $\aleph$.*

Denn die Punkte von A sind in der Form dargestellt: $a_{((k_\nu))}$, wo $((k_\nu))$ alle dyadischen Folgen durchläuft; nach **5·2·2** gibt es aber $\aleph$ dyadische Folgen.

Literatur: Zu vorstehender Theorie vgl. F. Hausdorff, Mengenlehre S. 131.

9. **Dyadische Diskontinua.** Ein dyadisches Schema, in dem für jedes n die 2^n Mengen n-ter Stufe disjunkt sind, heißt ein disjunktes dyadisches Schema. Eine durch ein disjunktes dyadisches Schema dargestellte Menge heißt ein dyadisches Diskontinuum. Ein disjunktes dyadisches

Schema ordnet offenbar verschiedenen dyadischen Folgen $((k_\nu))$ auch verschiedene Punkte $a_{((k_\nu))}$ zu. Infolgedessen verschärft sich **18·8·3** zu:

18·9·1. *Jedes dyadische Diskontinuum hat die Mächtigkeit* $\aleph$.

18·9·2. *Damit in einem dyadischen Diskontinuum* A: $\lim\limits_i a_{((k^i_\nu))} = a_{((k_\nu))}$ *sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem* n *ein* i_n *gebe, so daß für* $i \geq i_n$ *die ersten* n *Stellen von* $((k^i_\nu))$ *übereinstimmen mit den ersten* n *Stellen von* $((k_\nu))$.

Hinreichend: Dies ist enthalten in **18·7·3**. Notwendig: Stimmen für unendlich viele i die ersten n Stellen von $((k^i_\nu))$ nicht überein mit den ersten n Stellen von $((k_\nu))$, so liegt $a_{((k^i_\nu))}$ für unendlich viele i in der Summe B_n der von $A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ verschiedenen Mengen n-ter Stufe des A darstellenden disjunkten dyadischen Schemas. Nach **18·2·1** ist B_n vollständig, also nach **18·5·1** abgeschlossen; wegen $\lim\limits_i a_{((k^i_\nu))} = a_{((k_\nu))}$ müßte also auch $a_{((k_\nu))} \varepsilon B_n$ sein; das aber ist unmöglich, denn $a_{((k_\nu))} \varepsilon A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$, und weil das A darstellende dyadische Schema disjunkt, sind $A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ und B_n fremd.

Nennen wir eine metrische Menge A absolut perfekt, wenn sie perfekt ist in jedem metrischen Raume $\supseteqq A$, so gilt:

18·9·3. *Jedes dyadische Diskontinuum* A *ist absolut perfekt.*

Da A nach **18·8·21** und **18·5·2** absolut abgeschlossen, ist nur mehr zu zeigen, daß A insichdicht. Ist $a_{((k_\nu))}$ ein beliebiger Punkt von A, so gibt es nach **18·9·2** dyadische Folgen $((k^i_\nu)) \neq ((k_\nu))$, so daß $\lim\limits_i a_{((k^i_\nu))} = a_{((k_\nu))}$; da dann $a_{((k^i_\nu))} \neq a_{((k_\nu))}$, ist nach **17·3·61** $a_{((k_\nu))} \varepsilon A^1$; also ist $A \subseteqq A^1$, d. h. A ist insichdicht, w. z. b. w.

18·9·4. *Jedes dyadische Diskontinuum* A *ist nulldimensional.*

Sei $a = a_{((k_\nu))}$ ein beliebiger Punkt von A, und U_a eine Umgebung von a. Wegen $d(A_{k_1 k_2 \ldots k_\nu}) \to 0$ gibt es ein n, so daß $A_{k_1 k_2 \ldots k_n} \subseteqq U_a$. Ist B_n die Summe der von $A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ verschiedenen Mengen n-ter Stufe in dem A darstellenden disjunkten dyadischen Schema, so ist $B_n A_{k_1 k_2 \ldots k_n} = \Lambda$, und $A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ und B_n sind vollständig, also abgeschlossen. Nach **14·1·11** ist also $A = A\,A_{k_1 k_2 \ldots k_n} + A\,B_n$ eine Zerlegung von A in zwei abgesonderte Summanden, und wegen $a \varepsilon A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$, $A_{k_1 k_2 \ldots k_n} \subseteqq U_a$ ist A nulldimensional.

Ein bekanntes Beispiel eines disjunkten dyadischen Schemas erhält man in folgender Weise: die Mengen erster Stufe seien die Intervalle $\left[0, \frac{1}{3}\right]$,

$\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ des R_1, die Mengen zweiter Stufe seien die Intervalle $\left[0, \frac{1}{3^2}\right]$, $\left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{3^2}\right]$, $\left[\frac{8}{3^2}, 1\right]$; allgemein sind die Mengen n-ter Stufe 2^n fremde abgeschlossene Intervalle der Gestalt $\left[a, a+\frac{1}{3^n}\right]$, deren jedes die zwei Mengen $(n+1)$-ter Stufe liefert: $\left[a, a+\frac{1}{3^{n+1}}\right]$, $\left[a+\frac{2}{3^{n+1}}, a+\frac{1}{3^n}\right]$. Die durch dieses disjunkte dyadische Schema dargestellte Menge heißt das Cantorsche Diskontinuum; es besteht, wie man leicht erkennt, aus allen Punkten von $[0, 1]$, die durch einen Systembruch $\sum_\nu \frac{g_\nu}{3^\nu}$ darstellbar sind, unter dessen Stellen g_ν keine 1 vorkommt.

Literatur: G. Cantor gab das nach ihm benannte Diskontinuum an in Math. Ann. 21 (1883) S. 590.

10. **Beschränkte Mengen in vollständigen Räumen.** Sei E ein metrischer Raum; wir betrachten das System $\mathfrak{B}$ aller nicht leeren, abgeschlossenen, beschränkten Punktmengen von E, und zeigen, daß es zu einem metrischen Raum wird, wenn wir als die Entfernung zweier Elemente A, B von $\mathfrak{B}$ die Abweichung $e(A, B)$ (§ 9, 6) ansehen. In der Tat ist $e(A, B)$ endlich nach **9·6·6**; wegen § 9 (6·32) ist das metrische Axiom 2_m) (§ 9, 2) erfüllt; um zu sehen, daß auch 1_m) erfüllt ist, zeigen wir:

18·10·1. *Sind A und B nicht leere, abgeschlossene Mengen, so ist, damit $e(A, B) = 0$ sei, notwendig und hinreichend, daß $A = B$.*

Notwendig: Sei etwa $a \varepsilon A - B$; dann ist, da B abgeschlossen, auch $a \varepsilon A - B^0$; also ist nach **10·5·5**: $aB > 0$, also nach § 9 (6·3) auch $e(A, B) > 0$. Hinreichend: Dies ist trivial.

Daraus folgt sofort:

18·10·11. *Ist $A_n \supset A$, so kann es höchstens eine abgeschlossene Menge A geben, so daß $e(A_n, A) \to 0$.*

Nun werden wir zeigen, daß, wenn der Raum E vollständig ist, das System $\mathfrak{B}$ der nicht leeren, abgeschlossenen, beschränkten Punktmengen von E — im eben besprochenen Sinne — einen vollständigen metrischen Raum bildet. Dies ist enthalten in den Sätzen **18·10·2, 18·10·21, 18·10·22, 18·10·3.**

Wir bezeichnen die Folge $((A_n))$ nicht leerer Mengen als eine Cauchysche Folge, wenn es zu jedem $\delta > 0$ ein n_δ gibt, so daß $e(A_n, A_{n'}) < \delta$ für $n \geq n_\delta$, $n' \geq n_\delta$. Dann gilt:

18·10·2. *Ist $((A_n))$ eine Cauchysche Folge nicht leerer Mengen, so existiert* $\lim\limits_{n} A_n$.

Nach § 17 (1) und (1·4) ist nur zu zeigen: $\overline{\lim\limits_n} A_n - \underline{\lim\limits_n} A_n = \Lambda$. Wäre $a \varepsilon \overline{\lim\limits_n} A_n - \underline{\lim\limits_n} A_n$, so gäbe es ein $\varrho > 0$, so daß $A_n K_{a\varrho} = \Lambda$ für unendlich viele n, und $A_n K_{a\frac{\varrho}{2}} \supset \Lambda$ für unendlich viele n; zu jedem n^* gäbe es dann ein $n' > n^*$ und ein $n'' > n^*$, so daß $A_{n'} K_{a\varrho} = \Lambda$, $A_{n''} K_{a\frac{\varrho}{2}} \supset \Lambda$; dann aber ist $e(A_{n'}, A_{n''}) \geq \frac{\varrho}{2}$, entgegen der Annahme, $((A_n))$ sei eine Cauchysche Folge.

18·10·21. *Ist $((A_n))$ eine Cauchysche Folge nicht leerer, beschränkter Mengen, so ist $\lim\limits_n A_n$ beschränkt und abgeschlossen.*

Daß $\lim\limits_n A_n$ abgeschlossen, folgt aus **17·1·18**. Da $((A_n))$ eine Cauchysche Folge, gibt es ein n^*, so daß $e(A_n, A_{n^*}) < 1$ für $n \geq n^*$. Dann ist $A_n \subseteqq \overline{U}_{A_{n^*}1}$ für $n \geq n^*$, wobei $\overline{U}_{A_n\varrho}$ die abgeschlossene Umgebung ϱ von A_n bedeutet (§ 10, 2); nach **17·1·28** ist dann auch $\lim\limits_n A_n \subseteqq \overline{U}_{A_{n^*}1}$. Für den Durchmesser (§ 9, 6) von $\overline{U}_{A_{n^*}1}$ gilt offenbar: $d(\overline{U}_{A_{n^*}1}) \leq d(A_{n^*}) + 2$; da A_{n^*} beschränkt, ist $d(A_{n^*})$ endlich, also auch $d(\overline{U}_{A_{n^*}1})$ endlich, d. h. $\overline{U}_{A_{n^*}1}$ ist beschränkt; wegen $\lim\limits_n A_n \subseteqq \overline{U}_{A_{n^*}1}$ ist also auch $\lim\limits_n A_n$ beschränkt.

18·10·22. *Ist $((A_n))$ eine Cauchysche Folge nicht leerer Mengen eines vollständigen Raumes E, so ist auch $\lim\limits_n A_n \supset \Lambda$, und für jedes $\varrho > 0$ gilt, wenn $\lim\limits_n A_n = A$ gesetzt wird: $A_n \subseteqq \overline{U}_{A\varrho}$ für fast alle n.*

Da $((A_n))$ eine Cauchysche Folge, gibt es ein n^*, so daß $e(A_{n'}, A_{n''}) < \frac{\varrho}{2^2}$ für $n' \geq n^*$, $n'' \geq n^*$. Sei n_1 ein beliebiger Index $\geq n^*$ und a_1 ein beliebiger Punkt von A_{n_1}. Sodann gibt es zu jedem $\nu > 1$ ein n_ν, so daß $e(A_{n'}, A_{n''}) < \frac{\varrho}{2^{\nu+1}}$ für $n' \geq n_\nu$, $n'' \geq n_\nu$, wobei noch ohne weiteres $n_{\nu+1} \geq n_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ angenommen werden kann. Wegen $e(A_{n_1}, A_{n_2}) < \frac{\varrho}{2^2}$ gibt es dann ein $a_2 \varepsilon A_{n_2}$, so daß $a_1 a_2 < \frac{\varrho}{2^2}$; wegen $e(A_{n_2}, A_{n_3}) < \frac{\varrho}{2^3}$ gibt es ein $a_3 \varepsilon A_{n_3}$, so daß $a_2 a_3 < \frac{\varrho}{2^3}$ usf. Man erhält so eine Folge von Punkten $a_\nu \varepsilon A_{n_\nu}$, so daß für $\nu' > \nu$:

$$a_\nu a_{\nu'} \leq a_\nu a_{\nu+1} + a_{\nu+1} a_{\nu+2} + \cdots + a_{\nu'-1} a_{\nu'}$$
$$< \varrho\left(\frac{1}{2^{\nu+1}} + \frac{1}{2^{\nu+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{\nu'}}\right) < \frac{\varrho}{2^\nu};$$

also ist $((a_\nu))$ eine Cauchysche Punktfolge und $a_1 a_\nu < \frac{\varrho}{2}$ für alle ν. Da E vollständig, gibt es ein a, so daß $a_\nu \to a$. Da $a_\nu \varepsilon A_{n_\nu}$, ist nach **17·3·52** $a \varepsilon \overline{\lim_n} A_n$, und da nach **18·10·2** $\lim_n A_n$ existiert, ist auch $a \varepsilon \lim_n A_n$, also $\lim_n A_n \supset A$. Wegen $a_1 a_\nu < \frac{\varrho}{2}$ ist nach **17·3·31** $a_1 a \leq \frac{\varrho}{2} < \varrho$; da a_1 ein beliebiger Punkt εA_{n_1} war, ist somit, wenn $A = \lim_n A_n$ gesetzt wird: $A_{n_1} \subseteqq U_{A\varrho}$; und da n_1 ein beliebiger Index $\geq n^*$ war, gilt $A_n \subseteqq U_{A\varrho}$ für fast alle n.

18·10·3[1]). *Ist $((A_n))$ eine Cauchysche Folge nicht leerer Mengen eines vollständigen Raumes E, und ist $A = \lim_n A_n$, so ist $e(A_n, A) \to 0$.*

Da aus $A_n \subseteqq U_{A\varrho}$, $A \subseteqq U_{A_n\varrho}$ folgt: $e(A_n, A) \leq \varrho$, ist nach **18·10·22** nur mehr zu zeigen: $A \subseteqq U_{A_n\varrho}$ für fast alle n. Da $((A_n))$ eine Cauchysche Folge, gibt es ein n^*, so daß $e(A_n, A_{n'}) < \frac{\varrho}{2}$ für $n \geq n^*$, $n' \geq n^*$; dann ist $A_n \subseteqq U_{A_{n'}\frac{\varrho}{2}}$ für $n \geq n' \geq n^*$. Nach **17·1·23** ist dann auch $\lim_n A_n \subseteqq \left(U_{A_{n'}\frac{\varrho}{2}}\right)^0 \subseteqq U_{A_{n'}\varrho}$; und da dies für alle $n' \geq n^*$ gilt, ist die Behauptung bewiesen.

§ 19. Youngsche Mengen.

1. **Absolute G_δ.** Anknüpfend an § 18, 5 zeigen wir nun, daß es metrische Mengen A gibt, die absolute G_δ (d. h. G_δ in jedem metrischen Raume $E \supseteqq A$) sind.

19·1·1. *Gibt es einen vollständigen Raum $E \supseteqq A$, in dem A ein G ist, so ist A ein absolutes G_δ.*

Sei E' ein beliebiger metrischer Raum $\supseteqq A$; nach **18·4·6** gibt es einen vollständigen Raum $\overline{E} \supseteqq E'$, und nach **10·9·21** genügt es zu zeigen, daß A ein G_δ in $\overline{E}$ ist. Sei A^0 die abgeschlossene Hülle von A in E und $A^\times$ die abgeschlossene Hülle von A in $\overline{E}$; nach **18·4·71** sind A^0 und $A^\times$ isometrisch. Nach Annahme ist A ein G_δ in E, also nach **10·9·21** auch ein G_δ in A^0, also — weil A^0 und $A^\times$ isometrisch — auch ein G_δ in $A^\times$; nach **10·7·41** ist $A^\times$ ein G_δ in $\overline{E}$, also ist nach **10·9·2** auch A ein G_δ in $\overline{E}$, w. z. b. w.

Wir bezeichnen nun die metrischen Mengen, die absolute G_δ (d. h. nach **19·1·1** G_δ in vollständigen Räumen) sind, als Youngsche Mengen. Jede

[1]) Man vergleiche hierzu Satz **17·1·71**.

vollständige Menge ist also auch eine Youngsche Menge. Ferner folgt aus **10·9·2**:

19·1·2. *Jedes G_δ in einer Youngschen Menge ist eine Youngsche Menge.*

Insbesondere also nach **10·7·41**:

19·1·21. *Jede in einer Youngschen Menge abgeschlossene Menge ist eine Youngsche Menge.*

19·1·3. *Die Summe zweier Youngscher Mengen A, B ist eine Youngsche Menge.*

Nach **18·4·6** gibt es einen vollständigen Raum $E \supseteqq A + B$; nach Annahme ist sowohl A als B ein G_δ in E, also nach **10·7·2** auch $A + B$.

Ebenso folgt aus **10·7·2**:

19·1·31. *Der Durchschnitt abzählbar vieler Youngscher Mengen ist eine Youngsche Menge.*

Aus **19·1·3** und **19·1·31** folgt:

19·1·32. *Das System aller Youngschen Mengen eines metrischen Raumes ist ein δ-Ring.*

19·1·4. *Der Durchschnitt abzählbar vieler im metrischen Raume E dichter Youngscher Mengen A_n ist dicht in E.*

Sei $A = \underset{n}{D}\, A_n$; nach **18·4·6** gibt es einen vollständigen Raum $\overline{E} \supseteqq E$, so daß E dicht in $\overline{E}$; nach **11·3·3** ist dann auch A_n dicht in $\overline{E}$. Als Youngsche Menge ist A_n ein G_δ in $\overline{E}$: $A_n = \underset{\nu}{D}\, G_{n\nu}$, wo $G_{n\nu}$ offen in $\overline{E}$; dann ist $A = \underset{n,\nu}{D}\, G_{n\nu}$. Da A_n dicht in $\overline{E}$, ist nach **11·3·2** auch $G_{n\nu}$ dicht in $\overline{E}$, also nach **18·6·2** auch A, und nach **11·3·2** ist A auch dicht in E.

2. **Mächtigkeitssätze.** Um Aufschluß über die Mächtigkeit Youngscher Mengen zu gewinnen, zeigen wir zunächst:

19·2·1. *Ist A eine Youngsche Menge, deren insichdichter Kern $A_k \supset A$ ist, so gibt es ein in A nirgendsdichtes dyadisches Diskontinuum.*

Als Youngsche Menge ist A ein G_δ in einem vollständigen Raume E, also: $A = \underset{n}{D}\, G_n$, wo G_n offen. Da $A_k \supset A$ und insichdicht, gibt es unendlich viele $a \,\varepsilon\, A_k$; irgend drei davon bezeichnen wir mit a_0, a_1, a_2, und wählen $\varrho_1 > 0$ und $\leqq 1$ so klein, daß die abgeschlossenen Kugeln $\overline{K}_{a_0 \varrho_1}$, $\overline{K}_{a_1 \varrho_1}$ fremd und $\subseteqq G_1$ sind, und a_2 nicht enthalten. Als abgeschlossene Mengen des vollständigen Raumes E sind $\overline{K}_{a_0 \varrho_1}$, $\overline{K}_{a_1 \varrho_1}$ nach **18·5·11** vollständig; wir wählen sie als Mengen erster Stufe eines dyadischen Schemas. Sei $i = 0$ oder 1; da $a_i \,\varepsilon\, A_k$ und A_k insichdicht, gibt es in $K_{a_i \varrho_1}$ unendlich viele $a \,\varepsilon\, A_k$; irgend drei davon

bezeichnen wir mit a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, und wählen $\varrho_2 > 0$ und $\leq \frac{1}{2}$ so klein, daß die abgeschlossenen Kugeln $\overline{K}_{a_{i0}\varrho_2}$, $\overline{K}_{a_{i1}\varrho_2}$ fremd und $\subseteqq K_{a_i\varrho_1}$, sowie $\subseteqq G_2$ sind, und den Punkt a_{i2} nicht enthalten. Die vier Mengen $\overline{K}_{a_{ij}\varrho_2}$ $(i, j = 0, 1)$ wählen wir als Mengen zweiter Stufe unseres dyadischen Schemas. Sei $i, j = 0$ oder 1; in $K_{a_{ij}\varrho_2}$ gibt es drei Punkte a_{ij0}, a_{ij1}, a_{ij2} von A_k; wir wählen $\varrho_3 > 0$ und $\leq \frac{1}{3}$ so klein, daß die abgeschlossenen Kugeln $\overline{K}_{a_{ij0}\varrho_3}$, $\overline{K}_{a_{ij1}\varrho_3}$ fremd, $\subseteqq K_{a_{ij}\varrho_2}$, sowie $\subseteqq G_3$ sind, und den Punkt a_{ij2} nicht enthalten. Die acht Mengen $\overline{K}_{a_{ijl}\varrho_3}$ $(i, j, l = 0, 1)$ wählen wir als Mengen dritter Stufe unseres dyadischen Schemas usf. Durch das so konstruierte dyadische Schema wird ein dyadisches Diskontinuum B dargestellt. Da die Mengen n-ter Stufe des Schemas $\subseteqq G_n$ sind, ist $B \subseteqq \underset{n}{D}\, G_n$, d. h. $B \subseteqq A$. Wir haben noch zu zeigen, daß B nirgends dicht in A. Da B nach **18·9·3** abgeschlossen in A, genügt es nach **11·2·111** zu zeigen: B ist Randmenge in A. Sei also $b \,\varepsilon\, B$; für jedes n liegt b in genau einer Menge n-ter Stufe unseres dyadischen Schemas, etwa in $\overline{K}_{a_i\varrho_1}$, $\overline{K}_{a_{ij}\varrho_2}$, $\overline{K}_{a_{ijl}\varrho_3}$, ...; nun war $a_{i2} \,\varepsilon\, K_{a_i\varrho_1}$, $a_{ij2} \,\varepsilon\, K_{a_{ij}\varrho_2}$, $a_{ijl2} \,\varepsilon\, K_{a_{ijl}\varrho_3}$, ...; die Folge der (zu A gehörigen) Punkte a_{i2}, a_{ij2}, a_{ijl2}, ... konvergiert also gegen b, und da nach Konstruktion unseres dyadischen Schemas keiner dieser Punkte zu B gehört, ist b Randpunkt in A von B, und da b ein beliebiger Punkt von B war, ist B Randmenge in A, w. z. b. w.

Wegen **18·9·1** folgt aus **19·2·1**:

19·2·2. *Eine Youngsche Menge, deren insichdichter Kern* $\supset \Lambda$ *ist, hat mindestens die Mächtigkeit* $\aleph$.

19·2·21. *Eine separable Youngsche Menge A ist abzählbar oder von der Mächtigkeit $\aleph$, je nachdem ihr insichdichter Kern $A_k = \Lambda$ oder $\supset \Lambda$ ist.*

Ist $A_k = \Lambda$, d. h. A separiert, so ist A abzählbar nach **18·5·81.** Ist $A_k \supset \Lambda$, so hat A die Mächtigkeit $\aleph$ nach **18·2·1** und **19·2·2.**

Aus **19·2·21** folgt z. B., daß im R_n die Menge der rationalen Punkte kein G_δ, also die Menge der irrationalen Punkte kein F_σ ist.

19·2·3. *Für eine separable Youngsche Menge A gilt $A_k = A_v$.*

Da A_v nach **18·5·61** insichdicht, ist $A_v \subseteqq A_k$. Bleibt zu zeigen: $A_k \subseteqq A_v$. Sei $a \,\varepsilon\, A_k$ und U_a eine Umgebung von a. Nach **12·7·5** ist A_k abgeschlossen in A, also nach **10·7·41** ein G_δ in A; somit ist auch $A_k\, U_a$ ein G_δ in A, also nach **19·1·2** eine Youngsche Menge. Da A_k insichdicht, ist nach **12·4·21**

auch $A_k U_a$ insichdicht, hat mithin nach **19·2·21** die Mächtigkeit $\aleph$; daher ist $a \varepsilon A_v$. Aus $a \varepsilon A_k$ folgt also $a \varepsilon A_v$, d. h. es ist $A_k \subseteqq A_v$, w. z. b. w.

19·2·4. *Eine separable Youngsche Menge A kann auf eine und nur eine Weise zerlegt werden in zwei fremde Summanden, von denen einer abzählbar, der andere perfekt in A ist; diese Zerlegung ist: $A = A_u + A_v$.*

Nach **13·5·4** und **13·5·61** ist $A = A_u + A_v$ eine solche Zerlegung. Sei andererseits $A = A_1 + A_2$, $A_1 A_2 = \Lambda$, A_1 abzählbar, A_2 perfekt in A; wir haben zu zeigen $A_2 = A_v$ (dann ist von selbst auch $A_1 = A_u$). Da A_2 insichdicht, ist $A_2 \subseteqq A_k$, also nach **19·2·3** auch $A_2 \subseteqq A_v$. Bleibt zu zeigen: $A_v \subseteqq A_2$. Sei also $a \varepsilon A_v$; in jeder Umgebung U_a liegen dann unabzählbar viele Punkte von A, und weil A_1 abzählbar, ist $U_a A_2 \supset \Lambda$; also ist $a \varepsilon A_2^0$, und weil A_2 abgeschlossen in A, auch $a \varepsilon A_2$. Aus $a \varepsilon A_v$ folgt also $a \varepsilon A_2$, d. h. es ist $A_v \subseteqq A_2$, w. z. b. w.

Literatur: Der Mächtigkeitssatz **19·2·21** stammt von W. H. Young, Leipz. Ber. 55 (1903) S. 287.

3. **Perfekte Mengen in Youngschen Räumen.** Nach **19·1·21** ist jede in einer Youngschen Menge perfekte Menge selbst eine Youngsche Menge. Also folgt aus **19·2·2** und **13·2·1**:

19·3·1. *In einem Youngschen Raume hat jede perfekte Menge $\supset \Lambda$ mindestens die Mächtigkeit $\aleph$, jede separable perfekte Menge $\supset \Lambda$ die Mächtigkeit $\aleph$.*

In **19·2·21** ist enthalten:

19·3·11. *In einem Youngschen Raume ist eine separable abgeschlossene Menge abzählbar oder von der Mächtigkeit $\aleph$, je nachdem ihr perfekter Kern $= \Lambda$ oder $\supset \Lambda$ ist.*

Bezeichnen wir, wie in § 13, 4, mit A^* die Menge aller Verdichtungspunkte von A, so gilt:

19·3·2. *Für eine separable, in einem Youngschen Raume perfekte Menge A gilt: $A = A_v = A^*$.*

Da A insichdicht, ist $A = A_k$, also nach **19·2·3**: $A = A_v$, und weil A abgeschlossen, ist (§ 13, 5) $A_v = A^*$.

In **19·2·4** ist enthalten:

19·3·3. *Eine separable, in einem Youngschen Raume abgeschlossene Menge kann auf eine und nur eine Weise zerlegt werden in zwei fremde Summanden, von denen einer abzählbar, der andere perfekt ist; diese Zerlegung ist: $A = A_u + A^*$.*

Literatur: Die Sätze über die Mächtigkeit der perfekten und abgeschlossenen Mengen gehen zurück auf G. Cantor, Acta math. 2 (1883) S. 409. Neuere Unter-

suchungen von W. Hurewicz, Fund. math. 12 (1928) S. 78. Satz **19·3·3** wird auch als Cantor-Bendixsonsches Theorem bezeichnet: G. Cantor, Math. Ann. 21 (1883) S. 575; J. Bendixson, Acta math. 2 (1883) S. 415.

4. **Mengen erster und zweiter Kategorie.** Während die Summe endlich vieler nirgends dichter Mengen nach **11·2·4** wieder nirgends dicht ist, gilt dies für Summen aus abzählbar unendlich vielen nirgends dichten Mengen nicht; ist z. B. a ein Punkt des R_1, so ist die Menge $\{a\}$ nirgends dicht im R_1, die Menge aller rationalen Punkte des R_1 ist also Summe abzählbar vieler im R_1 nirgends dichter Mengen, selbst aber dicht im R_1.

Die Menge $A \subseteqq B$ heißt von erster Kategorie in B, wenn A Summe abzählbar vieler in B nirgends dichter Mengen ist. Anderenfalls heißt A von zweiter Kategorie in B. Die Begriffe „von erster (zweiter) Kategorie" sind, ebenso wie der Begriff „nirgends dicht", relativer Natur; nur wo kein Zweifel besteht, welche Menge B als Raum zugrunde gelegt ist, kann der Zusatz „in B" wegbleiben. Jede nirgends dichte Menge ist auch von erster Kategorie. Die leere Menge ist von erster Kategorie in jedem Raume: eine Menge zweiter Kategorie ist also stets $\supset \Lambda$. Aus **11·2·3** folgt unmittelbar:

19·4·1. *Ist A von erster Kategorie, und $A' \subseteqq A$, so ist auch A' von erster Kategorie.*

Damit ist gleichbedeutend:

19·4·11. *Ist A von zweiter Kategorie und $A' \supseteqq A$, so ist auch A' von zweiter Kategorie.*

19·4·2. *Die Summe abzählbar vieler Mengen erster Kategorie ist von erster Kategorie.*

Aus **19·4·1** und **19·4·2** folgt:

19·4·21. *Das System aller Mengen erster Kategorie eines topologischen Raumes ist ein σ-Körper und ein δ-Körper.*

Aus **11·3·21** folgt:

19·4·3. *Ist $A' \subseteqq A \subseteqq B \subseteqq B'$, und ist A von erster Kategorie in B, so ist auch A' von erster Kategorie in B'.*

Damit ist gleichbedeutend:

19·4·31. *Ist $A \subseteqq A' \subseteqq B' \subseteqq B$, und ist A von zweiter Kategorie in B, so ist auch A' von zweiter Kategorie in B'.*

19·4·32. *Ist B dicht in C und A von erster Kategorie in C, so ist $A\,B$ von erster Kategorie in B.*

Dies folgt aus **11·3·9.**

19·4·4. *Damit A von erster Kategorie sei, ist notwendig und hinreichend, daß $A\,G$ von erster Kategorie in G sei für jede offene Menge G.*

Notwendig: Dies folgt aus **11·3·61.** Hinreichend: Man wähle für G den zugrunde gelegten Raum E.

Damit ist gleichbedeutend:

19·4·41. *Damit A von zweiter Kategorie sei, ist notwendig und hinreichend, daß es eine offene Menge G gebe, für die $A\,G$ von zweiter Kategorie in G ist.*

19·4·5. *Jeder abzählbare Teil von B_h ist von erster Kategorie in B.*

Dies folgt unmittelbar aus **12·2·6.**

19·4·51. *Ist $A \subseteqq B$ und $A\,B_i \supset A$, so ist A von zweiter Kategorie in B.*

Dies folgt unmittelbar aus **12·2·51.**

19·4·6. *Ist A ein F_σ und $-A$ dicht, so ist A von erster Kategorie.*

Sei $A = \underset{n}{S} F_n$, wo F_n abgeschlossen; ist $-A$ dicht, so nach **11·1·4** auch $-F_n$, also ist nach **11·2·51** F_n nirgends dicht, also A von erster Kategorie.

19·4·7. *Ist A von erster Kategorie, so gibt es ein F_σ von erster Kategorie $\supseteqq A$.*

Denn $A = \underset{n}{S} A_n$, wo A_n nirgends dicht; nach **11·2·12** ist auch A_n^0 nirgends dicht, also $\underset{n}{S} A_n^0$ ein F_σ von erster Kategorie $\supseteqq A$.

Literatur: Die Mengen erster und zweiter Kategorie wurden eingeführt von R. Baire, Ann. di mat (3) 3 (1899) S. 67. Ausführliche Darstellung: F. Hausdorff, Mengenlehre S. 142ff.

5. **Von erster und zweiter Kategorie in einem Punkte.** Die Menge A heißt im Punkte $a \varepsilon E$ von erster Kategorie (in dem zugrunde gelegten Raume E), wenn es eine Umgebung U_a gibt, so daß $U_a A$ von erster Kategorie ist. Für jede Umgebung $U_a^* \subseteqq U_a$ ist dann nach **19·4·1** auch $U_a^* A$ von erster Kategorie. Die Menge A heißt im Punkte a von zweiter Kategorie, wenn sie nicht von erster Kategorie im Punkte a ist, d. h. wenn $U_a A$ für jede Umgebung U_a von zweiter Kategorie ist.

Die Menge aller Punkte, in denen A von erster (von zweiter) Kategorie ist, bezeichnen wir mit A_I (mit A_{II}). Es ist dann:

$$E = A_I + A_{II}, \quad A_I A_{II} = \Lambda. \tag{5}$$

19·5·1. *Ist $B \subseteqq A$, so ist $A_I \subseteqq B_I$, $B_{II} \subseteqq A_{II}$.*

Dies folgt aus **19·4·1.**

19·5·11. *Es ist $A_{II} \subseteqq A^0$.*

Denn ist $a \sim\varepsilon A^0$, so gibt es eine Umgebung U_a, so daß $A\,U_a = \Lambda$; dann aber ist $A\,U_a$ von erster Kategorie, also ist $a \varepsilon A_I$, mithin $a \sim\varepsilon A_{II}$.

19·5·12. *Ist A abgeschlossen, so ist $A_{II} \subseteqq A$.*

Dies folgt wegen $A = A^0$ aus **19·5·11.**

19·5·2. *Ist G offen, so ist, damit $G\,A$ von erster Kategorie sei, notwendig und hinreichend, daß $G \subseteqq A_I$ sei.*

Notwendig: Sei $G\,A$ von erster Kategorie; dann ist G selbst für jedes $a \varepsilon G$ eine Umgebung U_a, für die $U_a\,A$ von erster Kategorie ist. Hinreichend: Ist $G \subseteqq A_I$, so gibt es zu jedem $a \varepsilon G$ eine Umgebung $U_a \subseteqq G$, so daß $U_a\,A$ von erster Kategorie. Dann ist $G = \underset{a \varepsilon G}{S}\,U_a$; nach **8·1·21** können wir das System dieser U_a wohlgeordnet annehmen und die U_a mit U^ξ $(\xi < \alpha)$ bezeichnen, so daß nun: $G = \underset{\xi < \alpha}{S}\,U^\xi$, $G\,A = \underset{\xi < \alpha}{S}\,U^\xi A$, oder, indem wir $U^\xi A - \underset{\eta < \xi}{S}\,U^\eta = A^\xi$ setzen: $G\,A = \underset{\xi < \alpha}{S}\,A^\xi$. Nach Annahme ist $U^\xi A$, nach **19·4·1** also auch A^ξ von erster Kategorie; d. h. $A^\xi = \underset{n}{S} A^\xi_n$, wo A^ξ_n nirgends dicht; daher ist $G\,A = \underset{\xi < \alpha}{S}\,\underset{n}{S} A^\xi_n = \underset{n}{S}\,\underset{\xi < \alpha}{S}\,A^\xi_n$. Um zu zeigen, daß $G\,A$ von erster Kategorie, genügt es also zu zeigen: $A_n = \underset{\xi < \alpha}{S}\,A^\xi_n$ ist nirgends dicht; oder nach **11·2·2**: zu jeder offenen Menge $H \supset \Lambda$ gibt es eine offene Menge $H' \supset \Lambda$, $H' \subseteqq H$, so daß $A_n\,H' = \Lambda$. Das bedarf eines Beweises nur, wenn $H\,G \supset \Lambda$; dann gibt es unter den U^ξ eines von kleinstem Index ξ, so daß $U^\xi\,H \supset \Lambda$, etwa U^γ; dann ist $U^\xi\,H = \Lambda$ für $\xi < \gamma$, wegen $A^\xi \subseteqq U^\xi$ also auch $H\,A^\xi_n = \Lambda$ für $\xi < \gamma$; und da $U^\gamma A^\xi = \Lambda$ für $\xi > \gamma$, ist $U^\gamma H\,A_n = H\,A^\gamma_n$; da A^γ_n nirgends dicht, gibt es nach **11·2·2** eine offene Menge $H' \supset \Lambda$, $H' \subseteqq U^\gamma H$, so daß $H'\,A^\gamma_n = \Lambda$; wegen $U^\gamma\,H\,A_n = H\,A^\gamma_n$ besagt dies aber: $H'\,A_n = \Lambda$, w. z. b. w.

Setzt man in **19·5·2** $G = E$, so erhält man wegen (5):

19·5·21. *Damit A von erster Kategorie sei, ist notwendig und hinreichend, daß $A_I = E$, $A_{II} = \Lambda$ sei.*

19·5·3. *Die Menge A_I ist offen, A_{II} abgeschlossen.*

Denn ist $a \varepsilon A_I$ und U_a eine Umgebung von a, für die $U_a\,A$ von erster Kategorie, so ist auch $U_a \subseteqq A_I$, d. h. A_I ist offen; da nach (5) $A_{II} = -A_I$, ist also A_{II} abgeschlossen.

Aus **19·5·2** und **19·5·3** folgt, daß A_I die größte offene Menge G ist, für die $A\,G$ von erster Kategorie ist.

19·5·31. *Die Menge A_{II} ist ein Stück, d. h.*[1] *es ist: $A_{II} = (A_{IIi})^0$.*

Nach **19·5·3** ist A_{II} abgeschlossen; aus $A_{IIi} \subseteqq A_{II}$ folgt also: $(A_{IIi})^0 \subseteqq A^0_{II} = A_{II}$. Es ist also nur mehr zu zeigen: $A_{II} \subseteqq (A_{IIi})^0$, oder — indem wir zu den Komplementen übergehen und $-(A_{IIi})^0 = B$ setzen: $B \subseteqq A_I$; und da B offen, genügt es nach **19·5·2** zu zeigen: $B\,A$ ist von

[1]) Nach **10·5·9.**

erster Kategorie. Nun ist nach (5): $B\,A = B\,A\,A_I + B\,A\,A_{II}$; hierin ist, da nach **19·5·3** $B\,A_I$ offen ist, zufolge **19·5·2** $B\,A\,A_I$ von erster Kategorie; ferner ist $B\,A\,A_{II} \subseteqq B\,A_{II} = A_{II} - (A_{IIi})^0 \subseteqq A_{II} - A_{IIi} = A_{IIr}$; da A_{II} abgeschlossen, ist nach **11·2·7** A_{IIr} nirgends dicht, also nach **11·2·3** auch $B\,A\,A_{II}$ nirgends dicht, und mithin von erster Kategorie. Als Summe zweier Mengen erster Kategorie ist also nach **19·4·2** auch $B\,A$ von erster Kategorie, w. z. b. w.

Schreiben wir kurz $(A_I)^0 = A_I^0$, so gilt:

19·5·32. $$A_I = (A_I^0)_i .$$

Denn nach (5), **19·5·31** und **10·5·11** ist $A_I = -A_{II} = -(A_{II\,i})^0 = (-A_{II\,i})_i = (A_I^0)_i$.

19·5·33. $A - A_{II\,i}$ *ist von erster Kategorie.*

Da nach **10·5·11**: $-A_{II\,i} = A_I^0$, ist nach § 10 (6·3) $A - A_{II\,i} = A\,A_I^0 = A\,A_I + A\,A_{Ig}$; nach **19·5·3** und **19·5·2** ist $A\,A_I$ von erster Kategorie; nach **19·5·3** und **11·2·71** ist A_{Ig} nirgends dicht, also nach **11·2·3** auch $A\,A_{Ig}$ nirgends dicht, mithin von erster Kategorie; also ist $A - A_{II\,i}$ von erster Kategorie nach **19·4·2**.

19·5·34. *Ist* $A = \underset{n}{S}\,A_n$, *so ist* $\underset{n}{S}\,A_{n\,II\,i}$ *dicht in* A_{II}.

Nach **19·5·1** ist $A_{n\,II} \subseteqq A_{II}$, also auch $A_{n\,II\,i} \subseteqq A_{II}$, mithin $\underset{n}{S}\,A_{n\,II\,i} \subseteqq A_{II}$; nach **11·3·1** ist also nur mehr zu zeigen: $A_{II} \subseteqq (\underset{n}{S}\,A_{n\,II\,i})^0$, oder, indem wir $-(\underset{n}{S}\,A_{n\,II\,i})^0 = B$ setzen: $B \subseteqq A_I$. Da $B \subseteqq -(A_{n\,II\,i})^0$, und da nach **19·5·31** $(A_{n\,II\,i})^0 = A_{n\,II}$, ist $B \subseteqq -A_{n\,II}$, d. h. nach (5): $B \subseteqq A_{n\,I}$, mithin ist nach **19·5·2** $B\,A_n$ von erster Kategorie, also ist nach **19·4·2** auch $B\,A = \underset{n}{S}\,B\,A_n$ von erster Kategorie, also nach **19·5·2**: $B \subseteqq A_I$, w. z. b. w.

Ist G offen, und ist $A\,G'$ für jede nicht leere offene Menge $G' \subseteqq G$ von zweiter Kategorie, so sagen wir: A ist in G überall von zweiter Kategorie. Ist $A\,G'$ für jede offene Menge $G' \supset A$ von zweiter Kategorie, so sagen wir: A ist überall von zweiter Kategorie.

19·5·4. *Ist* G *offen, so ist, damit* A *in* G *überall von zweiter Kategorie sei, notwendig und hinreichend, daß* $G \subseteqq A_{II}$ *sei.*

Notwendig: Ist nicht $G \subseteqq A_{II}$, so ist nach (5): $G\,A_I \supset A$, und da nach **19·5·3** $G\,A_I$ offen, ist nach **19·5·2** $G\,A_I\,A$ von erster Kategorie. Hinreichend: Sei G' offen und $A \subset G' \subseteqq G$; ist $G \subseteqq A_{II}$, so auch $G' \subseteqq A_{II}$, also ist nach **19·5·2** $G'A$ nicht von erster, also von zweiter Kategorie.

Setzt man in **19·5·4** $G = E$, so erhält man wegen (5):

19·5·41. *Damit* A *überall von zweiter Kategorie sei, ist notwendig und hinreichend, daß* $A_I = A$, $A_{II} = E$ *sei.*

Aus **19·5·4** folgt, daß A_{IIi} die größte offene Menge ist, in der A überall von zweiter Kategorie ist.

19·5·42. *Ist A von zweiter Kategorie, so gibt es eine offene Menge $G \supset A$, so daß A in G überall von zweiter Kategorie.*

Nach **19·5·21** ist $A_{II} \supset A$, nach **19·5·31** ist $A_{II} = (A_{IIi})^0$, also ist auch $A_{IIi} \supset A$, und nach **19·5·4** ist A in A_{IIi} überall von zweiter Kategorie.

Literatur: H. Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 185. St. Banach, Fund. math. 16 (1930) S. 395.

6. **In sich von erster (zweiter) Kategorie.** Die Begriffe: von erster, von zweiter Kategorie haben relativen Charakter. Ist die Menge A von erster (zweiter) Kategorie in A, so sagen wir: A ist in sich von erster (zweiter) Kategorie. Diese Begriffe haben absoluten Charakter.

19·6·1. *Jede abzählbare insichdichte Menge ist in sich von erster Kategorie.*
Dies folgt unmittelbar aus **19·4·5.**

19·6·2. *Ist $A_j \supset A$, so ist A in sich von zweiter Kategorie.*
Dies folgt unmittelbar aus **19·4·51.**

19·6·3. *Ist A ein F_σ und $A^0 - A$ dicht in A^0, so ist A in sich von erster Kategorie.*
Nach **19·4·6** ist A von erster Kategorie in A^0, also nach **11·3·32** auch in A.

7. **Residualmengen.** Ist $A \subseteqq B$, so heißt A eine Residualmenge in B, wenn $B - A$ von erster Kategorie in B ist. Der Begriff „Residualmenge" hat relativen Charakter; nur wo kein Zweifel besteht, welche Menge B als Raum zugrunde gelegt ist, kann der Zusatz „in B" wegbleiben. Aus **19·4·1** folgt:

19·7·1. *Ist A eine Residualmenge und $A' \supseteqq A$, so ist auch A' eine Residualmenge.*

19·7·11. *Ist $A \subseteqq B \subseteqq C$, ist B dicht in C und A eine Residualmenge in C, so ist A auch eine Residualmenge in B.*

Denn $C - A$ ist von erster Kategorie in C, also ist nach **19·4·32** $B - A$ von erster Kategorie in B.

19·7·111. *Ist A eine Residualmenge, B von zweiter Kategorie, so ist $AB \supset A$.*

Denn wäre $AB = A$, so wäre $B \subseteqq -A$, und da $-A$ von erster Kategorie, wäre nach **19·4·1** auch B von erster Kategorie.

19·7·2. *Der Durchschnitt abzählbar vieler Residualmengen ist eine Residualmenge.*

Dies folgt aus **19·4·2.**

Aus **19·7·1** und **19·7·2** folgt:

19·7·21. *Das System aller Residualmengen eines topologischen Raumes ist ein σ-Ring und ein δ-Ring.*

19·7·3. *Damit A eine Residualmenge sei, ist notwendig und hinreichend, daß $A\,G$ für jedes offene G eine Residualmenge in G sei.*

Notwendig: Ist A eine Residualmenge, so ist $-A$ von erster Kategorie, also nach **19·4·4** $G - A = G - A\,G$ von erster Kategorie in G. Hinreichend: Man wähle für G den zugrunde gelegten Raum E.

19·7·4. *Jedes dichte G_δ ist eine Residualmenge.*

Dies folgt unmittelbar aus **19·4·6**.

Von besonderer Bedeutung sind die Residualmengen in Youngschen Räumen.

19·7·5. *Damit A eine Residualmenge im Youngschen Raume E sei, ist notwendig und hinreichend, daß es eine dichte Youngsche Menge $B \subseteqq A$ gebe.*

Notwendig: Ist A eine Residualmenge, so ist $-A = \underset{n}{S}\,C_n$, wo C_n nirgends dicht; dann ist nach **11·2·12** auch C_n^0 nirgends dicht; also ist nach **11·2·51** $-C_n^0$ eine dichte offene Menge, also nach **19·1·2** eine dichte Youngsche Menge; also ist nach **19·1·4** auch $B = \underset{n}{D}\,(-C_n^0)$ eine dichte Youngsche Menge, und wegen $-A \subseteqq \underset{n}{S}\,C_n^0$ ist $B \subseteqq A$. Hinreichend: Als Youngsche Menge ist B ein absolutes G_δ, also auch ein G_δ in E; nach **19·7·4** ist also B eine Residualmenge, nach **19·7·1** also auch A.

In **19·7·5** ist enthalten:

19·7·51. *In einem Youngschen Raume ist jede Residualmenge dicht.*

Insbesondere also:

19·7·511. *Ist B eine Youngsche Menge $\supset A$ und A eine Residualmenge in B, so ist auch $A \supset A$.*

Aus **19·7·2** und **19·7·51** folgt:

19·7·52. *In einem Youngschen Raum ist der Durchschnitt abzählbar vieler Residualmengen dicht.*

19·7·53. *Ist A eine Residualmenge in einem insichdichten Youngschen Raume $E \supset A$, so gibt es ein in A nirgends dichtes dyadisches Diskontinuum.*

Nach **19·7·5** gibt es eine dichte Youngsche Menge $B \subseteqq A$; nach **12·4·8** ist B insichdicht, also $B_k \supset A$; also gibt es nach **19·2·1** ein in B nirgends dichtes dyadisches Diskontinuum $C \subseteqq B \subseteqq A$, und nach **11·3·21** ist C auch nirgends dicht in A.

19·7·54. *Ist A eine Residualmenge in einem separablen insichdichten Youngschen Raume, so ist $A = A_v$.*

Nach **19·7·5** gibt es eine dichte Youngsche Menge $B \subseteqq A$; nach **12·4·3** ist B insichdicht: $B = B_k$, also nach **19·2·3** auch $B = B_v$. Sei $a \varepsilon A$; wir haben zu zeigen, daß dann auch $a \varepsilon A_v$. Da B dicht, gibt es in jeder Umgebung U_a ein $b \varepsilon B$; da dann auch $b \varepsilon B_v$, ist $B\, U_a$ unabzählbar, also auch $A\, U_a$ unabzählbar; also ist $a \varepsilon A_v$, w. z. b. w.

19·7·6. *Jede Youngsche Menge $A \supset \Lambda$ ist in sich von zweiter Kategorie.*

Denn wäre A in sich von erster Kategorie, so wäre $A - A = \Lambda$ eine Residualmenge in A, entgegen **19·7·511.**

19·7·61. *Ist A ein G_δ in einem Youngschen Raume E, so ist, damit A von erster Kategorie sei, notwendig und hinreichend, daß A nirgends dicht sei.*

Notwendig: Wäre A nicht nirgends dicht, so gäbe es nach **11·3·7** ein offenes $G \supset \Lambda$, so daß $A\, G$ dicht in G; da $- A$ eine Residualmenge, gibt es nach **19·7·5** eine dichte Youngsche Menge $B \subseteqq - A$; nach **19·1·2** ist $B\, G$ eine Youngsche Menge, und nach **11·3·6** ist $B\, G$ dicht in G; da auch $A\, G$ als G_δ im Youngschen Raume E nach **19·1·2** eine Youngsche Menge ist, wäre nach **19·1·4** (angewendet auf den Raum G) $A\, B\, G$ in G dicht, was unmöglich, da $B \subseteqq - A$, also $A\, B = \Lambda$. Hinreichend: Dies ist trivial.

Aus **19·7·61** folgt wegen **11·2·21**:

19·7·62. *In einem Youngschen Raume ist jede offene Menge $G \supset \Lambda$ von zweiter Kategorie.*

19·7·7. *In einem Youngschen Raume ist eine Residualmenge A überall von zweiter Kategorie.*

Sei $G \supset \Lambda$ offen; da $- A$ von erster Kategorie, so nach **19·4·1** auch $G - A$; wäre auch $G\, A$ von erster Kategorie, so nach **19·4·2** auch $G = (G - A) + G\, A$, entgegen **19·7·62.** Also ist $G\, A$ von zweiter Kategorie.

19·7·71. *Ist A eine Residualmenge im Youngschen Raume $E \supset \Lambda$, so ist $- A$ keine Residualmenge.*

Dies folgt aus **19·7·7**, weil $- A$ von erster Kategorie ist.

Literatur: Die wichtigsten Sätze über Residualmengen stammen von R. Baire; die Bezeichnung „Residualmengen" hat A. Denjoy eingeführt.

8. **Residual in einem Punkte.** Sei wieder ein beliebiger topologischer Raum E zugrunde gelegt. Die Menge A heißt residual im Punkte a, wenn es eine Umgebung U_a gibt, so daß $U_a\, A$ eine Residualmenge in U_a. Die Menge aller Punkte, in denen A residual ist, bezeichnen wir mit A_{III}.

19·8·1. $$A_{III} = (- A)_I\,.$$

Denn die Aussage: „$U_a\, A$ ist eine Residualmenge in U_a" bedeutet: $U_a - A$ ist von erster Kategorie in U_a, und dies ist nach **19·4·3** und **19·4·4** gleichbedeutend mit: $U_a - A$ ist von erster Kategorie.

19·8·2. *Ist G offen, so ist, damit GA eine Residualmenge in G sei, notwendig und hinreichend, daß $G \subseteqq A_{III}$ sei.*

Denn nach **19·8·1** ist $G \subseteqq A_{III}$ gleichbedeutend mit: $G \equiv (-A)_I$, also nach **19·5·2** mit: $G - A$ ist von erster Kategorie, also nach **19·4·3** und **19·4·4** mit: $G - A$ ist von erster Kategorie in G, d. h. GA ist eine Residualmenge in G.

Darin ist für $G = E$ enthalten:

19·8·21. *Damit A eine Residualmenge sei, ist notwendig und hinreichend, daß $A_{III} = E$ sei.*

Aus **19·8·1**, **19·5·3** und **19·5·32** folgt (wenn wir kurz $(A_{III})^0 = A''_{III}$ schreiben):

19·8·3. *Die Menge A_{III} ist offen und es ist: $A_{III} = (A''_{III})_i$.*

19·8·4. *In einem Youngschen Raume ist $A_{III} \subseteqq A_{II_i}$.*

Sei $a \varepsilon A_{III}$; dann gibt es eine Umgebung U_a, so daß $U_a A$ eine Residualmenge in U_a; da U_a nach **19·1·2** eine Youngsche Menge, ist nach **19·7·7** $U_a A$ überall von zweiter Kategorie in U_a, d. h. es ist A überall von zweiter Kategorie in U_a, also ist nach **19·5·4** $U_a \subseteqq A_{II}$, mithin $a \varepsilon A_{II_i}$. Aus $a \varepsilon A_{III}$ folgt also $a \varepsilon A_{II_i}$, d. h. $A_{III} \subseteqq A_{II_i}$.

9. **Offen bis auf eine Menge erster Kategorie.** Die Menge A heißt offen (bzw. abgeschlossen) bis auf eine Menge erster Kategorie, wenn es eine offene (bzw. abgeschlossene) Menge B gibt, so daß $A - B$ und $B - A$ von erster Kategorie sind. Jede Menge erster Kategorie, jede Residualmenge ist offen (abgeschlossen) bis auf eine Menge erster Kategorie.

19·9·1. *Die Begriffe „offen bis auf eine Menge erster Kategorie" und „abgeschlossen bis auf eine Menge erster Kategorie" sind gleichbedeutend.*

Sei G offen, und seien $A - G$ und $G - A$ von erster Kategorie: setzen wir $F = G^0$, so ist F abgeschlossen; da $A - F \subseteqq A - G$, ist nach **19·4·1** $A - F$ von erster Kategorie; da $F - A \subseteqq (F - G) + (G - A)$, und da nach **11·2·71** $F - G = G_g$ nirgends dicht, also von erster Kategorie, so ist nach **19·4·1** und **19·4·2** auch $F - A$ von erster Kategorie. — Sei F abgeschlossen, und seien $A - F$ und $F - A$ von erster Kategorie. Setzen wir $G = F_i$, so ist G offen; da $G - A \subseteqq F - A$, ist $G - A$ von erster Kategorie; da $A - G \subseteqq (A - F) + (F - G)$, und nach **11·2·7** $F - G = F_r$ von erster Kategorie, so auch $A - G$.

19·9·2. *Ist A offen bis auf eine Menge erster Kategorie, so auch das Komplement $-A$.*

Sei $A' = -A$. Es gibt eine offene Menge G, so daß $A - G$ und $G - A$ von erster Kategorie; setzen wir $-G = F$, so ist F abgeschlossen und $A' - F = G - A$, $F - A' = A - G$. Also ist A' abgeschlossen bis auf

eine Menge erster Kategorie, somit nach **19·9·1** auch offen bis auf eine Menge erster Kategorie.

19·9·21. *Das System aller bis auf eine Menge erster Kategorie offenen Mengen eines topologischen Raumes E ist ein σ-Körper.*

Da E als Residualmenge offen bis auf eine Menge erster Kategorie ist, so ist nach **19·9·2** und **8·3·1** nur mehr zu zeigen: Sind die Mengen A_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ offen bis auf eine Menge erster Kategorie, so auch $A = \underset{\nu}{S} A_\nu$. Nach Voraussetzung gibt es eine offene Menge G_ν, so daß $A_\nu - G_\nu$ und $G_\nu - A_\nu$ von erster Kategorie. Setzen wir $G = \underset{\nu}{S} G_\nu$, so ist auch G offen, und wegen $A - G \subseteqq \underset{\nu}{S}(A_\nu - G_\nu)$, $G - A \subseteqq \underset{\nu}{S}(G_\nu - A_\nu)$ sind nach **19·4·1** und **19·4·2** auch $A - G$ und $G - A$ von erster Kategorie.

19·9·3. *Jede G_δ-Menge A ist offen bis auf eine Menge erster Kategorie.*

Da jede offene Menge auch offen bis auf eine Menge erster Kategorie ist, folgt die Behauptung wegen **8·6·1** aus **19·9·21**.

19·9·31. *Damit A offen sei bis auf eine Menge erster Kategorie, ist notwendig und hinreichend, daß $A = A' + A''$, wo A' ein G_δ und A'' von erster Kategorie.*

Notwendig: Sei G offen und seien $A - G$ und $G - A$ von erster Kategorie. Nach **19·4·7** gibt es eine F_σ-Menge $B \supseteqq G - A$, die von erster Kategorie ist. Setzen wir $G - B = A'$, $A - A' = A''$, so ist $A' \subseteqq A$, also $A = A' + A''$; ferner ist A' ein G_δ, und wegen $A'' \subseteqq B + (A - G)$ ist A'' von erster Kategorie. Hinreichend: Sei A' ein G_δ. Nach **19·9·3** gibt es eine offene Menge G, so daß $A' - G$ und $G - A'$ von erster Kategorie. Ist $A = A' + A''$, wo A'' von erster Kategorie, so ist $A - G = (A' - G) + (A'' - G)$ von erster Kategorie, und wegen $G - A \subseteqq G - A'$ ist auch $G - A$ von erster Kategorie.

19·9·4. *Damit A offen sei bis auf eine Menge erster Kategorie, ist notwendig und hinreichend, daß $A_I + A_{III}$ dicht sei.*

Notwendig: Sei G offen und seien $A - G$ und $G - A$ von erster Kategorie. Wir setzen $-G^0 = G'$; dann ist auch G' offen, nach **10·5·11** ist $G' = (-G)_i$ und nach § 10 (6·1) ist $-(G + G') = G_g$; nach **11·2·71** ist also $-(G + G')$ nirgends dicht; also ist $G + G'$ nach **11·2·5** dicht. Da $G - A$ von erster Kategorie, also nach **19·4·4** auch von erster Kategorie in G, ist GA eine Residualmenge in G, also ist nach **19·8·2** $G \subseteqq A_{III}$. Da $AG' \subseteqq A - G$ und $A - G$ von erster Kategorie, ist AG' von erster Kategorie, also nach **19·5·2** $G' \subseteqq A_I$. Also ist $G + G' \subseteqq A_I + A_{III}$, und da $G + G'$ dicht, ist nach **11·1·4** auch $A_I + A_{III}$ dicht. Hinreichend: Sei $A_I + A_{III}$ dicht; da nach **19·5·3** und **19·8·3** $A_I + A_{III}$ offen, ist dann nach **11·2·51**

$-(A_I + A_{III})$ nirgends dicht. Wir setzen $G = A_{III}$; nach **19·8·2** ist dann $G - A$ von erster Kategorie in G, also auch von erster Kategorie im Raume E. Ferner ist $A - G \subseteqq A\,A_I + (A - (A_I + A_{III}))$; hierin ist nach **19·5·2** $A\,A_I$ von erster Kategorie, und da $-(A_I + A_{III})$ nirgends dicht, ist auch $A - (A_I + A_{III})$ von erster Kategorie; somit ist auch $A - G$ von erster Kategorie.

19·9·5. *Damit A offen sei bis auf eine Menge erster Kategorie, ist notwendig und hinreichend, daß $A_{IIi} \subseteqq A_{III}$ sei.*

Notwendig: Da nach **19·9·4** $A_I + A_{III}$ dicht, ist nach **11·1·1** und **10·5·3**: $E = (A_I + A_{III})^0 = A_I^0 + A_{III}^0$. Da nach § 19 (5): $A_{II} = -A_I$, ist $A_{IIi} = (-A_I)_i$, also nach **10·5·11**: $A_{IIi} = -(A_I^0)$; wegen $E = A_I^0 + A_{III}^0$ ist also $A_{IIi} \subseteqq A_{III}^0$, also auch $A_{IIi} \subseteqq (A_{III}^0)_i$, also nach **19·8·3** $A_{IIi} \subseteqq A_{III}$.
Hinreichend: Nach § 19 (5) und **19·5·31** ist $E = A_I + (A_{IIi})^0$; nach **11·1·1** ist also $A_I + A_{IIi}$ dicht; ist $A_{IIi} \subseteqq A_{III}$, so ist also nach **11·1·4** auch $A_I + A_{III}$ dicht, also nach **19·9·4** A offen bis auf eine Menge erster Kategorie.

19·9·51. *Damit die Menge A eines Youngschen Raumes offen sei bis auf eine Menge erster Kategorie, ist notwendig und hinreichend, daß $A_{IIi} = A_{III}$ sei.*

Dies folgt aus **19·9·5** und **19·8·4**.

19·9·6. *Ist A offen bis auf eine Menge erster Kategorie in E, und ist E ein G_δ in E', so ist A auch offen bis auf eine Menge erster Kategorie in E'.*

Nach **19·9·31** ist $A = A' + A''$, wo A' ein G_δ in E und A'' von erster Kategorie in E. Nach **10·9·2** ist A' auch ein G_δ in E' und nach **19·4·3** ist A'' von erster Kategorie in E'; die Behauptung folgt also aus **19·9·31.**

19·9·7. *In einem separierten Raume E ist jede Menge A offen bis auf eine Menge erster Kategorie.*

Wir zerlegen nach § 12 (2): $E = E_j + E_h$; $A = A\,E_j + A\,E_h$. Nach **12·2·41** ist $A\,E_j$ offen in E; nach **12·7·2** ist E_j dicht in E, also ist nach **12·2·3** und **11·2·51** E_h nirgends dicht in E; nach **11·3·21** ist also auch $A\,E_h$ nirgends dicht und mithin von erster Kategorie in E.

Wir wollen noch zeigen, daß es in geeigneten Räumen E Mengen gibt, die nicht offen sind bis auf eine Menge erster Kategorie. Wir schicken voraus:

19·9·8. *Ist der Raum $E \supset A$, und ist sowohl A als das Komplement $-A$ überall von zweiter Kategorie, so ist A nicht offen bis auf eine Menge erster Kategorie.*

Nach **19·5·41** ist $A_{II} = E$, $(-A)_I = A$, also nach **19·8·1** $A_{III} = A$; die Behauptung folgt also aus **19·9·5.**

Nennen wir nun eine Punktmenge A **total imperfekt**, wenn sie keinen perfekten Teil $\supset \Lambda$ enthält, so gilt:

19·9·81. *Ist E ein insichdichter Youngscher Raum, ist $A \subseteqq E$, und ist sowohl A als $-A$ total imperfekt, so sind A und $-A$ überall von zweiter Kategorie.*

Angenommen, es sei z. B. A nicht überall von zweiter Kategorie; dann gibt es eine offene Menge $G \supset \Lambda$, so daß $A\,G$ von erster Kategorie in G; dann aber ist $G - A$ eine Residualmenge in G; da nach **12·4·21** G eine insichdichte Youngsche Menge ist, so gibt es nach **19·7·53** ein dyadisches Diskontinuum $C \subseteqq G - A$; wegen **18·9·3** widerspricht dies aber der Annahme, $-A$ sei total imperfekt.

19·9·9. *In einem separablen Youngschen Raume E, dessen insichdichter Kern $\supset \Lambda$ ist, gibt es eine unabzählbare, total imperfekte Menge B, deren Komplement $-B$ gleichfalls unabzählbar und total imperfekt ist.*

Nach **19·2·21** hat E die Mächtigkeit $\aleph$; da E als metrischer Raum nach **14·2·41** und **14·2·1** regulär ist, hat nach **14·2·61** auch das System aller in E perfekten Mengen die Mächtigkeit $\aleph$. Bezeichnet γ die kleinste Ordinalzahl der Mächtigkeit $\aleph$, so können also nach **8·3·2** sowohl die Punkte $a \varepsilon E$ als auch die nicht leeren in E perfekten Mengen P eineindeutig den Ordinalzahlen $\xi < \gamma$ zugeordnet werden; seien a_ξ ($\xi < \gamma$) die sämtlichen Punkte $a \varepsilon E$ und P_ξ ($\xi < \gamma$) die sämtlichen nicht leeren in E perfekten Mengen. Wir bezeichnen nun mit b_0 den ersten zu P_0 gehörigen Punkt a_ξ, mit c_0 den ersten auf b_0 folgenden zu P_0 gehörigen Punkt a_ξ; nehmen wir nun an, für alle $\eta' < \eta$ ($< \gamma$) seien die Punkte $b_{\eta'}$ und $c_{\eta'}$ definiert, so bezeichnen wir mit b_η, c_η die beiden ersten von allen $b_{\eta'}$ und $c_{\eta'}$ ($\eta' < \eta$) verschiedenen Punkten a_ξ, die zu P_η gehören (solche Punkte gibt es, weil die Menge der Punkte $b_{\eta'}$, $c_{\eta'}$ ($\eta' < \eta$) eine Mächtigkeit $< \aleph$, die Menge P_η aber nach **19·3·1** die Mächtigkeit $\aleph$ hat). Die Menge aller Punkte b_η ($\eta < \gamma$), die wir so erhalten, heiße B, die Menge der Punkte c_η ($\eta < \gamma$) heiße C. Dann sind B und C zwei fremde Mengen der Mächtigkeit $\aleph$; wegen $C \subseteqq -B$ sind also B und $-B$ unabzählbar, und da sowohl B als C von jeder in E perfekten Menge $P \supset \Lambda$ mindestens einen Punkt enthalten, kann weder $P \subseteqq B$, noch $P \subseteqq -B$ sein, d. h. B und $-B$ sind total imperfekt.

19·9·91. *In einem separablen, insichdichten Youngschen Raume $E \supset \Lambda$ gibt es Mengen, die nicht offen sind bis auf eine Menge erster Kategorie.*

Nach **19·9·9** und **19·9·81** gibt es eine Menge A derart, daß sowohl A als $-A$ überall von zweiter Kategorie. Nach **19·9·8** ist A nicht offen bis auf eine Menge erster Kategorie.

Literatur: H. Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 186; Bull. soc. math. 35 (1902) S. 202. W. Sierpiński, Fund. math. 4 (1923) S. 319. G. Steinbach, Beiträge zur Mengenlehre, Diss. Bonn 1930. E. Szpilrajn, Congr. math. Varsovie 1929, S. 295. C. Kuratowski, Fund. math. 16 (1930) S. 390. F. Bernstein, Leipz. Ber. 60 (1908) S. 329. P. Mahlo, Leipz. Ber. 63 (1911) S. 346.

§ 20. Produkträume.

1. **Produktraum.** Seien $E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(n)}$ metrische Räume. Wir haben in § 2, 2 als das Mengenprodukt $E^{(1)} \times E^{(2)} \times \ldots \times E^{(n)}$ definiert die Menge aller n-tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, in denen $a_i \varepsilon E^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$. Wir machen diese Produktmenge zu einem metrischen Raum E durch die Festsetzung: Ist $a \varepsilon E$, $b \varepsilon E$, und zwar: $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, so sei:

$$(1) \qquad a\,b = \sqrt{(a_1 b_1)^2 + (a_2 b_2)^2 + \ldots + (a_n b_n)^2}\,.$$

In der Tat genügt diese Entfernungsdefinition den metrischen Axiomen $1_m)$, $2_m)$ (§ 9, 2); für $1_m)$, ist dies evident, für $2_m)$ wird es ebenso bewiesen, wie § 9 (3·11). Der metrische Raum $E = E^{(1)} \times E^{(2)} \times \ldots \times E^{(n)}$ heißt der Produktraum aus $E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(n)}$. Offenbar entsteht der R_n durch n-malige Multiplikation des R_1 mit sich selbst.

Betrachten wir die drei offenbar isometrischen Räume[1]) $E^{(1)} \times E^{(2)} \times E^{(3)}$, $(E^{(1)} \times E^{(2)}) \times E^{(3)}$, $E^{(1)} \times (E^{(2)} \times E^{(3)})$ als identisch, so ist diese Multiplikation assoziativ. Wir können uns also weiterhin auf Produkte aus zwei Faktoren beschränken.

Sei also $E = E^{(1)} \times E^{(2)}$. Sind $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ Punkte von E, so ist:

$$(1{\cdot}1) \qquad a_i b_i \leq a\,b \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad (i = 1, 2).$$

Sei nun $((a_\nu))$ eine Punktfolge aus E und $a_\nu = (a_{1\nu}, a_{2\nu})$. Aus (1·1) entnehmen wir:

20·1·1. *Damit* $\lim\limits_\nu a_\nu = a$ *sei, ist notwendig und hinreichend, daß* $\lim\limits_\nu a_{1\nu} = a_1$, $\lim\limits_\nu a_{2\nu} = a_2$.

20·1·2. *Ist* a *Häufungspunkt von* $((a_\nu))$, *so ist* a_1 *Häufungspunkt von* $((a_{1\nu}))$ *und* a_2 *Häufungspunkt von* $((a_{2\nu}))$.

20·1·3. *Damit* $((a_\nu))$ *eine Cauchysche Folge* (§ 18, 1) *sei, ist notwendig und hinreichend, daß sowohl* $((a_{1\nu}))$ *als* $((a_{2\nu}))$ *eine Cauchysche Folge sei.*

2. **Produktmengen.** Wir betrachten nun in $E = E^{(1)} \times E^{(2)}$ speziell die Punktmengen von der Gestalt $A \times B$, wo $A \subseteqq E^{(1)}$, $B \subseteqq E^{(2)}$.

---

[1]) Diese drei Räume bestehen aus den Punkten (a_1, a_2, a_3), $((a_1, a_2), a_3)$, $(a_1, (a_2, a_3))$, wo $a_1 \varepsilon E^{(1)}$, $a_2 \varepsilon E^{(2)}$, $a_3 \varepsilon E^{(3)}$.

Ist $A = \{a\}$ die nur aus dem Punkte $a \varepsilon E^{(1)}$ bestehende Menge, so schreiben wir $a \times B$ statt $\{a\} \times B$; es ist also $a \times B$ die Menge der Paare (a, b), wo $b \varepsilon B$. Analog ist die Bedeutung von $A \times b$.

Aus **17·3·6**, **17·3·61**, **17·3·62** folgt wegen **20·1·1**:

(2) $$(A \times B)^0 = A^0 \times B^0, \qquad (A \times B)^1 = (A^1 \times B^0) + (A^0 \times B^1), \\ (A \times B)_i = A_i \times B_i.$$

Aus der ersten Formel (2) und **10·5·6** folgt (bei Beachtung von **2·2·11**):

20·2·1. *Damit $A \times B$ abgeschlossen sei (in E), ist hinreichend, und wenn $A \times B \supset A$ ist, auch notwendig, daß A und B abgeschlossen (in $E^{(1)}$ bzw. in $E^{(2)}$) seien.*

Ebenso folgt aus der dritten Formel (2) und **10·3·6**:

20·2·11. *Damit $A \times B$ offen sei, ist hinreichend, und wenn $A \times B \supset A$ ist, auch notwendig, daß A und B offen seien.*

Da nach § 10 (6): $(A \times B)_r = (A \times B) - (A \times B)_i$, folgt aus (2) und § 2 (2):

(2·1) $$(A \times B)_r = (A_r \times B) + (A \times B_r).$$

Aus der dritten Formel (2) folgt:

20·2·12. *Damit $A \times B$ Randmenge sei, ist notwendig und hinreichend, daß wenigstens eine der Mengen A, B Randmenge sei.*

20·2·13. *Ist sowohl A als B ein F_σ (ein G_δ), so ist auch $A \times B$ ein F_σ (ein G_δ)*[1].

Nach **10·7·3** können wir schreiben: $A = \underset{n}{S} A_n$, $B = \underset{n}{S} B_n$, wo A_n, B_n abgeschlossen und $A_n \subseteqq A_{n+1}$, $B_n \subseteqq B_{n+1}$. Dann ist $A \times B = \underset{n}{S}(A_n \times B_n)$. Nach **20·2·1** ist $A_n \times B_n$ abgeschlossen, also ist $A \times B$ ein F_σ.

20·2·2. *Damit $A \times B$ dicht sei, ist hinreichend, und wenn $E \supset A$ ist, auch notwendig, daß A und B dicht seien.*

Nach **11·1·1** ist $A \times B$ dicht dann und nur dann, wenn $(A \times B)^0 = E$, d. h. nach (2), wenn $A^0 \times B^0 = E$; das ist aber, wenn $E \supset A$, dann und nur dann der Fall, wenn $A^0 = E^{(1)}$, $B^0 = E^{(2)}$, d. h. nach **11·1·1** wenn A und B dicht.

20·2·21. *Damit $A \times B$ nirgends dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß wenigstens eine der Mengen A, B nirgends dicht sei.*

Dies folgt wegen **11·2·1** aus (2) und **20·2·12**.

Aus **20·2·21** und dem ersten Distributivgesetz § 2 (2·1) folgt:

20·2·22. *Ist wenigstens eine der beiden Mengen A, B von erster Kategorie, so ist auch $A \times B$ von erster Kategorie.*

---

[1]) Die Umkehrung hiervon wird in **20·4·3** bewiesen.

20·2·23. *Sind A und B Residualmengen, so ist auch $A \times B$ eine Residualmenge.*

Denn nach § 2 (2) ist $-(A \times B) = ((-A) \times E^{(2)}) + (E^{(1)} \times (-B))$; hierin ist, wenn $-A$, $-B$ von erster Kategorie sind, nach **20·2·22** jeder der beiden Summanden rechts von erster Kategorie, also nach **19·4·2** auch $-(A \times B)$.

Aus der zweiten Formel (2) folgert man leicht für die Menge der isolierten Punkte von $A \times B$ (§ 12, 2):

(2·2) $$(A \times B)_j = A_j \times B_j.$$

Hieraus, zusammen mit § 12 (2), folgt nach § 2 (2):

(2·3) $$(A \times B)_h = (A \times B_h) + (A_h \times B).$$

Aus (2·2) folgen die Sätze:

20·2·3. *Damit $A \times B$ isoliert sei, ist hinreichend, und wenn $A \times B \supset A$ ist, auch notwendig, daß A und B isoliert seien.*

20·2·31. *Damit $A \times B$ insichdicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß wenigstens eine der Mengen A, B insichdicht sei.*

20·2·4. *Damit $A \times B$ separabel sei, ist hinreichend, und wenn $A \times B \supset A$ ist, auch notwendig, daß A und B separabel seien.*

Hinreichend: Nach **13·1·3** gibt es eine in A dichte abzählbare Menge A' und eine in B dichte abzählbare Menge B'; nach **20·2·2** ist dann $A' \times B'$ eine in $A \times B$ dichte abzählbare Menge, d. h. nach **13·1·31**: $A \times B$ ist separabel. Notwendig: Ist $A \times B$ separabel, so gibt es nach **13·1·3** eine in $A \times B$ dichte abzählbare Menge von Punkten (a_n, b_n) $(n = 1, 2, \ldots)$; nach **11·1·4** ist dann auch die Menge C der Punkte (a_n, b_ν) $(n, \nu = 1, 2, \ldots)$ dicht in $A \times B$; ist A' die Menge der Punkte a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ und B' die Menge der Punkte b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, so ist $C = A' \times B'$, und nach **20·2·2** ist A' dicht in A, B' dicht in B; nach **13·1·31** sind also A und B separabel.

20·2·5. *Damit $A \times B$ kompakt sei, ist hinreichend, und wenn $A \times B \supset A$ ist, auch notwendig, daß A und B kompakt seien.*

Hinreichend: Sei (a_n, b_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Punktfolge aus $A \times B$. Da A kompakt, hat nach **17·2·3** die Folge $((a_n))$ einen Häufungspunkt a, und nach **17·3·53** gibt es in ihr eine Teilfolge $((a_{n_\nu}))$, so daß $\lim\limits_{\nu} a_{n_\nu} = a$. Da B kompakt, hat auch die Folge $((b_{n_\nu}))$ einen Häufungspunkt b, und enthält somit eine Teilfolge $((b_{n_{\nu_i}}))$, so daß $\lim\limits_{i} b_{n_{\nu_i}} = b$. Nach **20·1·1** ist dann $\lim\limits_{i} (a_{n_{\nu_i}}, b_{n_{\nu_i}}) = (a, b)$; die Folge der (a_n, b_n) hat somit den Häufungspunkt (a, b), und nach **17·2·3** ist $A \times B$ kompakt. Notwendig: Sei A nicht

kompakt und $b \varepsilon B$; dann ist die mit A isometrische Menge $A \times b$ ein nicht kompakter Teil von $A \times B$, und nach **15·1·2** ist auch $A \times B$ nicht kompakt.

20·2·51. *Damit $A \times B$ in sich kompakt sei, ist hinreichend, und wenn $A \times B \supset \Lambda$ ist, auch notwendig, daß A und B in sich kompakt seien.*

Dies folgt wegen **15·2·22** aus **20·2·5** und **20·2·1**.

20·2·52. *Damit $A \times B$ halbkompakt sei, ist hinreichend, und wenn $A \times B \supset \Lambda$ ist, auch notwendig, daß A und B halbkompakt seien.*

Hinreichend: Sei $A = \underset{n}{S} A_n$, $B = \underset{\nu}{S} B_\nu$, wo A_n, B_ν in sich kompakt. Nach § 2 (2·1) ist: $A \times B = \underset{n,\nu}{S} (A_n \times B_\nu)$, und die Behauptung folgt aus **20·2·51**. Notwendig: Sei $(A \times B) = \underset{n}{S} C_n$, wo $C_n \supset \Lambda$ und in sich kompakt. Sei A_n die Menge aller $a \varepsilon A$, zu denen es ein b gibt, so daß $(a, b) \varepsilon C_n$. Da offenbar $A = \underset{n}{S} A_n$, genügt es zu zeigen, daß A_n in sich kompakt ist. Sei $((a_\nu))$ eine Punktfolge aus A_n; es gibt dazu eine Punktfolge (a_ν, b_ν) $(\nu = 1, 2, \ldots)$ in C_n; da C_n in sich kompakt, besitzt nach **17·2·31** die Folge der (a_ν, b_ν) einen Häufungspunkt $(a, b) \varepsilon C_n$; dann ist $a \varepsilon A_n$, und nach **20·1·2** ist a Häufungspunkt von $((a_\nu))$, somit ist A_n nach **17·2·31** in sich kompakt, w. z. b. w.

20·2·6. *Damit $A \times B$ zusammenhängend sei, ist hinreichend, und wenn $A \times B \supset \Lambda$ ist, auch notwendig, daß A und B zusammenhängend seien.*

Hinreichend: Sei $(a_1, b_1) \varepsilon A \times B$, $(a_2, b_2) \varepsilon A \times B$. Sind A und B zusammenhängend, so auch die mit A bzw. B isometrischen Mengen $A \times b_1$, $a_2 \times B$; da diese Mengen den Punkt (a_2, b_1) gemein haben, ist nach **16·1·4** auch ihre Summe C zusammenhängend, und da $(a_1, b_1) \varepsilon C$, $(a_2, b_2) \varepsilon C$, ist nach **16·1·21** auch $A \times B$ zusammenhängend. Notwendig: Sei A unzusammenhängend; nach **16·1·12** gibt es eine Zerlegung $A = A' + A''$ von A in zwei abgesonderte Summanden $\supset \Lambda$. Dann ist auch $A \times B = (A' \times B) + (A'' \times B)$. Wegen (2) ist hierbei $(A' \times B)^0 (A'' \times B) = (A'^0 \times B^0)(A'' \times B)$; und da A', A'' abgesondert, also $A'^0 A'' = \Lambda$, ist auch $(A' \times B)^0 (A'' \times B) = \Lambda$; ebenso ist $(A' \times B)(A'' \times B)^0 = \Lambda$; also sind die beiden Summanden $A' \times B$ und $A'' \times B$ von $A \times B$ abgesondert, und da sie wegen $A' \supset \Lambda$, $A'' \supset \Lambda$, $B \supset \Lambda$ beide $\supset \Lambda$ sind, ist $A \times B$ unzusammenhängend.

Aus **20·1·1**, **20·1·3** folgt ohne weiteres:

20·2·7. *Damit $A \times B$ vollständig sei, ist hinreichend, und wenn $A \times B \supset \Lambda$ ist, auch notwendig, daß A und B vollständig seien.*

20·2·71. *Sind A und B Youngsche Mengen, so ist auch $A \times B$ eine Youngsche Menge.*

Dies folgt aus **20·2·7** und **20·2·13.**

Aus **18·2·2** und **20·2·7** folgt durch vollständige Induktion:

20·2·8. *Der R_n ist vollständig.*

20·2·81. *Damit die Menge $A \subseteqq R_n$ kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie beschränkt sei.*

Notwendig: Dies folgt aus **15·1·5.** Hinreichend: Dies folgt, da in einer beschränkten Menge des R_n offenbar jedes ϱ-Netz endlich ist, aus **20·2·8** und **18·3·3.**

20·2·811. *Damit die Menge $A \subseteqq R_n$ in sich kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie beschränkt und abgeschlossen sei.*

Notwendig: Dies folgt aus **15·1·5** und **15·2·22.** Hinreichend: Dies folgt aus **20·2·81** und **15·2·2.**

20·2·82. *Der R_n ist halbkompakt.*

Ist $a \,\varepsilon\, R_n$ und $\overline{K}_{a\nu}$ die abgeschlossene Kugel vom Mittelpunkt a und Radius ν, so ist $R_n = \underset{\nu}{S}\, \overline{K}_{a\nu}$. Da nach **20·2·811** $\overline{K}_{a\nu}$ in sich kompakt, ist der R_n halbkompakt.

Im Gegensatze zu **20·2·81** ist, wie wir in § 15, 1 sahen, keineswegs jede beschränkte Punktmenge des R_ω kompakt. Wohl aber gilt, wenn wir mit Q_ω die Menge aller $((a_\nu)) \,\varepsilon\, R_\omega$ bezeichnen, deren Koordinaten den Ungleichungen $0 \le a_\nu \le \frac{1}{\nu}$ genügen:

20·2·83. *Die Menge $Q_\omega \subset R_\omega$ ist in sich kompakt.*

Sei $((b_\nu)) \,\varepsilon\, R_\omega - Q_\omega$; dann gibt es ein ν^*, so daß $b_{\nu^*} \sim\varepsilon \left[0, \frac{1}{\nu^*}\right]$; mithin gibt es auch ein $\sigma > 0$, so daß aus $|x_{\nu^*} - b_{\nu^*}| < \sigma$ folgt: $x_{\nu^*} \sim\varepsilon \left[0, \frac{1}{\nu^*}\right]$; mithin gilt für die Kugel K des R_ω vom Mittelpunkt $((b_\nu))$ und vom Radius σ: $K \subseteqq R_\omega - Q_\omega$; nach **10·3·1** und **10·3·6** ist also $R_\omega - Q_\omega$ offen, also Q_ω abgeschlossen. Nach **15·2·2** ist nun nur mehr zu zeigen: Q_ω ist kompakt. Sei $\varrho > 0$; wir wählen n so, daß $\sum\limits_{\nu > n} \frac{1}{\nu^2} < \frac{\varrho^2}{4}$, und ordnen jedem Punkte $((a_\nu)) \,\varepsilon\, R_\omega$ den Punkt $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,\varepsilon\, R_n$ zu; der Menge $Q_\omega \subset R_\omega$ entspricht so eine beschränkte Punktmenge Q_n des R_n; seien $x = ((a_\nu))$, $x' = ((a'_\nu))$ zwei Punkte von Q_ω und $y = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $y' = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ ihre zugeordneten Punkte des R_n; wegen

$$\sqrt{\sum_{\nu} (a_\nu - a'_\nu)^2} \le \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu - a'_\nu)^2} + \sqrt{\sum_{\nu>n} (a_\nu - a'_\nu)^2} < \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu - a'_\nu)^2} + \frac{\varrho}{2}$$

gilt dann für die Abstände: $y\,y' > x\,x' - \frac{\varrho}{2}$; jedem ϱ-Netz in Q_ω entspricht also in Q_n eine Menge M von Punkten, die zu je zweien einen Abstand $> \frac{\varrho}{2}$ haben; da Q_n eine beschränkte Punktmenge des R_n, muß M endlich sein; also ist jedes ϱ-Netz in Q_ω endlich; nach **18·3·3** und **18·2·21** ist somit Q_ω kompakt, w. z. b. w.

3. **Intervalle im R_n.** Seien (a_i, b_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ n offene Intervalle des R_1. Wir setzen:

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n;\ b_1, b_2, \ldots, b_n);$$

diese Menge ist nach **20·2·11** offen im R_n; sie heißt ein offenes Intervall des R_n. Ebenso ist nach **20·2·1** die Menge:

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] = [a_1, a_2, \ldots, a_n;\ b_1, b_2, \ldots, b_n]$$

abgeschlossen im R_n; sie heißt ein abgeschlossenes Intervall des R_n. Die Mengen:

$$[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_n, b_n) = [a_1, a_2, \ldots, a_n;\ b_1, b_2, \ldots, b_n)$$
$$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \ldots \times (a_n, b_n] = (a_1, a_2, \ldots, a_n;\ b_1, b_2, \ldots, b_n]$$

heißen halboffene Intervalle des R_n. Offenbar ist $(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n)$ der offene Kern sowohl von $[a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n]$, als von $[a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n)$, als von $(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n]$; und $[a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n]$ ist die abgeschlossene Hülle von $(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n)$, von $[a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n)$ und von $(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n]$.

Aus **20·2·31** und **20·2·6** folgt:

20·3·1. *Jedes (abgeschlossene, offene, halboffene) Intervall des R_n ist insichdicht und zusammenhängend.*

20·3·2. *Das System $\mathfrak{S}$ aller Mengen des R_n, die Summe endlich vieler halboffener Intervalle $[a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sind, ist ein Körper, und jede Menge aus $\mathfrak{S}$ ist auch Summe endlich vieler disjunkter halboffener Intervalle $[a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n)$.*

Da die Differenz zweier halboffener Intervalle $[a, b)$ des R_1 Summe von höchstens zwei fremden solchen halboffenen Intervallen ist, gilt die Behauptung nach **3·3·2** und **3·3·21** für den R_1. Gilt sie für den R_n, so gilt sie wegen $R_{n+1} = R_n \times R_1$ nach **3·3·22**, wo unter $\mathfrak{A}$ das System der halboffenen Intervalle $[a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n)$ des R_n, unter $\mathfrak{B}$ das System der halboffenen Intervalle $[a, b)$ des R_1 zu verstehen ist, auch für den R_{n+1}.

20·3·3. *Jede offene Menge G des R_n ist Summe abzählbar vieler offener Intervalle des R_n.*

Sei $a \varepsilon G$; dann gibt es ein $\varrho_a > 0$, so daß auch $K_{a \varrho_a} \subseteqq G$; ist $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, und setzen wir $I_a = (a_1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \varrho_a, \ldots, a_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \varrho_a;$ $a_1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \varrho_a, \ldots, a_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \varrho_a)$, so ist $I_a \subseteqq K_{a \varrho_a}$, also $G = \underset{a \varepsilon G}{S} I_a$. Nach **18·3·1** gibt es also unter den I_a abzählbar viele $I_{a_1}, I_{a_2}, \ldots, I_{a_\nu}, \ldots$, so daß $G = \underset{\nu}{S} I_{a_\nu}$.

20·3·31. *Jede offene Menge G des R_n ist Summe abzählbar vieler disjunkter halboffener Intervalle $[a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n)$.*

Wählen wir beim Beweise von **20·3·3** $\varrho_a > 0$ so, daß auch die abgeschlossene Kugel $\overline{K}_{a \varrho_a} \subseteqq G$, so haben wir wie dort: $G = \underset{\nu}{S} I_{a_\nu}$; setzen wir nun $\overline{I}_a = \left[a_1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \varrho_a, \ldots, a_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \varrho_a;\ a_1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \varrho_a, \ldots, a_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \varrho_a\right)$, so ist $I_a \subseteqq \overline{I}_a \subseteqq \overline{K}_{a \varrho_a} \subseteqq G$ und $G = \underset{\nu}{S} \overline{I}_{a_\nu}$. Setzen wir noch $\overline{I}_{a_1} = M_1$, $\overline{I}_{a_\nu} - (\overline{I}_{a_1} + \ldots + \overline{I}_{a_{\nu-1}}) = M_\nu$ $(\nu > 1)$, so ist $G = \underset{\nu}{S} M_\nu$, und die M_ν sind disjunkt. Da nach **20·3·2** M_ν Summe endlich vieler disjunkter Intervalle $[a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n)$ ist, ist die Behauptung bewiesen.

4. **Schichten.** Sei M eine Punktmenge des Produktraumes $E^{(1)} \times E^{(2)}$. Ist $b \varepsilon E^{(2)}$, so bezeichnen wir als die S c h i c h t $M_b^{(1)}$ von M die Menge aller $x \varepsilon E^{(1)}$, für die $(x, b) \varepsilon M$; ebenso verstehen wir unter der Schicht $M_a^{(2)}$ $(a \varepsilon E^{(1)})$ die Menge aller $y \varepsilon E^{(2)}$, für die $(a, y) \varepsilon M$. Man erkennt sofort:

20·4·1. *Ist M offen (abgeschlossen) in $E^{(1)} \times E^{(2)}$, so ist für jedes $b \varepsilon E^{(2)}$ die Schicht $M_b^{(1)}$ von M offen (abgeschlossen) in $E^{(1)}$.*

Ist $M = \underset{\nu}{S} M_\nu$ (bzw. $M = \underset{\nu}{D} M_\nu$), so gilt offenbar für die Schichten: $M_b^{(1)} = \underset{\nu}{S} M_{\nu b}^{(1)}$ (bzw. $M_b^{(1)} = \underset{\nu}{D} M_{\nu b}^{(1)}$). Also folgt aus **20·4·1**:

20·4·2. *Ist M ein F_σ (ein G_δ) in $E^{(1)} \times E^{(2)}$, so ist für jedes $b \varepsilon E^{(2)}$ die Schicht $M_b^{(1)}$ von M ein F_σ (ein G_δ) in $E^{(1)}$.*

Nun können wir die Umkehrung von **20·2·18** beweisen.

20·4·3. *Ist $A \times B \supset A$ und ein F_σ (ein G_δ) in $E^{(1)} \times E^{(2)}$, so ist A ein F_σ (ein G_δ) in $E^{(1)}$ und B ein F_σ (ein G_δ) in $E^{(2)}$.*

Setzen wir $M = A \times B$, so ist für jedes $b \varepsilon B$: $M_b^{(1)} = A$; die Behauptung folgt also aus **20·4·2**.

Drittes Kapitel.

Der Begriff der Stetigkeit.

§ 21. Halbstetige Abbildungen.

1. **Unterhalb stetige Abbildungen.** Seien A und B metrische Räume; durch eine Relation P, deren Bereich die Menge A, deren Gegenbereich die Menge B ist, ist (§ 1, 4) eine Abbildung von A auf B gegeben.

Die Abbildung P heißt unterhalb stetig im Punkte $a \varepsilon A$, wenn es zu jeder in B offenen Menge G, für die $P(a)\, G \supset\!\!\!\!\!\!\; \Lambda$ ist, eine Umgebung U_a von a gibt, so daß für jedes $x \varepsilon U_a$ auch $P(x)\, G \supset\!\!\!\!\!\!\; \Lambda$. Die Abbildung P von A heißt unterhalb stetig, wenn sie in jedem Punkte $a \varepsilon A$ unterhalb stetig ist. In einem isolierten Punkte von A ist jede Abbildung P von A unterhalb stetig. Beispiel einer unterhalb stetigen Abbildung des Intervalles $[0, 1]$: $P(0) = [0, 1]$, $P(x) = [0, 2]$ für $x \neq 0$.

21·1·1. *Damit die Abbildung P unterhalb stetig sei im Punkte $a \varepsilon A$, ist notwendig und hinreichend, daß für jede Folge $((a_n))$ aus A mit $\lim\limits_n a_n = a$ und für jede in B offene Menge G mit $P(a)\, G \supset\!\!\!\!\!\!\; \Lambda$ gelte: $P(a_n)\, G \supset\!\!\!\!\!\!\; \Lambda$ für fast alle n.*

Notwendig: Es gibt ein U_a, so daß $P(x)\, G \supset\!\!\!\!\!\!\; \Lambda$ für alle $x \varepsilon U_a$; für fast alle n aber gilt: $a_n \varepsilon U_a$. Hinreichend: Ist P nicht unterhalb stetig in a, so gibt es ein G von folgender Art: es ist $P(a)\, G \supset\!\!\!\!\!\!\; \Lambda$ und in jeder Umgebung U_a gibt es ein x, für das $P(x)\, G = \Lambda$. Dies gilt insbesondere für $U_a = K_{a \frac{1}{n}}$, d. h. es gibt ein a_n, so daß $a_n a < \frac{1}{n}$ und $P(a_n)\, G = \Lambda$. Dann ist $a_n \to a$ und für kein n ist $P(a_n)\, G \supset\!\!\!\!\!\!\; \Lambda$.

21·1·2. *Damit die Abbildung P unterhalb stetig sei im Punkte $a \varepsilon A$, ist notwendig, daß für jede Folge $((a_n))$ aus A mit $\lim\limits_n a_n = a$ gelte: $\underline{\lim\limits_n}\, P(a_n) \geqq (P(a))^0$.*

Sei $b \varepsilon P(a)$ und U_b eine Umgebung von b; da $P(a)\, U_b \supset\!\!\!\!\!\!\; \Lambda$, gilt nach **21·1·1**: $P(a_n)\, U_b \supset\!\!\!\!\!\!\; \Lambda$ für fast alle n, d. h. $b \varepsilon \underline{\lim\limits_n}\, P(a_n)$, also ist $\underline{\lim\limits_n}\, P(a_n) \geqq P(a)$; und da nach **17·1·18** $\underline{\lim\limits_n}\, P(a_n)$ abgeschlossen, gilt nach **10·5·1** auch $\underline{\lim\limits_n}\, P(a_n) \geqq (P(a))^0$.

21·1·21. *Damit die Abbildung P unterhalb stetig sei im Punkte $a \varepsilon A$, ist hinreichend, daß für jede Folge $((a_n))$ aus A mit $\lim\limits_n a_n = a$ gelte: $\underline{\lim\limits_n}\, P(a_n) \supseteqq P(a)$.*

Sei $P(a)\, G \supset A$ und $b \varepsilon P(a)\, G$. Da G ein U_b und da wegen $\underline{\lim\limits_n}\, P(a_n) \supseteqq P(a)$ auch $b \varepsilon \underline{\lim\limits_n}\, P(a_n)$, ist $P(a_n)\, G \supset A$ für fast alle n. Nach **21·1·1** ist also P unterhalb stetig in a.

21·1·3. *Ist die Abbildung P unterhalb stetig im Punkte $a \varepsilon A$, ist $((a_n))$ eine Folge aus A mit $\lim\limits_n a_n = a$, und ist $b \varepsilon P(a)$, so gibt es ein $b_n \varepsilon P(a_n)$, so daß $\lim\limits_n b_n = b$.*

Da nach **21·1·2** $b \varepsilon \underline{\lim\limits_n}\, P(a_n)$, folgt dies aus **17·3·51.**

21·1·4. *Ist die Abbildung P von A unterhalb stetig, und ist A' dicht in A, so ist $P(A')$ dicht in $P(A)$.*

Sei $b \varepsilon P(A)$; dann gibt es ein $a \varepsilon A$, so daß $b \varepsilon P(a)$. Da A' dicht in A, gibt es nach **17·3·63** eine Punktfolge $((a_n))$ aus A', so daß $a_n \to a$. Nach **21·1·3** gibt es ein $b_n \varepsilon P(a_n)$, so daß $b_n \to b$; da $P(a_n) \subseteqq P(A')$, also $b_n \varepsilon P(A')$, ist $P(A')$ dicht in $P(A)$ nach **17·3·63.**

2. **Oberhalb stetige Abbildungen.** Die Abbildung P von A auf B heißt oberhalb stetig im Punkte $a \varepsilon A$, wenn es zu jeder in B offenen Menge G, für die $P(a) \subseteqq G$, eine Umgebung U_a gibt, so daß $P(U_a) \subseteqq G$. Die Abbildung P von A heißt oberhalb stetig, wenn sie in jedem Punkte $a \varepsilon A$ oberhalb stetig ist. In einem isolierten Punkte von A ist jede Abbildung P oberhalb stetig. Beispiel einer oberhalb stetigen Abbildung des Intervalles $[0, 1]$: $P(0) = [0, 2]$, $P(x) = [0, 1]$ für $x \neq 0$.

21·2·1. *Damit die Abbildung P oberhalb stetig sei im Punkte $a \varepsilon A$, ist notwendig und hinreichend, daß für jede Folge $((a_n))$ aus A mit $\lim\limits_n a_n = a$ und für jede in B offene Menge G mit $P(a) \subseteqq G$ gelte: $P(a_n) \subseteqq G$ für fast alle n.*

Notwendig: Es gibt ein U_a, so daß $P(U_a) \subseteqq G$; für fast alle n ist $a_n \varepsilon U_a$, also ist $P(a_n) \subseteqq G$ für fast alle n. Hinreichend: Ist P nicht oberhalb stetig in a, so gibt es ein $G \supseteqq P(a)$, so daß in jedem U_a ein x liegt, für das nicht $P(x) \subseteqq G$. Dies gilt insbesondere für $U_a = K_{a\frac{1}{n}}$, d. h. es gibt ein a_n, so daß $a_n a < \frac{1}{n}$ und nicht $P(a_n) \subseteqq G$. Dann ist $a_n \to a$, und für kein n ist $P(a_n) \subseteqq G$.

21·2·2. *Damit die Abbildung P oberhalb stetig sei im Punkte $a \varepsilon A$, ist notwendig, daß für jede Folge $((a_n))$ aus A mit $\lim\limits_n a_n = a$ gelte: $\overline{\lim\limits_n}\, P(a_n) \subseteqq (P(a))^0$.*

Dies folgt aus **21·2·1** wegen **17·1·5**.

21·2·21. *Ist B in sich kompakt, so ist, damit die Abbildung P von A auf B oberhalb stetig sei im Punkte $a \varepsilon A$, hinreichend, daß für jede Folge $((a_n))$ aus A mit $\lim\limits_n a_n = a$ gelte $\overline{\lim\limits_n}\, P(a_n) \subseteqq P(a)$.*

Dies folgt aus **21·2·1** wegen **17·1·51**.

Literatur: W. Hurewicz, Amst. Proc. 29 (1926) S. 1014.

3. In sich kompakte Abbildungen. Wir nennen eine Abbildung P von A **in sich kompakt**, wenn für jedes $x \varepsilon A$ die Bildmenge $P(x)$ in sich kompakt ist.

21·3·1. *Damit die Abbildung P unterhalb stetig sei im Punkte $a \varepsilon A$, ist hinreichend, und wenn P in sich kompakt ist, auch notwendig, daß es zu jedem $\delta > 0$ ein $\varrho > 0$ gebe, so daß für jedes $x \varepsilon K_{a\varrho}$ gilt: $P(a) \subseteqq U_{P(x)\delta}$.*

Hinreichend: Ist $((a_n))$ eine Punktfolge aus A mit $a_n \to a$, so ist $a_n \varepsilon K_{a\varrho}$ für fast alle n, also nach Annahme $P(a) \subseteqq U_{P(a_n)\delta}$ für fast alle n, also ist nach **17·1·6**: $\underline{\lim\limits_n}\, P(a_n) \supseteqq (P(a))^0 \supseteqq P(a)$; nach **21·1·21** ist also P unterhalb stetig in a. Notwendig: Ist die Bedingung nicht erfüllt, so gibt es ein $\delta > 0$, so daß in jeder Kugel $K_{a\varrho}$ ein x liegt, für das nicht $P(a) \subseteqq U_{P(x)\delta}$. Dann gibt es ein $a_n \varepsilon A$ mit $a_n a < \frac{1}{n}$, so daß nicht $P(a) \subseteqq U_{P(a_n)\delta}$. Nach **17·1·61** ist dann nicht $\underline{\lim\limits_n}\, P(a_n) \supseteqq P(a)$, und nach **21·1·2** ist P nicht unterhalb stetig in a.

21·3·2. *Damit die Abbildung P oberhalb stetig sei im Punkte $a \varepsilon A$, ist notwendig, und wenn P in sich kompakt ist, auch hinreichend, daß es zu jedem $\delta > 0$ ein $\varrho > 0$ gebe, so daß $P(K_{a\varrho}) \subseteqq U_{P(a)\delta}$.*

Notwendig: Da nach **9·4·1** $U_{P(a)\delta}$ eine offene Menge $\supseteqq P(a)$ ist, gibt es eine Umgebung U_a, so daß $P(U_a) \subseteqq U_{P(a)\delta}$. Da U_a offen, gibt es ein $\varrho > 0$, so daß $K_{a\varrho} \subseteqq U_a$; dann ist $P(K_{a\varrho}) \subseteqq P(U_a) \subseteqq U_{P(a)\delta}$. Hinreichend: Sei G eine in B offene Menge $\supseteqq P(a)$. Nach **15·2·54** gibt es ein $\delta > 0$, so daß $U_{P(a)\delta} \subseteqq G$; nach Annahme gibt es ein $\varrho > 0$, so daß $P(K_{a\varrho}) \subseteqq U_{P(a)\delta} \subseteqq G$; da $K_{a\varrho}$ eine Umgebung U_a ist, ist P oberhalb stetig in a.

Als Gegenstück zu **21·1·3** beweisen wir nun:

21·3·3. *Ist die in sich kompakte Abbildung P oberhalb stetig im Punkte $a \varepsilon A$, ist $((a_n))$ eine Punktfolge aus A mit $\lim\limits_n a_n = a$, und ist $b_n \varepsilon P(a_n)$, so hat die Folge $((b_n))$ einen Häufungspunkt $b \varepsilon P(a)$.*

Da nach **9·4·1** $U_{P(a)\frac{1}{\nu}}$ eine offene Menge $\supseteqq P(a)$ ist, gilt nach **21·2·1**: $P(a_n) \subseteqq U_{P(a)\frac{1}{\nu}}$ für fast alle n. Da $b_n \varepsilon P(a_n)$, gibt es also ein n_ν und ein $y_\nu \varepsilon P(a)$, so daß $b_{n_\nu} y_\nu < \frac{1}{\nu}$, wobei noch $n_{\nu+1} > n_\nu$ angenommen werden kann. Da $P(a)$ in sich kompakt, hat $((y_\nu))$ nach **17·2·31** einen Häufungspunkt $b \varepsilon P(a)$; wegen $b_{n_\nu} y_\nu < \frac{1}{\nu}$ ist b auch Häufungspunkt von $((b_{n_\nu}))$, also auch von $((b_n))$.

21·3·4. *Ist P eine in sich kompakte, oberhalb stetige Abbildung des in sich kompakten Raumes A auf B, so ist auch B in sich kompakt.*

Denn sei $((b_n))$ eine Folge aus B und $b_n \varepsilon P(a_n)$. Da A in sich kompakt, hat $((a_n))$ nach **17·2·31** einen Häufungspunkt $a \varepsilon A$. In $((a_n))$ gibt es nach **17·3·53** eine Teilfolge $((a_{n_i}))$ mit $\lim\limits_i a_{n_i} = a$; nach **21·3·3** hat daher $((b_{n_i}))$, und somit $((b_n))$ einen Häufungspunkt $b \varepsilon B$. Nach **17·2·31** ist also B in sich kompakt.

Für unterhalb stetige Abbildungen gilt ein solcher Satz natürlich nicht.

4. **Zusammenhängende Abbildungen.** Wir nennen eine Abbildung P von A zusammenhängend, wenn für jedes $x \varepsilon A$ die Bildmenge $P(x)$ zusammenhängend ist.

21·4·1. *Ist P eine zusammenhängende, unterhalb stetige Abbildung des zusammenhängenden Raumes A auf B, so ist auch B zusammenhängend.*

Sei $B = B' + B''$ eine Zerlegung von B in zwei abgesonderte Teile (§ 14, 1). Da $P(x)$ zusammenhängend ist für jedes $x \varepsilon A$, ist nach **16·1·2** entweder $P(x) \subseteqq B'$ oder $P(x) \subseteqq B''$. Seien A' und A'' die Teile von A, für die $P(x) \subseteqq B'$, bzw. $P(x) \subseteqq B''$. Dann sind A', A'' abgesondert; denn angenommen, es wäre etwa $A'(A'')^0 \supset \Lambda$; dann gibt es ein $a \varepsilon A'$ und eine Punktfolge $((a_n))$ aus A'' mit $\lim\limits_n a_n = a$; nach **14·1·1** ist B' eine (in B) offene Menge $\supseteqq P(a)$; nach **21·1·1** wäre dann $P(a_n) B' \supset \Lambda$ für fast alle n, das aber ist unmöglich, weil $P(a_n) \subseteqq B''$ und $B' B'' = \Lambda$. Also sind A', A'' abgesondert, und da A zusammenhängend, ist nach **16·1·12** sei es A', sei es A'' leer. Es ist also auch sei es B', sei es B'' leer, d. h. nach **16·1·12**: B ist zusammenhängend.

21·4·2. *Ist P eine zusammenhängende, oberhalb stetige Abbildung des zusammenhängenden Raumes A auf B, so ist auch B zusammenhängend.*

Der Beweis ist derselbe wie für **21·4·1**, nur hat man sich, um zu zeigen, daß A' und A'' abgesondert sind, auf **21·2·1** statt auf **21·1·1** zu berufen.

5. **Charakterisierung durch Urbildmengen.** Wir entwickeln nun eine charakteristische Bedingung dafür, daß eine Abbildung von A auf B unterhalb (oberhalb) stetig sei.

21·5·1. *Damit die Abbildung P von A auf B unterhalb stetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß das Urbild $P^{-1}(G)$ jeder in B offenen Menge G offen in A sei.*

Notwendig: Sei $a \varepsilon P^{-1}(G)$ und $b \varepsilon P(a)\,G$; weil P unterhalb stetig, gibt es ein U_a, so daß $P(x)\,G \supset \Lambda$ für $x \varepsilon U_a$; dann ist aber auch $x \varepsilon P^{-1}(G)$, also $U_a \subseteqq P^{-1}(G)$, d. h. $P^{-1}(G)$ ist offen in A. Hinreichend: Sei G offen in B und $P(a)\,G \supset \Lambda$. Dann ist $a \varepsilon P^{-1}(G)$, und da $P^{-1}(G)$ offen in A, gibt es ein $U_a \subseteqq P^{-1}(G)$; für jedes $x \varepsilon U_a$ gibt es also ein Bild $y \varepsilon G$, d. h. für $x \varepsilon U_a$ ist $P(x)\,G \supset \Lambda$, d. h. P ist unterhalb stetig.

21·5·2. *Damit die Abbildung P von A auf B oberhalb stetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß das Urbild $P^{-1}(F)$ jeder in B abgeschlossenen Menge F abgeschlossen in A sei.*

Notwendig: Sei $a \varepsilon A - P^{-1}(F)$; dann gehört kein Bildpunkt von a zu F, d. h. $P(a) \subseteqq B - F$. Da $B - F$ offen und P oberhalb stetig, gibt es ein U_a, so daß $P(U_a) \subseteqq B - F$; für $x \varepsilon U_a$ ist also $P(x)\,F = \Lambda$, also $x \sim\varepsilon P^{-1}(F)$, d. h. $x \varepsilon A - P^{-1}(F)$; also ist $U_a \subseteqq A - P^{-1}(F)$, d. h. $A - P^{-1}(F)$ ist offen, d. h. $P^{-1}(F)$ ist abgeschlossen in A. Hinreichend: Sei $a \varepsilon A$, sei G offen in B und $P(a) \subseteqq G$; da $F = B - G$ abgeschlossen in B, ist nach Annahme $P^{-1}(F)$ abgeschlossen in A. Da $P(a)\,F = \Lambda$, ist $a \sim\varepsilon P^{-1}(F)$, und da $P^{-1}(F)$ abgeschlossen, gibt es ein U_a, so daß $U_a\,P^{-1}(F) = \Lambda$. Für dieses U_a ist $P(U_a)\,F = \Lambda$, also $P(U_a) \subseteqq G$, d. h. P ist oberhalb stetig.

6. **Inverse Abbildung.** Sei P eine Abbildung von A auf B und P^{-1} die zu P inverse Abbildung (§ 1, 4) von B auf A.

21·6·1. *Ist $a \varepsilon P^{-1}(b)$, und ist P unterhalb stetig in a, so gibt es zu jeder Umgebung U_b eine Umgebung U_a, so daß $U_a \subseteqq P^{-1}(U_b)$.*

Wegen $a \varepsilon P^{-1}(b)$ ist $b \varepsilon P(a)$, also ist $P(a)\,U_b \supset \Lambda$. Weil P unterhalb stetig in a, gibt es also ein U_a, so daß $P(x)\,U_b \supset \Lambda$ für alle $x \varepsilon U_a$; dann aber ist $x \varepsilon P^{-1}(U_b)$ für alle $x \varepsilon U_a$, d. h. $U_a \subseteqq P^{-1}(U_b)$.

21·6·11. *Damit die Abbildung P von A auf B unterhalb stetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem $b \varepsilon B$, jeder Umgebung U_b und jedem $a \varepsilon P^{-1}(b)$ eine Umgebung U_a gebe, so daß $U_a \subseteqq P^{-1}(U_b)$.*

Notwendig: Dies folgt aus **21·6·1.** Hinreichend: Sei $a \varepsilon A$, sei G eine in B offene Menge und $P(a)\,G \supset \Lambda$. Ist dann $b \varepsilon P(a)\,G$, so ist G eine Umgebung U_b. Nach Annahme gibt es eine Umgebung $U_a \subseteqq P^{-1}(G)$; für alle $x \varepsilon U_a$ ist dann $P(x)\,G \supset \Lambda$; also ist P unterhalb stetig in a.

21·6·2. *Ist P oberhalb stetig in a, ist $P(a)$ abgeschlossen in B, und ist $U_a P^{-1}(U_b) \supset \Lambda$ für jede Umgebung U_a und jede Umgebung U_b, so ist $a \varepsilon P^{-1}(b)$.*

Wäre $a \sim\varepsilon P^{-1}(b)$, so wäre auch $b \sim\varepsilon P(a)$, es gäbe also, da $P(a)$ abgeschlossen, nach **14·2·41** und **14·2·1** eine in B offene Menge G und eine Umgebung U_b, so daß $P(a) \subseteqq G$ und $G\, U_b = \Lambda$; da P oberhalb stetig in a, gäbe es ein U_a, so daß $P(U_a) \subseteqq G$, also $P(U_a)\, U_b = \Lambda$; dann aber wäre auch $U_a P^{-1}(U_b) = \Lambda$, entgegen der Annahme.

21·6·21. *Ist die Abbildung P von A auf B oberhalb stetig, und ist $P(a)$ abgeschlossen in B für alle $a \varepsilon A$, so gilt für jedes $b \varepsilon B$ und jede Punktfolge $((b_n))$ aus B mit $b_n \to b$: $\overline{\lim_n}\, P^{-1}(b_n) \subseteqq P^{-1}(b)$.*

Sei $a \varepsilon \overline{\lim_n}\, P^{-1}(b_n)$; für jedes U_a ist dann $U_a P^{-1}(b_n) \supset \Lambda$ für unendlich viele n; für jedes U_b gilt: $b_n \varepsilon U_b$ für fast alle n, also ist $P^{-1}(b_n) \subseteqq P^{-1}(U_b)$ für fast alle n; somit ist $U_a P^{-1}(U_b) \supset \Lambda$, also gilt nach **21·6·2**: $a \varepsilon P^{-1}(b)$.

Die Umkehrung hiervon gilt in der Form:

21·6·211. *Damit die Abbildung P von A auf den in sich kompakten Raum B oberhalb stetig sei, ist hinreichend, daß für jedes $b \varepsilon B$ und für jede Punktfolge $((b_n))$ aus B mit $b_n \to b$ gelte: $\underline{\lim_n}\, P^{-1}(b_n) \subseteqq P^{-1}(b)$.*

Sei $a \varepsilon A$ und $((a_\nu))$ eine Folge aus A mit $a_\nu \to a$. Ist $b \varepsilon \overline{\lim_\nu}\, P(a_\nu)$, so gibt es nach **17·3·521** eine Teilfolge $((a_{\nu_n}))$ und ein $b_n \varepsilon P(a_{\nu_n})$, so daß $b_n \to b$. Da dann $a_{\nu_n} \varepsilon P^{-1}(b_n)$ und $a_{\nu_n} \to a$, ist nach **17·3·5**: $a \varepsilon \underline{\lim_n}\, P^{-1}(b_n)$, also nach Annahme auch $a \varepsilon P^{-1}(b)$, also $b \varepsilon P(a)$. Aus $b \varepsilon \overline{\lim_\nu}\, P(a_\nu)$ folgt also $b \varepsilon P(a)$, d. h. es ist $\overline{\lim_\nu}\, P(a_\nu) \subseteqq P(a)$, also ist P oberhalb stetig nach **21·2·21**.

21·6·3. *Ist P eine oberhalb stetige Abbildung des in sich kompakten Raumes A auf den Raum B, und ist $P(a)$ abgeschlossen in B für alle $a \varepsilon A$, so ist auch P^{-1} oberhalb stetig.*

Nach **21·6·21** gilt für jedes $b \varepsilon B$ und jede Punktfolge $((b_n))$ aus B mit $b_n \to b$: $\overline{\lim_n}\, P^{-1}(b_n) \subseteqq P^{-1}(b)$; da A in sich kompakt, ist P^{-1} nach **21·2·21** oberhalb stetig.

Die Umkehrung hiervon gilt in der Form:

21·6·31. *Damit die Abbildung P von A auf den in sich kompakten Raum B oberhalb stetig sei, ist hinreichend, daß P^{-1} oberhalb stetig sei, und $P^{-1}(b)$ abgeschlossen sei in A für alle $b \varepsilon B$.*

Da P^{-1} oberhalb stetig, gilt für jede Folge $((b_n))$ aus B mit $b_n \to b$ zufolge **21·2·2**: $\overline{\lim_n}\, P^{-1}(b_n) \subseteqq (P^{-1}(b))^0$; da $P^{-1}(b)$ abgeschlossen, ist dies gleichbedeutend mit $\overline{\lim_n}\, P^{-1}(b_n) \subseteqq P^{-1}(b)$; nun folgt die Behauptung aus **21·6·211.**

7. **Zusammensetzung.** Sei P eine Abbildung von A auf C, und Q eine Abbildung von C auf B; dann ist $S = P \mid Q$ (§ 1, 4) eine Abbildung von A auf B.

21·7·1. *Sei $S = P \mid Q$; ist P unterhalb stetig in a, und gibt es zu jedem $b \varepsilon S(a)$ ein $c \varepsilon P(a)$, so daß $b \varepsilon Q(c)$ und Q unterhalb stetig in c, so ist S unterhalb stetig in a.*

Sei G eine in B offene Menge mit $S(a)\, G \supset\!\!\!\!\supset \Lambda$, und sei $b \varepsilon S(a)\, G$; dann gibt es ein $c \varepsilon P(a)$, so daß $b \varepsilon Q(c)$ und Q unterhalb stetig in c; dann gibt es eine Umgebung U_c, so daß $Q(z)\, G \supset\!\!\!\!\supset \Lambda$ für alle $z \varepsilon U_c$. Weil U_c offen in C und $U_c\, P(a) \supset\!\!\!\!\supset \Lambda$, und weil P unterhalb stetig in a, gibt es eine Umgebung U_a, so daß $P(x)\, U_c \supset\!\!\!\!\supset \Lambda$ für alle $x \varepsilon U_a$. Sei $x \varepsilon U_a$ und $z \varepsilon P(x)\, U_c$; dann ist, wie eben gezeigt: $Q(z)\, G \supset\!\!\!\!\supset \Lambda$; es gibt also ein $y \varepsilon Q(z)\, G$; dann ist $z \varepsilon P(x)$, $y \varepsilon Q(z)$, also $y \varepsilon S(x)$, also $S(x)\, G \supset\!\!\!\!\supset \Lambda$; da dies für alle $x \varepsilon U_a$ gilt, ist S unterhalb stetig in a.

21·7·2. *Sei $S = P \mid Q$; ist P oberhalb stetig in a und Q oberhalb stetig in jedem Punkte $z \varepsilon P(a)$, so ist S oberhalb stetig in a.*

Sei G eine in B offene Menge $\supseteqq S(a)$. Da $Q(z) \subseteqq S(a)$ für alle $z \varepsilon P(a)$, und da Q oberhalb stetig in z, gibt es zu jedem $z \varepsilon P(a)$ eine Umgebung U_z, so daß $Q(U_z) \subseteqq G$. Setzen wir $G' = \underset{z \varepsilon P(a)}{S} U_z$, so ist also auch $Q(G') \subseteqq G$. Da G' eine in C offene Menge $\supseteqq P(a)$, und da P oberhalb stetig in a, gibt es eine Umgebung U_a, so daß $P(U_a) \subseteqq G'$. Wegen $Q(G') \subseteqq G$ ist dann $S(U_a) \subseteqq G$, d. h. S ist oberhalb stetig in a.

§ 22. Stetige Abbildungen.

1. **Stetige Abbildungen.** Ist die Abbildung P des Raumes A auf den Raum B im Punkte $a \varepsilon A$ sowohl unterhalb als oberhalb stetig, so heißt P stetig in a. Ist P in jedem Punkte $a \varepsilon A$ stetig, so heißt P stetig. In einem isolierten Punkte von A ist jede Abbildung von A stetig.

22·1·1. *Damit die Abbildung P von A auf B stetig sei in a, ist notwendig, daß für jede Folge $((a_n))$ aus A mit $\lim_n a_n = a$ gelte: $\lim_n P(a_n) = (P(a))^0$.*

Dies folgt, da $\lim_n P(a_n) = (P(a))^0$ gleichbedeutend ist mit $\overline{\lim_n}\, P(a_n) \subseteqq (P(a))^0 \subseteqq \underline{\lim_n}\, P(a_n)$, aus **21·1·2** und **21·2·2.**

21·1·11. *Ist B in sich kompakt, so ist, damit die Abbildung P von A auf B stetig sei in a, hinreichend, daß für jede Folge $((a_n))$ aus A mit $\lim\limits_n a_n = a$ gelte: $\lim\limits_n P(a_n) = P(a)$.*

Dies folgt aus 21·1·21 und 22·2·21.

Machen wir Gebrauch von der in § 9, 6 definierten Abweichung $e(M, N)$ zweier Mengen, so erhalten wir:

22·1·2. *Damit die in sich kompakte Abbildung P stetig sei in a, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem $\delta > 0$ ein $\sigma > 0$ gibt, so daß für alle $x \varepsilon K_{a\sigma}$ die Ungleichung gilt*[1]: $e(P(x), P(a)) < \delta$.

Dies folgt aus 21·3·1, 21·3·2.

Aus 22·1·2 folgt in bekannter Weise:

22·1·21. *Damit die in sich kompakte Abbildung P stetig sei in a, ist notwendig und hinreichend, daß für jede Folge $((a_n))$ aus A mit $\lim\limits_n a_n = a$ gelte:* $\lim\limits_n e(P(a_n), P(a)) = 0$.

22·1·3. *Damit die Abbildung P von A auf B stetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß $P^{-1}(G)$ offen in A sei für jede in B offene Menge G, und $P^{-1}(F)$ abgeschlossen in A sei für jede in B abgeschlossene Menge F.*

Dies folgt aus 21·5·1, 21·5·2.

22·1·4. *Ist P stetig in a, Q stetig in jedem Punkte $z \varepsilon P(a)$, so ist $P \mid Q$ stetig in a.*

Dies folgt aus 21·7·1, 21·7·2.

22·1·5. *Ist P oberhalb stetig in a, und besteht $P(a)$ aus einem einzigen Punkte, so ist P stetig in a.*

Sei $P(a) = \{b\}$ und sei G eine in B offene Menge, so daß $P(a)\,G \supset \Lambda$, d. h. $b \varepsilon G$, d. h. $P(a) \subseteqq G$. Da P oberhalb stetig in a, gibt es eine Umgebung U_a, so daß $P(U_a) \subseteqq G$; für jedes $x \varepsilon U_a$ ist dann $P(x) \subseteqq G$, also $P(x)\,G \supset \Lambda$, also ist P auch unterhalb stetig in a, mithin stetig in a.

2. **Gleichmäßige Stetigkeit.** Als Verschärfung von 22·1·2 beweisen wir nun:

22·2·1. *Ist A' ein in sich kompakter Teil von A, und ist P eine in sich kompakte Abbildung von A, die in jedem Punkte von A' stetig ist, so gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $\sigma > 0$, so daß für je zwei Punkte $a \varepsilon A$, $a' \varepsilon A'$ mit $a\,a' < \sigma$ die Ungleichung gilt*: $e(P(a), P(a')) < \delta$.

Anderenfalls gäbe es ein $\delta > 0$ und für jedes n zwei Punkte $a_n \varepsilon A$, $a'_n \varepsilon A'$ mit $a_n\,a'_n < \frac{1}{n}$ und $e(P(a_n), P(a'_n)) \geq \delta$. Da A' in sich kompakt, hat

[1]) Ist die Abbildung P eindeutig, so reduzieren sich die Mengen $P(x)$, $P(a)$ auf je einen Punkt, und $e(P(x), P(a))$ wird der Abstand dieser beiden Punkte.

$((a'_n))$ einen Häufungspunkt $a \,\varepsilon\, A'$, und durch Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen: $a'_n \to a$; wegen $a_n a'_n < \frac{1}{n}$ gilt dann auch $a_n \to a$. Da P in sich kompakt und stetig in a, gilt nach **22·1·21**: $e(P(a_n), P(a)) \to 0$, $e(P(a'_n), P(a)) \to 0$, somit nach § 9 (6·32): $e(P(a_n), P(a'_n)) \to 0$, im Widerspruche damit, daß $e(P(a_n), P(a'_n)) \geq \delta$ war für alle n.

Wir sagen: die Abbildung P ist gleichmäßig stetig auf A, wenn es zu jedem $\delta > 0$ ein $\sigma > 0$ gibt, so daß für je zwei Punkte a, a' von A mit $a a' < \sigma$ die Ungleichung gilt: $e(P(a), P(a')) < \delta$. Dann ist in **22·2·1** enthalten:

22·2·2. *Jede in sich kompakte stetige Abbildung einer in sich kompakten Menge A ist gleichmäßig stetig auf A.*

3. **Teilabbildungen.** Sei P eine Abbildung von A. Ist dann $C \subseteqq A$, und ordnen wir jedem $x \,\varepsilon\, C$ als Bilder alle $y \,\varepsilon\, P(x)$ zu, so ist dadurch eine Abbildung von C definiert, die wir als die auf C eingeschränkte Teilabbildung von P bezeichnen, in Zeichen $C \,1\, P$.

Ist $c \,\varepsilon\, C$ und P stetig (oberhalb, unterhalb stetig) in c, so ist auch $C \,1\, P$ stetig (oberhalb, unterhalb stetig) in c; ist P stetig (oberhalb, unterhalb stetig) auf A, so ist $C \,1\, P$ stetig (oberhalb, unterhalb stetig) auf C.

22·3·1. *Ist P eine stetige Abbildung von A auf B, und ist $P(a)$ abgeschlossen in B für jedes $a \,\varepsilon\, A$, so ist, wenn C dicht in A ist, die Abbildung P durch die Teilabbildung $C \,1\, P$ völlig bestimmt.*

In der Tat, nach Annahme ist $P(a)$ abgeschlossen, d. h. es ist $P(a) = (P(a))^0$. Da C dicht in A, gibt es nach **17·3·68** zu jedem $a \,\varepsilon\, A$ in C eine Folge $((c_n))$ mit $c_n \to a$; nach **22·1·1** ist dann $P(a) = \lim\limits_n P(c_n)$.

4. **Erweiterung einer Abbildung.** Wir haben bisher, wenn P eine Abbildung von A auf B war, A und B selbst als die zugrunde gelegten metrischen Räume betrachtet: alle auftretenden Relativbegriffe (wie: offen, abgeschlossen, abgeschlossene Hülle, dicht) waren in bezug auf A, bzw. B zu verstehen. Nun denken wir uns A und B als Punktmengen je eines metrischen Raumes $X \supseteqq A$, $Y \supseteqq B$; alle auftretenden Relativbegriffe sind im folgenden, wo nichts anderes gesagt, in bezug auf X, bzw. Y zu verstehen.

Ist P eine Abbildung von A und $A \subseteqq A' \subseteqq X$, so heißt jede Abbildung Q von A' auf eine Punktmenge $B' \subseteqq Y$, für die $P = A \,1\, Q$ ist, eine Erweiterung von P auf A'. Ist insbesondere Q stetig auf A' (was nur möglich ist, wenn P stetig auf A), so heißt Q eine stetige Erweiterung von P. Sei $A \subseteqq A' \subseteqq A^0$; da dann nach **11·8·12**, **11·8·2** A dicht in A' ist, kann es nach

22·3·1 höchstens eine stetige Erweiterung Q von P auf A' geben, bei der $Q(a)$ abgeschlossen ist für alle $a \varepsilon A'$.

Sei P eine Abbildung von A; dann heiße der Punkt $\bar{a} \varepsilon A^0$ ein **Konvergenzpunkt** von P, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U_{\bar{a}}$ gibt, so daß für je zwei Punkte a, a' von $A\, U_{\bar{a}}$ die Ungleichung gilt:

$$e\left(P(a),\ P(a')\right) < \varepsilon\,. \tag{4}$$

22·4·1. *Die Menge $\bar{A}$ aller Konvergenzpunkte von P ist ein G_δ (in X).*

Für jedes $\varepsilon > 0$ ist die Menge A_ε aller $x \varepsilon A^0$, zu denen es ein U_x gibt, so daß für je zwei Punkte a, a' von $A\, U_x$ Ungleichung (4) gilt, offen in A^0, denn mit x gehören auch alle Punkte von $A^0 U_x$ zu A_ε. Wegen $\bar{A} = \underset{n}{D}\, A_{\frac{1}{n}}$ ist also $\bar{A}$ ein G_δ in A^0; und da A^0 nach 10·7·41 ein G_δ in X, ist nach 10·9·2 auch $\bar{A}$ ein G_δ in X.

22·4·2. *Ist P eine Abbildung von A auf eine Menge B des vollständigen Raumes Y, ist $P(a)$ beschränkt für alle $a \varepsilon A$, und ist $\bar{a}$ ein Konvergenzpunkt von P, so gibt es eine nicht leere, beschränkte, abgeschlossene Menge $Q_{\bar{a}} \subseteqq B^0$, so daß für jede Folge $((a_n))$ aus A mit $a_n \to \bar{a}$ gilt: $\lim\limits_n P(a_n) = Q_{\bar{a}}$ und $e\left(P(a_n),\, Q_{\bar{a}}\right) \to 0$.*

Sei $a_n \varepsilon A$, $a_n \to \bar{a}$; zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $U_{\bar{a}}$, so daß für je zwei Punkte a, a' von $A\, U_{\bar{a}}$ Ungleichung (4) gilt; es gibt ein n_ε, so daß $a_n \varepsilon A\, U_{\bar{a}}$ für $n \geq n_\varepsilon$; dann ist $e\left(P(a_n),\, P(a_{n'})\right) < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$, $n' \geq n_\varepsilon$, d. h. die Mengenfolge $((P(a_n)))$ ist eine **Cauchysche Folge** (§ 18, 10). Nach 18·10·2 existiert also $\lim\limits_n P(a_n)$, ist nach 18·10·21 beschränkt und abgeschlossen, und nach 18·10·22 $\supset A$. Für alle Folgen $((a_n))$ aus A mit $a_n \to a$ stimmt $\lim\limits_n A_n$ überein; denn ist $((a'_n))$ eine zweite solche Folge und ist $a''_{2n-1} = a_n$, $a''_{2n} = a'_n$, so ist auch $a''_n \to a$, also existiert $\lim\limits_n P(a''_n)$, und somit ist $\lim\limits_n P(a_n) = \lim\limits_n P(a''_{2n-1}) = \lim\limits_n P(a''_n) = \lim\limits_n P(a''_{2n}) = \lim\limits_n P(a'_n)$, wie behauptet. — Setzen wir noch $\lim\limits_n P(a_n) = Q_{\bar{a}}$, so gilt nach 18·10·3 $e\left(P(a_n),\, Q_{\bar{a}}\right) \to 0$. Wegen $a_n \varepsilon A$ ist $P(a_n) \subseteqq B$, also wegen $Q_{\bar{a}} = \lim\limits_n P(a_n)$ nach 17·1·23: $Q_{\bar{a}} \subseteqq B^0$.

22·4·21. *Ist in 22·4·2 die Abbildung P in sich kompakt, so ist auch die Menge $Q_{\bar{a}}$ in sich kompakt.*

Da $Q_{\bar{a}}$ nach 22·4·2 abgeschlossen, genügt es nach 15·2·2, zu zeigen, daß $Q_{\bar{a}}$ kompakt. Wäre $Q_{\bar{a}}$ nicht kompakt, so gäbe es nach 18·3·3 ein $\varrho > 0$ und eine Punktfolge $((b_\nu))$ in $Q_{\bar{a}}$, so daß $b_\nu b_{\nu'} \geq \varrho$ für $\nu \neq \nu'$ ($\nu, \nu' = 1, 2, \ldots$). Sei $a_n \varepsilon A$, $a_n \to \bar{a}$; nach 22·4·2 ist $e\left(P(a_n),\, Q_{\bar{a}}\right) < \frac{\varrho}{3}$ für fast alle n; sei n so gewählt; dann gibt es ein $b^*_\nu \varepsilon P(a_n)$, so daß $b_\nu b^*_\nu < \frac{\varrho}{3}$; wegen $b_\nu b_{\nu'} \geq \varrho$

ist aber dann $b_\nu^* b_{\nu'}^* \geq \frac{\varrho}{3}$ für $\nu \neq \nu'$; die b_ν^* $(\nu = 1, 2, \ldots)$ würden also eine unendliche Menge $M \subseteqq P(a_n)$ mit $M^1 = A$ bilden, entgegen der Annahme, die Abbildung P sei in sich kompakt.

22·4·3. *Ist die in sich kompakte Abbildung P von A auf die Menge B des vollständigen Raumes Y stetig, so gibt es eine und nur eine stetige Erweiterung Q von P auf die Menge $\bar{A}$ der Konvergenzpunkte von P, und zwar ist Q in sich kompakt, und es ist $Q(\bar{A}) \subseteqq B^0$.*

Aus 22·1·2 folgt, daß jeder Punkt von A Konvergenzpunkt von P ist; also: $A \subseteqq \bar{A}$. Nach 15·1·5 und 15·2·22 ist $P(a)$ beschränkt und abgeschlossen für alle $a \varepsilon A$. Für alle $\bar{a} \varepsilon \bar{A}$ existiert also die Menge $Q_{\bar{a}}$ von 22·4·2. Ist $\bar{a} \varepsilon A$, so folgt aus 22·1·1: $Q_{\bar{a}} = (P(\bar{a}))^0 = P(\bar{a})$. Bezeichnen wir mit Q die Abbildung, die jedem $\bar{a} \varepsilon \bar{A}$ alle Punkte von $Q_{\bar{a}}$ zuordnet, so ist demnach Q eine Erweiterung von P auf $\bar{A}$; und da nach 22·4·2 $Q(\bar{a}) = Q_{\bar{a}} \subseteqq B^0$, so ist auch $Q(\bar{A}) \subseteqq B^0$. Nach 22·4·21 ist die Abbildung Q in sich kompakt. Wir zeigen nun, daß Q eine s t e t i g e Abbildung von $\bar{A}$ ist. Sei $\bar{a} \varepsilon \bar{A}$, $\bar{a}_n \varepsilon \bar{A}$, $\bar{a}_n \to \bar{a}$. Nach 22·4·2 gibt es ein $a_n \varepsilon A$, so daß $\bar{a}_n a_n < \frac{1}{n}$, $e(Q_{\bar{a}_n}, Q_{a_n}) < \frac{1}{n}$; dann ist auch $a_n \to \bar{a}$, also nach 22·4·2: $e(Q_{\bar{a}}, Q_{a_n}) \to 0$; da nach § 9 (6·32): $e(Q_{\bar{a}_n}, Q_{\bar{a}}) \leq e(Q_{\bar{a}_n}, Q_{a_n}) + e(Q_{\bar{a}}, Q_{a_n}) < e(Q_{\bar{a}}, Q_{a_n}) + \frac{1}{n}$, gilt also auch $e(Q_{\bar{a}_n}, Q_{\bar{a}}) \to 0$; nach 22·1·21 ist also die Abbildung Q von $\bar{A}$ stetig. Daß es keine andere stetige Erweiterung von P auf $\bar{A}$ gibt, folgt, da $Q_{\bar{a}}$ nach 22·4·2 abgeschlossen ist, aus 22·3·1, denn wegen $A \subseteqq \bar{A} \subseteqq A^0$ ist A nach 11·3·12 und 11·3·2 dicht in $\bar{A}$.

Nun zeigen wir noch, daß — bei in sich kompakten Abbildungen — $\bar{A}$ der g r ö ß t e Teil von A^0 ist, auf den P stetig erweitert werden kann:

22·4·31. *Gibt es eine stetige, in sich kompakte Erweiterung Q von P auf die Menge $A^* \subseteqq A^0$, so ist $A^* \subseteqq \bar{A}$.*

Sei $a^* \varepsilon A^*$ und $\delta > 0$; nach 22·1·2 gibt es eine Umgebung U_{a^*}, so daß $e(Q(x), Q(a^*)) < \frac{\delta}{2}$ für alle $x \varepsilon A^* U_{a^*}$, also $e(Q(x), Q(x')) < \delta$ für alle x und x' aus $A^* U_{a^*}$; da $Q(a) = P(a)$ für alle $a \varepsilon A$, ist also $e(P(a), P(a')) < \delta$ für alle a und a' von $A\, U_{a^*}$; d. h. a^* ist ein Konvergenzpunkt von P, d. h. $a^* \varepsilon \bar{A}$.

22·4·4. *Sei P eine in sich kompakte Abbildung von A auf eine Punktmenge eines vollständigen Raumes; damit es eine stetige, in sich kompakte Erweiterung*

Q von P auf die Menge A^0 gebe, ist notwendig und hinreichend, daß für jeden kompakten Teil A' von A die Teilabbildung $A' \mathbin{1} P$ gleichmäßig stetig sei.

Notwendig: Nach **15·2·4** ist A'^0 eine in sich kompakte Menge $\subseteqq A^0$. Ist Q stetig auf A^0, so ist $A'^0 \mathbin{1} Q$ stetig auf A'^0, also nach **22·2·2** auch gleichmäßig stetig; also ist auch $A' \mathbin{1} Q = A' \mathbin{1} P$ gleichmäßig stetig. Hinreichend: Ist $A' \mathbin{1} P$ gleichmäßig stetig für jeden kompakten Teil A' von A, so ist P stetig auf A; denn sei $a \varepsilon A$, $a_n \varepsilon A$, $a_n \to a$; dann ist die aus den Punkten a, a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ bestehende Menge A' kompakt, also ist $A' \mathbin{1} P$ stetig, also gilt nach **22·1·21** $e\left(P(a_n),\ P(a)\right) \to 0$, und da dies für jedes $a \varepsilon A$ und jede Folge $((a_n))$ aus A mit $a_n \to a$ gilt, ist auch P stetig nach **22·1·21**. Nach **22·4·3** genügt es also zu zeigen: $\overline{A} = A^0$. Sei $\tilde{a} \varepsilon A^0$ und $a_n \varepsilon A$, $a_n \to \tilde{a}$; dann ist die aus den Punkten a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ bestehende Menge A' ein kompakter Teil von A; also ist nach Annahme $A' \mathbin{1} P$ gleichmäßig stetig; somit gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein n_δ, so daß $e\left(P(a_n),\ P(a'_n)\right) < \delta$ für $n \geqq n_\delta$, $n' \geqq n_\delta$; da dies für jede Folge $((a_n))$ aus A mit $a_n \to \tilde{a}$ gilt, so folgt in bekannter Weise: es gibt eine Umgebung $U_{\tilde{a}}$, so daß $e\left(P(a),\ P(a')\right) < \delta$ für alle a, a' aus $A\, U_{\tilde{a}}$; d. h. $\tilde{a} \varepsilon \overline{A}$. Aus $\tilde{a} \varepsilon A^0$ folgt also $\tilde{a} \varepsilon \overline{A}$, d. h. es ist $A^0 \subseteqq \overline{A}$, und da gewiß $\overline{A} \subseteqq A^0$, ist $\overline{A} = A^0$, w. z. b. w.

In **22·4·4** ist enthalten:

22·4·41. *Ist P eine in sich kompakte Abbildung der kompakten Menge A auf eine Punktmenge eines vollständigen Raumes, so ist, damit es eine stetige, in sich kompakte Erweiterung von P auf A^0 gebe, notwendig und hinreichend, daß P gleichmäßig stetig sei.*

§ 23. Eindeutige stetige Abbildungen.

1. **Eindeutige stetige Abbildungen.** Wir betrachten nun insbesondere eindeutige Abbildungen P einer metrischen Menge A auf eine metrische Menge B; wo nichts anderes gesagt, fassen wir A und B selbst als die zugrunde gelegten metrischen Räume auf, auf die sich die vorkommenden Relativbegriffe beziehen.

Jede eindeutige Abbildung ist in sich kompakt (§ 21, 3) und zusammenhängend (§ 21, 4).

Ist die Abbildung P eindeutig, so besteht für jedes $x \varepsilon A$ die Menge $P(x)$ aus einem einzigen Punkt, dem Bildpunkt von x; da dies zu keinem Mißverständnis führen kann, bezeichnen wir auch diesen Bildpunkt selbst mit $P(x)$.

Gibt es eine eindeutige, stetige Abbildung von A auf B, so heißt B kurz ein stetiges Bild von A.

Aus den Definitionen folgt unmittelbar:

23·1·1. *Für eindeutige Abbildungen fallen die Begriffe „unterhalb stetig", „oberhalb stetig", „stetig" zusammen.*

Aus 22·1·2 folgt:

23·1·2. *Damit die eindeutige Abbildung P von A stetig sei im Punkte $a \varepsilon A$, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem $\delta > 0$ ein $\sigma > 0$ gibt, so daß der Abstand $P(x)\ P(a) < \delta$ ist für alle $x \varepsilon K_{a\sigma}$.*

Aus 22·1·21 folgt:

23·1·21. *Damit die eindeutige Abbildung P von A stetig sei im Punkte $a \varepsilon A$, ist notwendig und hinreichend, daß für jede Folge $((a_n))$ aus A mit $a_n \to a$ gelte: $P(a_n) \to P(a)$.*

Aus 21·1·4 folgt:

23·1·3. *Ist P eine stetige Abbildung von A und ist A' dicht in A, so ist $P(A')$ dicht in $P(A)$.*

Hierin ist enthalten:

23·1·31. *Jedes stetige Bild einer separablen Menge ist separabel.*

Aus 22·1·4 folgt:

23·1·4. *Ist P eine eindeutige stetige Abbildung von A auf B, und Q eine eindeutige stetige Abbildung von B auf C, so ist $P | Q$ eine eindeutige, stetige Abbildung von A auf C.*

2. **Urbildmengen.** Wegen 23·1·1 folgt aus 21·5·1:

23·2·1. *Damit die eindeutige Abbildung P von A auf B stetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß $P^{-1}(G)$ offen in A sei für jede in B offene Menge G.*

Ebenso erhält man aus 23·1·1 und 21·5·2:

23·2·11. *Damit die eindeutige Abbildung P von A auf B stetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß $P^{-1}(F)$ abgeschlossen in A sei für jede in B abgeschlossene Menge F.*

23·2·12. *Ist P eine eindeutige stetige Abbildung von A auf B, und ist B' ein G_δ (ein F_σ) in B, so ist $P^{-1}(B')$ ein G_δ (ein F_σ) in A.*

Ist B' ein G_δ in B, so folgt die Behauptung aus 23·2·1 und der ersten Formel in 2·1·3; ist B' ein F_σ in B, so folgt sie aus 23·2·11 und der ersten Formel § 2 (1·9), angewendet auf P^{-1}.

3. **Eindeutige stetige Abbildungen in sich kompakter Mengen.** In 21·3·4 ist enthalten:

23·3·1. *Jedes stetige Bild einer in sich kompakten Menge ist in sich kompakt.*

23·3·2. *Jede in sich kompakte Menge $B \supset A$ ist stetiges Bild jedes dyadischen Diskontinuums A.*

Nach **18·8·2** ist B darstellbar durch ein dyadisches Schema $B_{k_1 k_2 \ldots k_\nu}$, und das dyadische Diskontinuum A ist darstellbar durch ein disjunktes dyadisches Schema $A_{k_1 k_2 \ldots k_\nu}$; jeder dyadischen Folge $((k_\nu))$ entspricht (§ 18, 7) ein Punkt $b_{((k_\nu))} \varepsilon B$, und zwar der einzige dem Durchschnitte $B_{k_1} B_{k_1 k_2} \ldots B_{k_1 k_2 \ldots k_\nu} \ldots$ angehörende Punkt; ebenso entspricht der dyadischen Folge $((k_\nu))$ ein Punkt $a_{((k_\nu))} \varepsilon A$, wobei verschiedenen Folgen $((k_\nu))$ verschiedene Punkte $a_{((k_\nu))}$ entsprechen (§ 18, 9); die Zuordnung der dyadischen Folgen $((k_\nu))$ und der Punkte von A ist also eineindeutig. Ordnen wir dem Punkte $a_{((k_\nu))} \varepsilon A$ den Punkt $b_{((k_\nu))} \varepsilon B$ zu, so ist dies eine eindeutige Abbildung P von A auf B; es ist also nur mehr zu zeigen, daß diese Abbildung P stetig ist. Seien $a = a_{((k_\nu))}$, $a_n = a_{((k_{n\nu}))}$ Punkte von A, und sei $a_n \to a$; für jedes ν gilt dann nach **18·9·2** $k_{n\nu} = k_\nu$ für fast alle n; da $P(a) = b_{((k_\nu))}$, $P(a_n) = b_{((k_{n\nu}))}$, gilt also nach **18·7·3** auch $b_n \to b$; somit ist P stetig nach **23·1·21.**

Insbesondere erhält man eine stetige Abbildung des dyadischen Diskontinuums A auf das Intervall $[0, 1]$, indem man dem Punkte $a_{((k_\nu))} \varepsilon A$ den Punkt $\sum\limits_\nu \frac{k_\nu}{2^\nu}$ zuordnet. Da ein Punkt von $[0, 1]$ auf höchstens zwei Arten als Dualbruch $\sum\limits_\nu \frac{k_\nu}{2^\nu}$ geschrieben werden kann, hat bei dieser Abbildung jeder Punkt von $[0, 1]$ in A höchstens zwei Urbilder. — Eine stetige Abbildung des dyadischen Diskontinuums auf das Quadrat $[0,0; 1,1]$ erhält man, indem man dem Punkte $a_{((k_\nu))} \varepsilon A$ den Punkt $x_1 = \sum\limits_\nu \frac{k_{2\nu-1}}{2^\nu}$, $x_2 = \sum\limits_\nu \frac{k_{2\nu}}{2^\nu}$ zuordnet. Da jede Zahl x_1, bzw. x_2 aus $[0, 1]$ auf höchstens zwei Arten als Dualbruch geschrieben werden kann, hat bei dieser Abbildung jeder Punkt des Quadrates $[0, 0; 1, 1]$ in A höchstens vier Urbilder.

23·3·3. *Ist P eine eindeutige, stetige Abbildung der in sich kompakten Menge A, so ist die Abbildung P^{-1} oberhalb stetig.*

Dies ist enthalten in **21·6·3.**

23·3·31. *Damit die eindeutige Abbildung P von A auf die in sich kompakte Menge B stetig sei, ist hinreichend, daß P^{-1} oberhalb stetig sei, und $P^{-1}(b)$ abgeschlossen sei in A für alle $b \varepsilon B$.*

Dies folgt aus **21·6·31** und **23·1·1.**

Wir nennen ein disjunktes System $\mathfrak{C}$ von Teilen der Menge A, dessen Summe A ist, ein oberhalb stetiges Zerlegungssystem von A, wenn

es zu jeder Menge $\bar{C} \varepsilon \mathfrak{C}$ und zu jeder in A offenen Menge $G \supseteqq \bar{C}$ eine in A offene Menge $G' \supseteqq \bar{C}$ gibt, so daß für jede Menge $C \varepsilon \mathfrak{C}$ mit $C\, G' \supset A$ gilt: $C \subseteqq G$.

23·3·4. *Ist P eine eindeutige, stetige Abbildung der in sich kompakten Menge A auf B, so ist das System der Mengen $P^{-1}(b)$ $(b \varepsilon B)$ ein oberhalb stetiges Zerlegungssystem von A.*

Sei $\bar{b} \varepsilon B$ und G eine in A offene Menge $\supseteqq P^{-1}(\bar{b})$. Da nach **23·3·3** P^{-1} oberhalb stetig ist, gibt es eine Umgebung $U_{\bar{b}}$, so daß $P^{-1}(U_{\bar{b}}) \subseteqq G$; nach **23·2·1** ist also $P^{-1}(U_{\bar{b}})$ eine in A offene Menge $G' \subseteqq G$, und es ist auch $G' \supseteqq P^{-1}(\bar{b})$. Aus $P^{-1}(b)\, G' \supset A$ folgt $b \varepsilon U_{\bar{b}}$, mithin $P^{-1}(b) \subseteqq G' \subseteqq G$.

Um die Umkehrung dieses Satzes zu beweisen, zeigen wir zunächst, daß, wenn A irgendeine metrische Menge bedeutet, jedes aus in A abgeschlossenen Mengen bestehende, oberhalb stetige Zerlegungssystem $\mathfrak{C}$ von A selbst als metrischer Raum aufgefaßt werden kann. Zu dem Zwecke zeigen wir zuerst, daß $\mathfrak{C}$ als topologischer Raum aufgefaßt werden kann, indem wir ein den topologischen Axiomen $1_t)$, $2_t)$, $3_t)$, $4_t)$, $5_t)$ von § 9, 1 genügendes System in $\mathfrak{C}$ offener Mengen definieren:

Die Menge $\mathfrak{G} \subseteqq \mathfrak{C}$ heiße offen (in $\mathfrak{C}$), wenn $\underset{C \varepsilon \mathfrak{G}}{S}\, C$ offen in A ist.

Die Axiome $1_t)$, $3_t)$, $4_t)$ sind dann offenbar erfüllt; wir zeigen, daß auch $5_t)$ (und somit $2_t)$) erfüllt ist. Zu dem Zwecke beweisen wir zunächst den Hilfssatz:

23·3·5. *Ist G eine in A offene Menge, so ist das System $\mathfrak{G}$ aller $C \varepsilon \mathfrak{C}$, die $\subseteqq G$ sind, eine in $\mathfrak{C}$ offene Menge.*

Es ist zu zeigen: Ist $G^* = \underset{C \varepsilon \mathfrak{G}}{S}\, C$, so ist G^* offen in A. Sei $a^* \varepsilon G^*$; dann gibt es ein $C^* \varepsilon \mathfrak{G}$, so daß $a^* \varepsilon C^*$; wegen $C^* \subseteqq G$ gibt es nach Definition des oberhalb stetigen Zerlegungssystems eine in A offene Menge $G' \supseteqq C^*$, so daß für jedes $C \varepsilon \mathfrak{C}$ mit $C\,G' \supset A$ gilt: $C \subseteqq G$, und mithin $C \varepsilon \mathfrak{G}$. Zu jedem $a \varepsilon G'$ gibt es ein $C_a \varepsilon \mathfrak{C}$, so daß $a \varepsilon C_a$; dann ist $C_a\, G' \supset A$, also $C_a \varepsilon \mathfrak{G}$, also $a \varepsilon G^*$; also ist $G' \subseteqq G^*$; wegen $a^* \varepsilon G'$ ist also a^* innerer Punkt von G^*, nach **10·3·6** ist somit G^* offen in A, w. z. b. w.

Nun erkennen wir leicht, daß Axiom $5_t)$ erfüllt ist: sei $C_1 \varepsilon \mathfrak{C}$, $C_2 \varepsilon \mathfrak{C}$, $C_1 \neq C_2$; dann sind C_1, C_2 fremde, abgeschlossene Mengen des metrischen Raumes A; nach **14·2·41** gibt es also zwei fremde, in A offene Mengen $G_1 \supseteqq C_1$, $G_2 \supseteqq C_2$; nach **23·3·5** sind die Systeme $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ aller $C \varepsilon \mathfrak{C}$, die $\subseteqq G_1$, bzw. $\subseteqq G_2$ sind, fremde, in $\mathfrak{C}$ offene Mengen, und es ist $C_1 \varepsilon \mathfrak{G}_1$, $C_2 \varepsilon \mathfrak{G}_2$.

Durch obige Definition der in $\mathfrak{C}$ offenen Mengen ist nun $\mathfrak{C}$ zu einem topologischen Raum gemacht. Da die abgeschlossenen Mengen die Komplemente der offenen Mengen sind, so gilt:

23·3·51. *Damit die Menge $\mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{C}$ abgeschlossen (in $\mathfrak{C}$) sei, ist notwendig und hinreichend, daß* $\underset{C \varepsilon \mathfrak{E}}{S} C$ *abgeschlossen in A sei.*

23·3·52. *Der topologische Raum $\mathfrak{C}$ ist regulär.*

Nach § 14, 2 bedeutet das: Ist $C_0 \varepsilon \mathfrak{C}$, ist $\mathfrak{E}$ eine in $\mathfrak{C}$ abgeschlossene Menge und $C_0 \sim \varepsilon \mathfrak{E}$, so gibt es zwei fremde, in $\mathfrak{C}$ offene Mengen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$, so daß $\mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{G}$, $C_0 \varepsilon \mathfrak{G}'$. Nach **23·3·51** ist $F = \underset{C \varepsilon \mathfrak{E}}{S} C$ abgeschlossen in A, und nach Annahme ist C_0 abgeschlossen in A; wegen $C_0 \sim \varepsilon \mathfrak{E}$ ist $C_0 F = \Lambda$; da A als metrischer Raum nach **14·2·41** normal ist, gibt es zwei fremde in A offene Mengen G, G', so daß $F \subseteqq G$, $C_0 \subseteqq G'$. Ist $\mathfrak{G}$, bzw. $\mathfrak{G}'$ das System aller $C \varepsilon \mathfrak{C}$, die $\subseteqq G$, bzw. $\subseteqq G'$ sind, so sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ nach **23·3·5** offen in $\mathfrak{C}$, es ist $\mathfrak{G}\,\mathfrak{G}' = \Lambda$ und $\mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{G}$, $C_0 \varepsilon \mathfrak{G}'$, w. z. b. w.

23·3·53. *Ist A in sich kompakt, so ist der topologische Raum $\mathfrak{C}$ separabel.*

Nach **15·1·41** ist A separabel. Sei $H_1, H_2, \ldots, H_\nu, \ldots$ ein ausgezeichnetes System in A offener Mengen (§ 13, 1), und seien $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ die abzählbar vielen in A offenen Mengen, die Summe endlich vieler H_n sind; das System aller $C \varepsilon \mathfrak{C}$, die $\subseteqq G_n$ sind, heiße $\mathfrak{G}_n$; nach **23·3·5** ist $\mathfrak{G}_n$ offen in $\mathfrak{C}$. Es genügt zu zeigen: die nicht leeren unter den Mengen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n, \ldots$ bilden ein ausgezeichnetes System in $\mathfrak{C}$ offener Mengen. Sei $\mathfrak{G}$ eine in $\mathfrak{C}$ offene Menge, und sei $C_0 \varepsilon \mathfrak{G}$; wir setzen $G = \underset{C \varepsilon \mathfrak{G}}{S} C$; dann ist G offen in A und $C_0 \subseteqq G$; also gibt es zu jedem $c \varepsilon C_0$ ein H_ν, so daß $c \varepsilon H_\nu$, $H_\nu \subseteqq G$; da C_0 als abgeschlossener Teil der in sich kompakten Menge A nach **15·2·3** in sich kompakt ist, gibt es nach **15·5·1** unter diesen H_ν endlich viele, in deren Summe G_n die Menge C_0 enthalten ist; dann ist $C_0 \subseteqq G_n \subseteqq G$, somit $C_0 \varepsilon \mathfrak{G}_n$, $\mathfrak{G}_n \subseteqq \mathfrak{G}$, w. z. b. w.

23·3·54. *Ist A in sich kompakt, so ist der topologische Raum $\mathfrak{C}$ metrisierbar.*

Dies folgt wegen **23·3·52**, **23·3·53**, aus **14·3·31**.

Nun beweisen wir folgende Umkehrung von **23·3·4**:

23·3·6. *Ist A in sich kompakt und ist $\mathfrak{C}$ ein aus in A abgeschlossenen Mengen bestehendes oberhalb stetiges Zerlegungssystem von A, so gibt es eine eindeutige stetige Abbildung von A auf einen metrischen Raum B, so daß $\mathfrak{C}$ das System aller Mengen $P^{-1}(b)$ $(b \varepsilon B)$ ist.*

Nach **23·3·54** kann $\mathfrak{C}$ als metrischer Raum aufgefaßt werden; wir definieren eine eindeutige Abbildung P von A auf die Elemente C von $\mathfrak{C}$ durch: $P(a) = C$, wenn $a \varepsilon C$. Es ist noch zu zeigen, daß diese Abbildung stetig ist. Sei $\mathfrak{G}$ offen in $\mathfrak{C}$ und $G = \underset{C \varepsilon \mathfrak{G}}{S} C$; nach Definition der in $\mathfrak{C}$ offenen Mengen ist dann G offen in A, und nach Definition der Abbildung P ist $G = P^{-1}(\mathfrak{G})$; nach **23·2·1** ist also P stetig.

Literatur: Satz 23·3·2 stammt von P. Alexandroff, Amst. Proc. 28 (1925) S. 997. Die Theorie der oberhalb stetigen Zerlegungssysteme geht zurück auf R. L. Moore, Am. Trans. 27 (1925) S. 416. Zu den hier erörterten Anwendungen dieser Theorie vgl. P. Alexandroff, Math. Ann. 96 (1927) S. 555; C. Kuratowski, Fund. math. 11 (1928) S. 169.

4. **Erweiterung.** Da sich bei eindeutigen Abbildungen P die Abweichung $e\,(P(a),\, P(a'))$ auf den Abstand $P(a)\,P(a')$ der Punkte $P(a)$, $P(a')$ reduziert, lautet die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit (§ 22, 2) nunmehr: Die eindeutige Abbildung P von A heißt gleichmäßig stetig, wenn es zu jedem $\delta > 0$ ein $\sigma > 0$ gibt, so daß für je zwei Punkte a, a' von A mit $a\,a' < \sigma$ die Ungleichung gilt: $P\,(a)\,P\,(a') < \delta$.

Was die Erweiterung (§ 22, 4) einer eindeutigen Abbildung anlangt, so gilt:

23·4·1. *Ist die Abbildung P von A eindeutig, und ist Q eine stetige Erweiterung von A auf eine Menge $A^* \subseteqq A^0$, so ist auch Q eindeutig.*

Sei $a \,\varepsilon\, A^*$; da dann auch $a \,\varepsilon\, A^0$, gibt es in A eine Folge $((a_n))$ mit $a_n \to a$; angenommen es gebe in $Q\,(a)$ zwei Punkte $b \neq b'$; dann gäbe es zwei fremde Umgebungen U_b, $U_{b'}$. Da Q als stetige Abbildung auch unterhalb stetig ist, müßte nach 21·1·1 $Q\,(a_n)\,U_b \supset A$ und $Q\,(a_n)\,U_{b'} \supset A$ sein für fast alle n; da aber $Q\,(a_n) = P\,(a_n)$ ist, und da, weil P eindeutig, $P\,(a_n)$ nur aus einem Punkte besteht, ist das unmöglich.

Aus 22·4·41 entnehmen wir somit:

23·4·2. *Ist P eine eindeutige Abbildung der kompakten Menge A auf eine Punktmenge eines vollständigen Raumes, so ist, damit es eine eindeutige stetige Erweiterung von P auf A^0 gebe, notwendig und hinreichend, daß P gleichmäßig stetig sei.*

Literatur: F. Hausdorff, Grundz. d. Mengenlehre S. 368. W. Sierpiński und A. Zygmund, Fund. math. 4 (1923) S. 317. A. Lindenbaum, Fund. math. 18 (1926) S. 215.

5. **Eindeutige stetige Abbildungen lokal-zusammenhängender Mengen.** Aus 21·4·1 oder 21·4·2 entnehmen wir:

23·5·1. *Jedes stetige Bild einer zusammenhängenden Menge ist zusammenhängend.*

Für lokal-zusammenhängende Mengen (§ 16, 5) gilt nur:

23·5·2. *Jedes stetige Bild B einer in sich kompakten, lokal-zusammenhängenden Menge A ist lokal-zusammenhängend.*

Sei P eine eindeutige stetige Abbildung von A auf B. Nach 16·5·2 genügt es, zu zeigen, daß die Komponenten jeder in B offenen Menge offen in B sind; sei also H offen in B, sei K eine Komponente von H und $b \,\varepsilon\, K$; wir

haben zu zeigen: es gibt eine Umgebung $U_b \subseteqq K$. Nach **23·2·1** ist $P^{-1}(H)$ offen in A; weil A lokal-zusammenhängend, sind nach **16·5·2** auch die Komponenten von $P^{-1}(H)$ offen; ist also G die Summe derjenigen Komponenten C von $P^{-1}(H)$, für die $P^{-1}(b)\,C \supset A$, so ist G eine offene Menge $\supseteqq P^{-1}(b)$. Da nach **23·3·3** P^{-1} oberhalb stetig ist, so gibt es eine Umgebung U_b, so daß $P^{-1}(U_b) \subseteqq G$. Nach **23·5·1** ist das Bild $P(C)$ einer Komponente C von $P^{-1}(H)$ zusammenhängend; also ist $P(G)$ Summe zusammenhängender Mengen, die den Punkt b gemein haben, also ist nach **16·1·41** $P(G)$ zusammenhängend, und wegen $b \varepsilon P(G)$ ist $P(G) \subseteqq K$. Wegen $P^{-1}(U_b) \subseteqq G$ ist aber $U_b \subseteqq P(G)$, also $U_b \subseteqq K$, w. z. b. w.

Wir werden nun umgekehrt zeigen, daß je zwei in sich kompakte, zusammenhängende und lokal-zusammenhängende Mengen, die mehr als einen Punkt enthalten, stetige Bilder voneinander sind. Dazu benötigen wir den Hilfssatz:

23·5·3. *Ist die in sich kompakte Menge B lokal-zusammenhängend, so gibt es zu jedem $\varrho > 0$ ein $\sigma > 0$, so daß jeder Punkt $b \varepsilon B$ einem Gebiete G_b (in B) angehört, für das $K_{b\sigma} \subseteqq G_b \subseteqq K_{b\varrho}$.*

Anderenfalls gäbe es ein $\varrho > 0$ und eine Folge $((b_n))$ in B, so daß es kein der Beziehung $K_{b_n \frac{1}{n}} \subseteqq G \subseteqq K_{b_n \varrho}$ genügendes Gebiet G gibt. Da B in sich kompakt, hat $((b_n))$ einen Häufungspunkt $b \varepsilon B$. Da B lokal-zusammenhängend, ist nach **16·5·2** die zu b gehörige Komponente von $K_{b \frac{\varrho}{2}}$ ein Gebiet G; dann ist aber $K_{b_n \frac{1}{n}} \subseteqq G \subseteqq K_{b_n \varrho}$ für unendlich viele n, entgegen der Wahl der b_n.

23·5·4. *Ist B in sich kompakt, zusammenhängend und lokal-zusammenhängend, und ist $b' \varepsilon B$, $b'' \varepsilon B$, so gibt es eine eindeutige, stetige Abbildung Q von $[0,\ 1]$ auf B, so daß $Q(0) = b'$, $Q(1) = b''$.*

Nach **23·5·3** gibt es ein $\sigma_n > 0$, so daß jeder Punkt $b \varepsilon B$ einem Gebiete G_b angehört, für das $K_{b\sigma_n} \subseteqq G_b \subseteqq K_{b\frac{1}{2^n}}$; da hierin offenbar $\sigma_n \leq \frac{1}{2^n}$ ist, so haben wir: $\sigma_n \to 0$. Nach **9·7·1** und **15·1·4** gibt es in B ein endliches σ_n-Netz C_n. Seien $c_1, c_2, \ldots, c_k$ die endlich vielen Punkte von C_1. Nach **16·2·2** gibt es in B eine endliche σ_1-Kette, die b' mit c_1 verbindet, eine endliche σ_1-Kette, die c_1 mit c_2 verbindet, ..., eine endliche σ_1-Kette, die c_{k-1} mit c_k verbindet, eine endliche σ_1-Kette, die c_k mit b'' verbindet. Diese σ_1-Ketten fügen sich zusammen zu einer endlichen σ_1-Kette, die b' mit b'' verbindet; indem wir nötigenfalls einen Punkt mehrmal anschreiben, können wir annehmen, sie bestehe aus $2^{\nu_1}+1$ Punkten: $b' = b_0^{(1)}, b_1^{(1)}, \ldots, b_{2^{\nu_1}}^{(1)} = b''$; jeder Punkt von C_1 kommt unter den Punkten $b_i^{(1)}$ $(i = 0, 1 \ldots, 2^{\nu_1}-1)$ vor. Da C_1 ein σ_1-Netz in B, gibt es

zu jedem $c \varepsilon C_2$ unter den Punkten $b_i^{(1)}$ $(i = 0, 1 \ldots, 2^{\nu_1}-1)$ mindestens einen mit $b_i^{(1)} c < \sigma_1$; bedeutet $C_i^{(2)} (i = 0, 1, \ldots, 2^{\nu_1}-1)$ die Menge aller $c \varepsilon C_2$ mit $b_i^{(1)} c < \sigma_1$, so ist demnach $C_2 = \underset{i=0}{\overset{2^{\nu_1}-1}{S}} C_i^{(2)}$. Zufolge der Wahl von σ_1 gibt es ein Gebiet G_i, so daß $K_{b_i^{(1)} \sigma_1} \subseteqq G_i \subseteqq K_{b_i^{(1)} \frac{1}{2}}$ $(i = 0, 1 \ldots, 2^{\nu_1}-1)$; sind $c_1', c_2', \ldots, c_l'$ die endlich vielen Punkte von $C_i^{(2)}$, so ist also $c_\lambda' \varepsilon G_i$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ und $b_{i+1}^{(1)} \varepsilon G_i$. Da G_i zusammenhängend, gibt es nach **16·2·2** in G_i eine $b_i^{(1)}$ mit c_λ' verbindende σ_2-Kette A_λ und eine $b_i^{(1)}$ mit $b_{i+1}^{(1)}$ verbindende σ_2-Kette A'; durchlaufen wir A_1 zuerst in der Richtung von $b_i^{(1)}$ nach c_1', dann in der umgekehrten Richtung, sodann A_2 zuerst in der Richtung von $b_i^{(1)}$ nach c_2', dann in der umgekehrten Richtung, ..., sodann A_l zuerst in der Richtung von $b_1^{(i)}$ nach c_l', dann in der umgekehrten Richtung, und schließlich noch A', so erhalten wir eine $b_i^{(1)}$ mit $b_{i+1}^{(1)}$ verbindende σ_2-Kette in G_i; dabei können wir annehmen, daß alle diese σ_2-Ketten (für $i = 0, 1, \ldots, 2^{\nu_1}-1$) aus gleich vielen, und zwar aus $2^{\nu_2}+1$ Punkten: $b_i^{(1)} = b_{i\,2^{\nu_2}}^{(2)}, b_{i\,2^{\nu_2}+1}^{(2)}, \ldots, b_{(i+1)2^{\nu_2}}^{(2)} = b_{i+1}^{(1)}$ bestehen; jeder Punkt von $C_i^{(2)}$ kommt unter den Punkten $b_j^{(2)}$ $(j = i\,2^{\nu_2}, i\,2^{\nu_2}+1, \ldots, (i+1)\,2^{\nu_2})$ vor; also kommt jeder Punkt von $C_1 + C_2$ unter den Punkten $b_j^{(2)}$ $(j = 0\ 1, \ldots, 2^{\nu_1+\nu_2})$ vor; wegen $b_j^{(2)} \varepsilon G_i$ $(i\,2^{\nu_2} \leq j \leq (i+1)\,2^{\nu_2})$ und $G_i \subseteqq K_{b_i^{(1)} \frac{1}{2}}$ ist $b_i^{(1)} b_j^{(2)} < \frac{1}{2}$ für $i\,2^{\nu_2} \leq j \leq (i+1)\,2^{\nu_2}$.

In derselben Weise kann nun zwischen je zwei Punkte $b_j^{(2)}, b_{j+1}^{(2)}$ eine aus $2^{\nu_3}+1$ Punkten: $b_j^{(2)} = b_{j\,2^{\nu_3}}^{(3)}, b_{j\,2^{\nu_3}+1}^{(3)}, \ldots, b_{(j+1)\,2^{\nu_3}}^{(3)} = b_{j+1}^{(2)}$ bestehende σ_3-Kette so eingeschaltet werden, daß sämtliche Punkte von $C_1 + C_2 + C_3$ unter den Punkten $b_k^{(3)}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2^{\nu_1+\nu_2+\nu_3})$ vorkommen, und daß $b_j^{(2)} b_k^{(3)} < \frac{1}{2^2}$ für $j\,2^{\nu_3} \leq k \leq (j+1)\,2^{\nu_3}$, mithin $b_i^{(1)} b_k^{(3)} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$ für $i\,2^{\nu_2+\nu_3} \leq k \leq (i+1)\,2^{\nu_2+\nu_3}$. Wir erhalten so für jedes n eine endliche Anzahl von Punkten: $b' = b_0^{(n)}, b_1^{(n)}, \ldots, b_{2^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n}}^{(n)} = b''$, so daß sämtliche Punkte von $C_1 + C_2 + \ldots + C_n$ unter den $b_j^{(n)}$ $(j = 0, 1, \ldots, 2^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n})$ vorkommen, und so, daß für alle zwischen $b_j^{(n)}$ und $b_{j+1}^{(n)}$ eingeschalteten Punkte $b_l^{(n+h)}$ $(j\,2^{\nu_{n+1}+\cdots+\nu_{n+h}} \leq l \leq (j+1)\,2^{\nu_{n+1}+\cdots+\nu_{n+h}})$ gilt: $b_j^{(n)} b_l^{(n+h)} < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+h-1}}$; dabei ist $b_j^{(n)} = b_{j\,2^{\nu_{n+1}}}^{(n+1)}$. Wir ordnen nun dem dyadisch rationalen Punkte $x = \frac{j}{2^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n}}$ $(j = 0, 1, \ldots, 2^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n})$ den Punkt $b_j^{(n)}$ zu. Dadurch ist eine Abbildung S der dyadisch rationalen Punkte von $[0, 1]$ auf einen Teil $B' \supseteqq \underset{n}{S}\, C_n$ von B gegeben, bei der $S(0) = b'$, $S(1) = b''$;

und da für die Bilder y der dyadisch rationalen Punkte von $\left[\frac{j}{2^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n}}, \frac{j+1}{2^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n}}\right]$ gilt $b_j^{(n)}\, y < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots$, ist diese Abbildung gleichmäßig stetig. Da B als in sich kompakte Menge nach **18·3·1** vollständig ist, gibt es zufolge **23·4·2** eine stetige Erweiterung der Abbildung S zu einer eindeutigen Abbildung Q von $[0, 1]$ auf eine Menge $M \subseteqq B$, bei der $Q(0) = b'$, $Q(1) = b''$. Nach **23·3·1** ist M in sich kompakt, also abgeschlossen; wegen $M \supseteqq B' \supseteqq \underset{n}{S}\, C_n$ ist demnach $B \supseteqq M \supseteqq (\underset{n}{S}\, C_n)^0$; da aber C_n ein σ_n-Netz in B und $\sigma_n \to 0$ war, ist $B = (\underset{n}{S}\, C_n)^0$; also ist $M = B$, d. h. Q ist eine eindeutige stetige Abbildung von $[0, 1]$ auf B.

23·5·41. *Ist sowohl A als B eine in sich kompakte, zusammenhängende und lokal-zusammenhängende Menge, und enthält A mehr als einen Punkt, so ist B stetiges Bild von A.*

Zunächst erhalten wir eine eindeutige stetige Abbildung P von A auf $[0, 1]$ in folgender Weise. Da A kompakt, ist A nach **15·1·5** beschränkt. Sei $a' \varepsilon A$; nach **9·6·2** ist $\sup\limits_{x \varepsilon A} x\, a' = d$ eine endliche Zahl > 0, und zwar gibt es ein $a'' \varepsilon A$, so daß $a'\, a'' = d$; denn jedenfalls gibt es ein $a_n \varepsilon A$, so daß $a'\, a_n > d - \frac{1}{n}$; da A in sich kompakt, hat $((a_n))$ einen Häufungspunkt $a'' \varepsilon A$, und offenbar ist $a'\, a'' = d$. Ist nun $0 < x < d$, so gibt es mindestens ein $a \varepsilon A$, für das $a\, a' = x$; denn sei A' die Menge aller $a \varepsilon A$ mit $a\, a' < x$ und A'' die Menge aller $a \varepsilon A$ mit $a\, a' > x$; gibt es in A keinen Punkt mit $a\, a' = x$, so ist $A = A' + A''$ eine Zerlegung von A in zwei abgesonderte Teile $\supset A$, was unmöglich, weil A zusammenhängend. Ordnet man nun jedem $a \varepsilon A$ die Zahl $\frac{1}{d}\, a\, a'$ zu, so erhält man eine eindeutige Abbildung P von A auf $[0, 1]$, die offenkundig stetig ist. Nach **23·5·4** gibt es aber eine eindeutige stetige Abbildung Q von $[0, 1]$ auf B. Dann ist $P\,Q$ eine eindeutige Abbildung von A auf B, die nach **23·1·4** auch stetig ist.

Da z. B. jedes abgeschlossene Intervall des R_n in sich kompakt, zusammenhängend und lokal-zusammenhängend ist, gibt es nach **23·5·4** eine eindeutige stetige Abbildung von $[0, 1]$ auf ein abgeschlossenes Intervall des R_n.

Literatur: Satz **23·5·4** stammt von H. Hahn, Wien. Ber. 123 (1914) S. 2433 und St. Mazurkiewicz, C. R. Soc. Sc. Varsovie 6 (1913) S. 306; Fund. math. 1 (1920) S. 166; zu dem hier gegebenen Beweise vgl. G. T. Whyburn, Am. Journ. 53 (1931) S. 670. Die erste stetige Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat gab G. Peano, Math. Ann. 36 (1890) S. 157. Eine andere stetige Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat wurde von H. Lebesgue angegeben: Leçons sur l'intégration S. 44 (vgl. hierzu auch H. Hahn, Ann. di mat (3) 21 (1913) S. 51).

6. **Projektion.** Sei $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ein Punkt des Produktraumes $E = E^{(1)} \times E^{(2)} \times \ldots \times E^{(n)}$ (§ 20, 1). Ist dann $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$, so heißt der Raum $E^{(i_1)} \times E^{(i_2)} \times \ldots \times E^{(i_k)}$ ein Faktorenraum von E, und der Punkt $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}) \varepsilon E^{(i_1)} \times E^{(i_2)} \times \ldots \times E^{(i_k)}$, den wir kurz mit $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ bezeichnen, heißt die Projektion von a in diesen Faktorenraum; insbesondere heißt a_i die Projektion von a in den Raum $E^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Nach § 20 (1) ist:

$$(6) \quad a_{i_1 i_2 \ldots i_k}\, b_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \sqrt{(a_{i_1} b_{i_1})^2 + (a_{i_2} b_{i_2})^2 + \ldots + (a_{i_k} b_{i_k})^2} \leq a\, b\,.$$

Die Abbildung $P_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ von E auf $E^{(i_1)} \times E^{(i_2)} \times \ldots \times E^{(i_k)}$, die dem Punkte $a \varepsilon E$ den Punkt $a_{i_1 i_2 \ldots i_k} \varepsilon E^{(i_1)} \times E^{(i_2)} \times \ldots \times E^{(i_k)}$ zuordnet, heißt die Projektion von E in den Raum $E^{(i_1)} \times E^{(i_2)} \times \ldots \times E^{(i_k)}$; das Bild $P_{i_1 i_2 \ldots i_k}(A)$ der Menge $A \subseteqq E$ heißt die Projektion von A in den Raum $E^{(i_1)} \times E^{(i_2)} \times \ldots \times E^{(i_k)}$. Nach § 2 (1·9) gilt:

$$(6{\cdot}1) \quad \begin{aligned} &P_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\underset{m}{S} A_m) = \underset{m}{S}\, P_{i_1 i_2 \ldots i_k}(A_m)\,; \\ &\qquad\qquad P_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\underset{m}{D} A_m) \subseteqq \underset{m}{D}\, P_{i_1 i_2 \ldots i_k}(A_m)\,. \end{aligned}$$

Aus (6) folgt unmittelbar:

23·6·1. *Die Projektion $P_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ von E in den Faktorenraum $E^{(i_1)} \times E^{(i_2)} \times \ldots \times E^{(i_k)}$ ist eine eindeutige, gleichmäßig stetige Abbildung.*

Wir können uns offenbar ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf Räume $E = E^{(1)} \times E^{(2)}$ beschränken; dabei bedeutet P_1 bzw. P_2 die Projektion von E in $E^{(1)}$ bzw. in $E^{(2)}$.

23·6·2. *Ist A offen in $E^{(1)} \times E^{(2)}$, so ist $P_1(A)$ offen in $E^{(1)}$.*

Sei $a \varepsilon P_1(A)$; dann gibt es ein $b \varepsilon E^{(2)}$, so daß $(a, b) \varepsilon A$. Sei $K_{(a,b)\varrho}$ die Kugel in $E^{(1)} \times E^{(2)}$ vom Mittelpunkt (a, b) und Radius ϱ; da A offen und $(a, b) \varepsilon A$, gibt es ein $\varrho > 0$, so daß $K_{(a,b)\varrho} \subseteqq A$; für alle $x \varepsilon E^{(1)}$ mit $x\,a < \varrho$ gilt dann: $(x, b) \varepsilon K_{(a,b)\varrho}$, also auch $(x, b) \varepsilon A$, mithin $x \varepsilon P_1(A)$; d. h. für die Kugel $K_{a\varrho} \subseteqq E^{(1)}$ gilt $K_{a\varrho} \subseteqq P_1(A)$. Also ist a innerer Punkt von $P_1(A)$, also ist $P_1(A)$ offen in $E^{(1)}$.

Die Projektion $P_1(A)$ einer in $E^{(1)} \times E^{(2)}$ abgeschlossenen Menge A braucht nicht abgeschlossen zu sein; Beispiel im R_2: die Menge A aller der Gleichung $x_1 x_2 = 1$ genügenden Punkte (x_1, x_2) des R_2 ist abgeschlossen; ihre Projektion $P_1(A)$ besteht aus allen $x_1 \neq 0$, ist also nicht abgeschlossen im R_1. Wohl aber gilt:

23·6·3. *Ist A abgeschlossen in $E^{(1)} \times E^{(2)}$ und ist $E^{(2)}$ in sich kompakt, so ist $P_1(A)$ abgeschlossen in $E^{(1)}$.*

Sei a Häufungspunkt von $P_1(A)$; wir haben zu zeigen: $a \varepsilon P_1(A)$. Es gibt eine Folge $((a_n))$ aus $P_1(A)$ mit $a_n \to a$; wegen $a_n \varepsilon P_1(A)$ gibt es ein

$b_n \varepsilon E^{(2)}$, so daß $(a_n, b_n) \varepsilon A$; weil $E^{(2)}$ in sich kompakt, hat $((b_n))$ einen Häufungspunkt $b \varepsilon E^{(2)}$; in $((b_n))$ gibt es eine Teilfolge $((b_{n_\nu}))$ mit $b_{n_\nu} \to b$; da auch $a_{n_\nu} \to a$, gilt nach **20·1·1**: $(a_{n_\nu}, b_{n_\nu}) \to (a, b)$; da $(a_{n_\nu}, b_{n_\nu}) \varepsilon A$ und da A abgeschlossen, gilt auch $(a, b) \varepsilon A$; also ist $a \varepsilon P_1(A)$, w. z. b. w.

23·6·31. *Ist A abgeschlossen in $E^{(1)} \times E^{(2)}$ und ist $E^{(2)}$ halbkompakt, so ist $P_1(A)$ ein F_σ in $E^{(1)}$.*

Dies folgt aus **23·6·3** vermöge der ersten Formel (6·1).

23·6·32. *Ist A ein F_σ in $E^{(1)} \times E^{(2)}$ und ist $E^{(2)}$ halbkompakt, so ist $P_1(A)$ ein F_σ in $E^{(1)}$.*

Dies folgt durch nochmalige Anwendung der ersten Formel (6·1) aus **23·6·31**, da nach **10·7·2** die Summe abzählbar vieler F_σ wieder ein F_σ ist.

Ohne die Voraussetzung, $E^{(2)}$ sei halbkompakt, gilt dieser Satz nicht. Auch braucht, wenn A ein G_δ in $E^{(1)} \times E^{(2)}$ ist, die Projektion $P_1(A)$ keineswegs ein G_δ in $E^{(1)}$ zu sein; vgl. hierzu § 40, 6.

Wegen **23·6·1** entnehmen wir aus **23·1·31**, **23·3·1**, **23·5·1**, daß die Projektion $P_1(A)$ einer separablen, einer in sich kompakten, einer zusammenhängenden Menge $A \subseteqq E^{(1)} \times E^{(2)}$ separabel, bzw. in sich kompakt, bzw. zusammenhängend ist.

§ 24. Homöomorphe Abbildungen.

1. Homöomorphe Abbildungen. Die eindeutige stetige Abbildung P von A auf B heißt homöomorph (oder eine Homöomorphie), wenn auch die inverse Abbildung P^{-1} von B auf A eindeutig und stetig ist. Ist P eine Homöomorphie, so auch P^{-1}, und umgekehrt. Aus **23·1·4** folgt: ist P eine homöomorphe Abbildung von A auf B und Q eine homöomorphe Abbildung von B auf C, so ist $P \mid Q$ eine homöomorphe Abbildung von A auf C. Gibt es eine homöomorphe Abbildung von A auf B, so heißen A und B homöomorph[1]); in Zeichen: $A \approx B$. Diese Relation zwischen zwei Punktmengen ist eine Gleichheitsrelation (§ 4, 1).

Aus dem Umstande, daß B ein-eindeutiges stetiges Bild von A (§ 23, 1) und A ein-eindeutiges stetiges Bild von B ist, folgt nicht, daß A und B homöomorph sind. Beispiel: A bestehe aus den Intervallen $[-1, 1]$ und $(2n, 2n+1]$ $(n = 1, 2, \ldots)$, B bestehe aus dem Intervalle $[-1, 0]$, den Intervallen $(2n, 2n+1]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und den Intervallen $\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right]$ $(n = 1, 2, \ldots)$; dann ist B ein-eindeutiges stetiges Bild von A (man hat

[1]) Wir haben schon in § 9, 1 von homöomorphen topologischen Räumen gesprochen; daß die damalige Definition sich mit der jetzigen deckt, lehrt Satz **24·1·21**.

nur $[-1, 1]$ auf $[-1, 0]$ abzubilden, $(4n, 4n+1]$ auf $(2n, 2n+1]$, und $(4n-2, 4n-1]$ auf $\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right]$); und A ist ein-eindeutiges stetiges Bild von B (man bilde $[-1, 0]$ auf $[-1, 0]$ ab, $(2n, 2n+1]$ auf $(2n, 2n+1]$, und $\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right]$ auf $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$); hingegen sind A und B nicht homöomorph; denn eine Homöomorphie führt, wie wir gleich in **24·1·3** zeigen werden, die Komponenten von A und die Komponenten von B in einander über; nun gehören die Punkte $\frac{1}{2n}$ zu verschiedenen Komponenten von B und es gilt $\frac{1}{2n} \to 0$; es müßten ihnen also Punkte a_n entsprechen, die zu verschiedenen Komponenten von A gehören und gegen einen Punkt von A konvergieren; eine solche Folge $((a_n))$ aber gibt es in A nicht.

24·1·1. *Jede ein-eindeutige stetige Abbildung P einer in sich kompakten*[1]) *Menge A ist homöomorph.*

Denn nach **23·3·3** ist P^{-1} oberhalb stetig, also, weil eindeutig, auch stetig nach **23·1·1.**

24·1·2. *Ist P eine homöomorphe Abbildung von A auf B, und ist A' offen (abgeschlossen) in A, so ist $P(A')$ offen (abgeschlossen) in B.*

Da P^{-1} eine eindeutige, stetige Abbildung von B auf A ist, folgt dies wegen $(P^{-1})^{-1} = P$ aus **23·2·1** (bzw. **23·2·11**).

24·1·21. *Ist P eine ein-eindeutige Abbildung von A auf B, die die in A offenen (abgeschlossenen) Mengen überführt in die in B offenen (abgeschlossenen) Mengen, so ist P homöomorph.*

Dies folgt aus **23·2·1** (bzw. **23·2·11**), angewendet auf P und auf P^{-1}.

24·1·22. *Ist P eine homöomorphe Abbildung von A auf B, und ist A' ein G_δ (ein F_σ) in A, so ist $P(A')$ ein G_δ (ein F_σ) in B.*

Dies folgt aus **24·1·2** wegen § 2 (1·9) und **2·1·1.**

Für homöomorphe Abbildungen verschärft sich **23·5·1** zu:

24·1·3. *Ist P eine homöomorphe Abbildung von A auf B, und ist A' eine Komponente von A, so ist $P(A')$ eine Komponente von B.*

Sei $a \varepsilon A$, $b = P(a)$ und A_a die zu a gehörige Komponente (§ 16, 3) von A, B_b die zu b gehörige Komponente von B. Da $P(A_a)$ nach **23·5·1** zusammenhängend, ist $P(A_a) \subseteqq B_b$. Ebenso aber ist $P^{-1}(B_b) \subseteqq A_a$, also $B_b = P(P^{-1}(B_b)) \subseteqq P(A_a)$, somit $B_b = P(A_a)$.

---

[1]) Dieser Zusatz kann, wie wir eben sahen, nicht entbehrt werden; z. B. ist jede eineindeutige Abbildung der Gitterpunkte des R_1 auf die rationalen Punkte des R_1 stetig; ihre Umkehrung aber ist in jedem Punkte unstetig.

24·1·4. *Ist P eine homöomorphe Abbildung von A auf B, und ist A lokal-zusammenhängend im Punkte $a \varepsilon A$, so ist B lokal-zusammenhängend im Punkte $b = P(a)$.*

Sei H offen in B und $b \varepsilon H$; dann ist nach 23·2·1 $P^{-1}(H)$ offen in A und $a \varepsilon P^{-1}(H)$; sei ferner L die zu b gehörige Komponente von H und K die zu a gehörige Komponente von $P^{-1}(H)$; dann ist nach **24·1·3** $P(K) = L$. Da A lokal-zusammenhängend in a, gibt es eine a enthaltende in A offene Menge $G \subseteqq K$; dann ist $P(G) \subseteqq P(K) = L$; da nach **24·1·2** $P(G)$ offen und $b \varepsilon P(G)$, ist B lokal-zusammenhängend in b.

24·1·5. *Ist $A \approx B$ und ist A in sich kompakt, so ist auch B in sich kompakt.*
Dies ist enthalten in **23·3·1**.

Literatur: C. Kuratowski, Fund. math. 2 (1921) S. 158.

2. **Beispiele.** Offenbar ist jede offene Halbgerade $x > a$ oder $x < a$ des R_1 homöomorph dem R_1, ebenso jedes offene Intervall (a, b).

Sei $A \subseteqq R_1$; wir nennen den Punkt $a \varepsilon R_1$ einen linksseitigen (rechtsseitigen) Häufungspunkt von A, wenn jedes Intervall $(a - h, a)$ (bzw. jedes Intervall $(a, a + h)$) einen Punkt (und mithin unendlich viele Punkte) von A enthält. Ist a sowohl rechtsseitiger als linksseitiger Häufungspunkt von A, so heißt a beiderseitiger Häufungspunkt von A. Ein Häufungspunkt von A, der nicht beiderseitiger Häufungspunkt ist, heißt einseitiger Häufungspunkt.

24·2·1. *Ist $A \subseteqq R_1$, so ist die Menge der einseitigen Häufungspunkte von A abzählbar.*

Denn ist a einseitiger Häufungspunkt von A, so gibt es ein Intervall $(a - h, a)$ oder ein Intervall $(a, a + h)$, das keinen Punkt von A enthält; und zwar können diese Intervalle ohne weiteres so gewählt werden, daß sie zu je zweien fremd sind. Da es nach **5·1·42** nur abzählbar viele fremde Intervalle gibt, folgt die Behauptung.

24·2·11. *Jede Randmenge $A \neq \emptyset$ im R_1, deren jeder Punkt beiderseitiger Häufungspunkt ist, und deren Komplement $R_1 - A$ nur abzählbar viele Komponenten hat, ist homöomorph mit der Menge C aller irrationalen Punkte des R_1.*

Nach **16·1·8** sind die Komponenten von $R_1 - A$ abgeschlossene Halbgerade, abgeschlossene Intervalle oder einzelne Punkte; sei $\mathfrak{K}$ die Menge aller Komponenten von $R_1 - A$, die nicht Halbgerade sind; wir denken sie uns geordnet gemäß ihrer Aufeinanderfolge im R_1; da A Randmenge ist, gibt es in $\mathfrak{K}$ kein erstes und kein letztes Element, und keine zwei Elemente von $\mathfrak{K}$ folgen unmittelbar aufeinander, d. h. $\mathfrak{K}$ ist dicht geordnet. Sei nun $\mathfrak{M}$ die Menge, deren Elemente die Punkte von A und

die zu $\mathfrak{K}$ gehörigen Komponenten von $R_1 - A$ sind, geordnet gemäß ihrer Aufeinanderfolge im R_1. Dann hat $\mathfrak{M}$ kein erstes und kein letztes Element, und da A eine Randmenge, also jeder Punkt von A Häufungspunkt von $R_1 - A$ ist, ist $\mathfrak{K}$ dicht geordnet in $\mathfrak{M}$; da jedem Schnitt in $\mathfrak{M}$ ein Schnitt im R_1 entspricht, ist offenbar $\mathfrak{M}$ stetig geordnet; nach **6·5·1** gibt es also eine ähnliche Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf den R_1, die $\mathfrak{K}$ auf die Menge der rationalen Punkte, also A auf die Menge C der irrationalen Punkte des R_1 abbildet. Sei P diese Abbildung von A auf C; es ist nur mehr zu zeigen, daß P homöomorph ist, d. h. daß P und P^{-1} stetig sind; wir zeigen dies etwa für P^{-1} (der Beweis für P ist völlig analog). Sei also $c \,\varepsilon\, C$, $c_n \,\varepsilon\, C$, $c_n \to c$, und sei $a = P^{-1}(c)$, $a_n = P^{-1}(c_n)$; da a beiderseitiger Häufungspunkt von A, gibt es zu jedem $\varrho > 0$ ein $a' \,\varepsilon\, A$ und ein $a'' \,\varepsilon\, A$, so daß $a - \varrho < a' < a < a'' < a + \varrho$; dann ist wegen der Ähnlichkeit der Abbildung P, und weil $P(a) = c$ ist: $P(a') < c < P(a'')$, also $P(a') < c_n < P(a'')$ für fast alle n; daraus folgt, da auch P^{-1} ähnlich ist: $a' < a_n < a''$, also auch $a - \varrho < a_n < a + \varrho$ für fast alle n; aus $c_n \to c$ folgt also $a_n \to a$, d. h. $P^{-1}(c_n) \to P^{-1}(c)$; nach **28·1·21** ist also P^{-1} stetig.

In **24·2·11** ist enthalten:

24·2·12. *Die Menge aller irrationalen Punkte eines Intervalles* (a, b) *(einer offenen Halbgeraden) ist homöomorph mit der Menge* C *aller irrationalen Punkte des* R_1.

24·2·2. *Der* R_0 *ist homöomorph mit der Menge aller irrationalen Punkte des* R_1.

Nach **24·2·12** genügt es, zu zeigen, daß der R_0 homöomorph ist der Menge C' aller irrationalen Punkte von $(0, 1)$. Wir ordnen jedem Punkte $a = ((k_\nu))$ des R_0 (§ 9, 3) die irrationale Zahl c zu, deren Kettenbruchentwicklung lautet: $c = \frac{1|}{|k_1} + \frac{1|}{|k_2} + \cdots + \frac{1|}{|k_\nu} + \cdots$; dadurch ist eine ein-eindeutige Abbildung P des R_0 auf C' gegeben. Ist $a_n = ((k_{n\nu}))$, $c_n = \frac{1|}{|k_{n1}} + \frac{1|}{|k_{n2}} + \cdots$, so gilt nach **17·3·7** im R_0 dann und nur dann $a_n \to a$, wenn für jedes ν gilt: $k_{n\nu} = k_\nu$ für fast alle n; das ist aber bekanntlich auch notwendig und hinreichend dafür, daß im R_1 gelte $c_n \to c$; aus $a_n \to a$ folgt also $c_n \to c$ und umgekehrt; nach **28·1·21** ist also sowohl P als P^{-1} stetig, d. h. die Abbildung P des R_0 auf C' ist homöomorph.

24·2·21. *Jede unabzählbare, im* R_0 *abgeschlossene Menge* A *ist darstellbar in der Form* $A = A' + A''$, $A'A'' = \Lambda$, *wo* A' *homöomorph mit der Menge* C *aller irrationalen Punkte des* R_1 *und* A'' *abzählbar.*

Da nach **24·1·2** eine homöomorphe Abbildung des R_0 auf die Menge C der irrationalen Punkte des R_1 jede im R_0 abgeschlossene Menge

überführt in eine in C abgeschlossene Menge, können wir wegen **24·2·2** auch annehmen, A sei abgeschlossen in C. Nach § 13 (5·1) zerlegen wir: $A = A_u + A_v$; nach **13·5·4** ist A_u abzählbar; nach **13·5·61** ist A_v perfekt in A, also nach **10·8·5** auch abgeschlossen in C. Wir bezeichnen mit A' die Menge aller $a \varepsilon A_v$, die beiderseitige Häufungspunkte von A_v sind; dann ist nach **24·2·1** $A_v - A'$ abzählbar; setzen wir noch $A'' = (A_v - A') + A_u$, so ist also auch A'' abzählbar und $A = A' + A''$. Es bleibt zu zeigen, daß A' homöomorph mit C; wir zeigen dies durch Berufung auf **24·2·11.** Da A unabzählbar, A'' abzählbar, ist $A' \supset A$. Da $A' \subseteqq A_v \subseteqq A \subseteqq C$, ist A' eine Randmenge. Sei $a \varepsilon A'$; da a beiderseitiger Häufungspunkt von A_v, enthält jedes Intervall $(a - h, a)$ und jedes Intervall $(a, a + h)$ Punkte von A_v, und somit nach **13·5·6** unabzählbar viele Punkte von A_v, also, weil $A_v - A'$ abzählbar, auch unabzählbar viele Punkte von A', also ist jeder Punkt $a \varepsilon A'$ beiderseitiger Häufungspunkt von A'. Nun ist nur mehr zu zeigen, daß das Komplement $R_1 - A'$ nur abzählbar viele Komponenten hat. Da diese Komponenten nach **16·1·3** Halbgerade, Intervalle oder einzelne Punkte sind, und es nur abzählbar viele fremde Intervalle gibt, genügt es zu zeigen, daß $R_1 - A'$ nur abzählbar viele einpunktige Komponenten hat; und da es nur abzählbar viele rationale Punkte gibt, genügt es zu zeigen: ist $\{a\}$ eine Komponente von $R_1 - A'$, so ist a rational. Sei also $\{a\}$ Komponente von $R_1 - A'$; dann ist a beiderseitiger Häufungspunkt von A', wegen $A' \subseteqq A_v$ also auch von A_v; nach Definition von A' ist also $a \sim\varepsilon (A_v - A')$; wegen $a \varepsilon (R_1 - A')$ folgt also auch $a \sim\varepsilon A_v$; und da a Häufungspunkt von A_v und A_v abgeschlossen in C, muß $a \sim\varepsilon C$ sein, d. h. a ist ein rationaler Punkt, w. z. b. w.

24·2·3. *Je zwei dyadische Diskontinua A und B sind homöomorph.*

Nach § 18, 9 sind die Punkte von A und von B darstellbar in der Form $a_{((k_\nu))}$, $b_{((k_\nu))}$, wo $((k_\nu))$ alle dyadischen Folgen durchläuft und verschiedenen dyadischen Folgen verschiedene Punkte $a_{((k_\nu))}$ bzw. $b_{((k_\nu))}$ entsprechen. Ordnet man dem Punkte $a_{((k_\nu))}$ den Punkt $b_{((k_\nu))}$ zu, so ist das eine ein-eindeutige Abbildung von A auf B, die — wie beim Beweise von **23·3·2** gezeigt wurde — stetig ist. Da A nach **18·8·2** in sich kompakt ist, ist diese Abbildung nach **24·1·1** homöomorph.

Wir nennen eine dyadische Folge $((k_\nu))$, in der fast alle $k_\nu = 0$ sind, eine Nullfolge. Lassen wir aus dem dyadischen Diskontinuum B der Punkte $b_{((k_\nu))}$ die abzählbar unendlich vielen Punkte weg, die durch Nullfolgen $((k_\nu))$ geliefert werden, so nennen wir die übrigbleibende Menge ein reduziertes dyadisches Diskontinuum.

24·2·4. *Jedes reduzierte dyadische Diskontinuum B' ist eine Youngsche Menge.*

Denn da es nur abzählbar viele Nullfolgen gibt, ist $B - B'$ abzählbar, also ein F_σ. Somit ist $B' = B - (B - B')$ ein G_δ in B, und da B als dyadisches Diskontinuum nach **18·8·21** vollständig ist, ist B' eine Youngsche Menge.

24·2·41. *Jedes reduzierte dyadische Diskontinuum B' ist homöomorph dem R_0.*

Sei $b_{((k_\nu))} \varepsilon B'$; dann ist $((k_\nu))$ keine Nullfolge; seien $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_i < \ldots$ die Indizes, für die $k_\nu = 1$ ist; setzen wir $n_1 = \nu_1$, $n_2 = \nu_2 - \nu_1, \ldots$, $n_i = \nu_i - \nu_{i-1}, \ldots$ so ist $((n_\iota))$ eine Folge natürlicher Zahlen, also ein Punkt des R_0. Hierdurch ist eine ein-eindeutige Abbildung P von B' auf den R_0 gegeben; wir haben zu zeigen, daß sie homöomorph ist. Seien $b = b_{((k_\nu))}$, $b_{m_\iota} = b_{((k_{m\nu}))}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ Punkte von B' und $c = ((n_\iota))$, $c_m = ((n_{m\iota}))$ die zugeordneten Punkte des R_0; dann ist nach **18·9·2** $b_m \to b$ gleichbedeutend mit: für jedes ν gilt $k_{m\nu} = k_\nu$ für fast alle m; dies aber ist gleichbedeutend mit: für jedes i gilt: $n_{mi} = n_i$ für fast alle i; und dies ist gleichbedeutend mit: im R_0 gilt $c_m \to c$. Aus $b_m \to b$ folgt also $c_m \to c$ und umgekehrt. Nach **23·1·21** sind also P und P^{-1} stetig, somit ist P homöomorph.

Literatur. Satz **24·2·21** stammt von St. Mazurkiewicz, Wektor 1918, S. 35.

3. Erweiterung einer Homöomorphie. Anknüpfend an § 22, 4 zeigen wir nun:

24·3·1. *Sind X und Y vollständige Räume, und ist P eine homöomorphe Abbildung einer Menge $A \subseteqq X$ auf eine Menge $B \subseteqq Y$, so kann P erweitert werden zu einer homöomorphen Abbildung einer Youngschen Menge $A^\times$ auf eine Youngsche Menge $B^\times$, für die gilt: $A \subseteqq A^\times \subseteqq A^0$, $B \subseteqq B^\times \subseteqq B^0$.*

Nach **22·4·3** und **23·4·1** gibt es eine eindeutige stetige Erweiterung S von P auf die Menge $\bar{A}$ aller Konvergenzpunkte von P; und ebenso gibt es eine eindeutige stetige Erweiterung T von P^{-1} auf die Menge $\bar{B}$ aller Konvergenzpunkte von P^{-1}. Wir zeigen: ist $a \varepsilon \bar{A}$ und $b = S(a) \varepsilon \bar{B}$, so ist $T(b) = a$. Da $\bar{A} \subseteqq A^0$, gibt es eine Folge von Punkten $a_n \varepsilon A$ mit $a_n \to a$; dann ist, weil S eine stetige Erweiterung von P ist: $b = S(a) = \lim\limits_n S(a_n) = \lim\limits_n P(a_n)$, also wenn $P(a_n) = b_n$ gesetzt wird: $b_n \to b$, wo $b_n \varepsilon B$; weil T eine stetige Erweiterung von P^{-1}, folgt daraus: $T(b) = \lim\limits_n T(b_n) = \lim\limits_n P^{-1}(b_n)$ $= \lim\limits_n a_n = a$, wie behauptet. Ebenso sieht man: ist $b \varepsilon \bar{B}$ und $a = T(b) \varepsilon \bar{A}$, so ist $S(a) = b$. Bezeichnen wir also mit $A^\times$ die Menge aller $a \varepsilon \bar{A}$, für die $S(a) \varepsilon \bar{B}$ gilt, und mit $B^\times$ die Menge aller $b \varepsilon \bar{B}$, für die $T(b) \varepsilon \bar{A}$ gilt, so sind die Teilabbildungen (§ 22, 3) $A^\times 1\, S$, $B^\times 1\, T$ zu einander invers, und

da sie eindeutig und stetig sind, liefern sie eine Homöomorphie zwischen $A^\times$ und $B^\times$; dabei ist $A \subseteqq A^\times \subseteqq \bar{A} \subseteqq A^0$, $B \subseteqq B^\times \subseteqq \bar{B} \subseteqq B^0$. Es bleibt noch zu zeigen, daß $A^\times$ und $B^\times$ Youngsche Mengen sind. Nun ist nach Definition: $A^\times = S^{-1}(S(\bar{A})\,\bar{B})$; nach **22·4·1** ist $\bar{B}$ ein G_δ in Y, also $S(\bar{A})\,\bar{B}$ ein G_δ in $S(\bar{A})$, also ist nach **23·2·12** $A^\times$ ein G_δ in $\bar{A}$, und da nach **22·4·1** $\bar{A}$ ein G_δ in X ist, so ist nach **10·9·2** auch $A^\times$ ein G_δ in X, also, weil X vollständig, eine Youngsche Menge. Ebenso verläuft der Beweis für $B^\times$.

Behalten wir Voraussetzungen und Bezeichnungsweise von **24·3·1** bei, so gilt:

24·3·2. *Gibt es eine homöomorphe Erweiterung Q der Abbildung P auf die Menge $C \subseteqq A^0$, so ist $C \subseteqq A^\times$, $Q(C) \subseteqq B^\times$.*

Denn nach **22·4·31**, angewendet auf Q und Q^{-1}, muß $C \subseteqq \bar{A}$, $Q(C) \subseteqq \bar{B}$ sein; nach Definition von $A^\times$ folgt aus der zweiten Beziehung $C \subseteqq A^\times$, und daraus $Q(C) \subseteqq B^\times$.

Literatur: M. Lavrentieff, Fund. math. 6 (1924) S. 149. F. Hausdorff, Fund. math. 16 (1930) S. 353. Vgl. auch A. Lindenbaum, Fund. math. 8 (1926) S. 215.

4. **Youngsche Mengen.** Aus **24·3·1** können wir nun leicht folgern:

24·4·1. *Jede mit einer Youngschen Menge A homöomorphe Menge B ist eine Youngsche Menge.*

Als Youngsche Menge ist A ein G_δ in einem vollständigen Raume X. Sei P eine homöomorphe Abbildung von A auf B; nach **18·4·6** gibt es einen vollständigen Raum $Y \supseteqq B$. Nach **24·3·1** erweitern wir P zu einer homöomorphen Abbildung Q von $A^\times$ auf $B^\times$. Als Youngsche Menge ist A auch ein G_δ in $A^\times$, somit ist nach **24·1·22** B ein G_δ in $B^\times$, und da $B^\times$ nach **24·3·1** eine Youngsche Menge ist, so ist nach **19·1·2** auch B eine Youngsche Menge.

Wir werden nun zeigen, daß jede Youngsche Menge einer vollständigen Menge homöomorph ist. Wir führen zunächst eine Hilfsbetrachtung durch.

Sei A eine Youngsche Menge, d. h. ein G_δ in einem vollständigen Raume X, also $A = \underset{n}{D}\, G_n$, wo G_n offen in X. Setzen wir $F_n = X - G_n$, so ist F_n abgeschlossen in X, und wenn A nicht vollständig, also $A \subset X$, können wir annehmen: $F_n \supset A$ für alle n. Wir setzen für alle $x \varepsilon X$, $x' \varepsilon X$:

$$(4) \qquad \varrho_n(x, x') = \frac{1}{n}\,\frac{x x'}{x x' + x F_n + x' F_n} \quad \text{für } x \neq x', \qquad \varrho_n(x, x) = 0;$$

dann ist:

$$(4{\cdot}1) \qquad 0 \leq \varrho_n(x, x') \leq \frac{1}{n}.$$

Ist $x \varepsilon F_n$, $x' \sim \varepsilon F_n$, so ist in (4): $x F_n = 0$, $x' F_n \leq x x'$, also:

$$(4\cdot 11) \qquad \varrho_n(x, x') \geq \frac{1}{2n} \text{ für } x \varepsilon F_n,\ x' \sim \varepsilon F_n.$$

Wir setzen noch:

$$(4\cdot 2) \qquad r_n(x, x') = \max\left(x x', \varrho_n(x, x')\right), \qquad r(x, x') = \sup_n r_n(x, x').$$

24·4·2. *Ist $a \varepsilon A$, $a_\nu \varepsilon X$, so sind die Aussagen: $a_\nu a \to 0$ und $r(a_\nu, a) \to 0$ äquivalent.*

Da nach (4·2) $a_\nu a \leq r(a_\nu, a)$ ist, so folgt aus $r(a_\nu, a) \to 0$ auch $a_\nu a \to 0$. Sei umgekehrt $a_\nu a \to 0$; dann ist nach **17·3·31**: $\lim\limits_\nu a_\nu F_n = a F_n$; da $a \varepsilon A$, also $a \sim \varepsilon F_n$ und F_n abgeschlossen, ist hierin $a F_n > 0$; nach (4) gilt also $\lim\limits_\nu \varrho_n(a_\nu, a) = 0$; somit gibt es zu jedem n^* ein ν^*, so daß $\varrho_n(a_\nu, a) \leq \frac{1}{n^*}$ für $n = 1, 2, \ldots, n^*$ und $\nu \geq \nu^*$, und wegen $a_\nu a \to 0$ kann ν^* auch so gewählt werden, daß $a_\nu a \leq \frac{1}{n^*}$ für $\nu \geq \nu^*$; da nach (4·1) $\varrho_n(a_\nu, a) < \frac{1}{n^*}$ für $n > n^*$ und alle ν, ist also zufolge (4·2): $r(a_\nu, a) \leq \frac{1}{n^*}$ für $\nu \geq \nu^*$; d. h. es gilt: $r(a_\nu, a) \to 0$.

Da nach § 9 (4·1): $x' F_n \leq x x' + x F_n$, $x' F_n \leq x' x'' + x'' F_n$, so folgt aus (4):

$$\varrho_n(x, x') + \varrho_n(x', x'') \geq \frac{1}{n} \frac{x x' + x' x''}{x x' + x' x'' + x F_n + x'' F_n}$$
$$\geq \frac{1}{n} \frac{x x''}{x x'' + x F_n + x'' F_n} = \varrho_n(x, x'');$$

es genügt also $\varrho_n(x, x')$ den metrischen Axiomen 1_m), 2_m) (§ 9, 2). Dasselbe gilt dann nach (4·2) auch von $r_n(x, x')$ und von $r(x, x')$. Betrachten wir also $r(x, x')$ an Stelle von $x x'$ als die Entfernung der Punkte $x \varepsilon A$, $x' \varepsilon A$, so entsteht ein neuer metrischer Raum $\hat{A}$.

24·4·21. *Der Raum $\hat{A}$ ist homöomorph mit A.*

Indem wir jedem Punkte $a \varepsilon A$ eben diesen Punkt $a \varepsilon \hat{A}$ zuordnen, erhalten wir eine ein-eindeutige Abbildung P von A auf $\hat{A}$, und aus **24·4·2** folgt nach **23·1·21** sofort, daß sowohl P als P^{-1} stetig ist; also ist P eine Homöomorphie.

24·4·22. *Der Raum $\hat{A}$ ist vollständig.*

Sei $((a_\nu))$ eine Cauchysche Folge in $\hat{A}$; wir haben zu zeigen: es gibt einen Punkt $a \varepsilon \hat{A}$ (oder was dasselbe heißt: $a \varepsilon A$), so daß $r(a_\nu, a) \to 0$. Da nach (4·2) $x x' \leq r(x, x')$, ist $((a_\nu))$ auch eine Cauchysche Folge in $A \subseteqq X$; da X vollständig, gibt es ein $a \varepsilon X$, so daß $a_\nu \to a$. Wir zeigen: $a \varepsilon A$. Wäre $a \sim \varepsilon A$,

so gäbe es ein n, so daß $a \varepsilon F_n$; dann wäre nach (4·11): $\varrho_n(a_\nu, a) \geq \frac{1}{2n}$ für alle ν; da nach **17·3·31**: $\lim\limits_{\mu} a_\nu a_\mu = a_\nu a$, $\lim\limits_{\mu} a_\mu F_n = a F_n$, folgt aus (4): $\lim\limits_{\mu} \varrho_n(a_\nu, a_\mu) = \varrho_n(a_\nu, a)$; wegen $\varrho_n(a_\nu, a) \geq \frac{1}{2n}$ wäre also bei gegebenem ν: $\varrho_n(a_\nu, a_\mu) > \frac{1}{3n}$ für fast alle μ, also wegen (4·2) auch $r(a_\nu, a_\mu) > \frac{1}{3n}$ für fast alle μ, entgegen der Annahme, $((a_\nu))$ sei eine Cauchysche Folge in $\hat{A}$; somit ist $a \varepsilon A$, wie behauptet. — Da nun $a \varepsilon A$, $a_\nu \to a$, also auch $a_\nu a \to 0$, folgt aus **24·4·2**: $r(a_\nu, a) \to 0$, w. z. b. w.

Aus **24·4·21** und **24·4·22** folgt nun:

24·4·3. *Jede Youngsche Menge A ist homöomorph einer vollständigen Menge.*

Z. B. ist ein offenes Intervall (a, b) nicht vollständig, aber homöomorph dem vollständigen R_1; die Menge aller irrationalen Punkte des R_1 ist nicht vollständig, aber nach **24·2·2** homöomorph dem (nach **18·2·22** vollständigen) R_0.

Von **24·4·3** gilt folgende Umkehrung:

24·4·31. *Ist die Menge A eines metrischen Raumes E homöomorph einer vollständigen Menge B, so ist A ein G_δ in E.*

Als vollständige Menge ist B eine Youngsche Menge (§ 19, 1), also ist nach **24·4·1** auch A eine Youngsche Menge, d. h. ein absolutes G_δ, also ist A auch ein G_δ in E.

Literatur: St. Mazurkiewicz, Bull. Crac. 1916 S. 490. P. Alexandroff, C. R. 178 (1924) S. 185. F. Hausdorff, Fund. math. 6 (1924) S. 146. W. Sierpiński, Fund. math. 11 (1928) S. 203; Fund. math. 16 (1930) S. 173.

§ 25. Stetige Funktionen.

1. **Die unendlichen Zahlen** $+\infty$, $-\infty$. Wir fügen zur Menge aller reellen Zahlen noch die beiden Elemente $+\infty$, $-\infty$ hinzu, die wir als unendliche Zahlen bezeichnen (im Gegensatze dazu heißen dann die reellen Zahlen endliche Zahlen), und setzen für sie folgende Rechenregeln fest (in denen a eine endliche Zahl bedeutet):

$$-\infty < +\infty; \quad -\infty < a, \quad a < +\infty;$$
$$-(+\infty) = -\infty, \quad -(-\infty) = +\infty;$$
$$|+\infty| = +\infty, \quad |-\infty| = +\infty.$$

Die Addition sei kommutativ, und es sei:

$$a + (+\infty) = a + \infty = +\infty; \quad a + (-\infty) = a - \infty = -\infty;$$
$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty + \infty = +\infty; \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty - \infty = -\infty;$$

hingegen gelte $(+\infty) + (-\infty)$ und $(-\infty) + (+\infty)$ als sinnlos. Die Sub-

traktion wird auf die Addition zurückgeführt durch die Festsetzung: die (endliche oder unendliche) Zahl b subtrahieren, heißt $-b$ addieren. Die Multiplikation sei kommutativ, und es sei für $a > 0$:

$$a(+\infty) = (-a)(-\infty) = (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty;$$
$$(-a)(+\infty) = a(-\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty;$$

die Ausdrücke $0(+\infty)$, $(+\infty)0$, $0(-\infty)$, $(-\infty)0$ gelten als sinnlos. Ferner setzen wir $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$ und erklären die Division durch die (endliche oder unendliche) Zahl b als Multiplikation mit $\frac{1}{b}$; Quotienten mit dem Nenner 0 sowie die Ausdrücke $\frac{+\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$ gelten als sinnlos.

2. Die Schränkungstransformation. Setzen wir:

$$(2) \quad S(a) = \frac{a}{1+|a|} \text{ für } -\infty < a < +\infty; \quad S(+\infty) = 1, \quad S(-\infty) = -1,$$

so haben wir eine ein-eindeutige Abbildung der Menge aller (endlichen und unendlichen) reellen Zahlen auf das Intervall $[-1, 1]$, die wir als Schränkungstransformation bezeichnen; ihre Umkehrung (die inverse Schränkungstransformation) ist gegeben durch:

$$(2{\cdot}1) \quad S^{-1}(b) = \frac{b}{1-|b|} \text{ für } -1 < b < 1, \; S^{-1}(1) = +\infty, \; S^{-1}(-1) = -\infty.$$

Die Schränkungstransformation (und somit auch ihre Inverse) ist stets wachsend, d. h.:

$$S(a') < S(a), \text{ wenn } a' < a; \quad S^{-1}(b') < S^{-1}(b), \text{ wenn } b' < b.$$

3. Der Raum $\overline{R}_1$. Wir machen nun die Menge aller reellen Zahlen, einschließlich der beiden unendlichen Zahlen $+\infty$, $-\infty$, zu einem metrischen Raum $\overline{R}_1$, indem wir als Abstand der Zahlen a, b den Ausdruck definieren:

$$(3) \qquad \|a-b\| = \|b-a\| = |S(b) - S(a)|,$$

wo S die Schränkungstransformation (2) bedeutet; die metrischen Axiome 1_m), 2_m) (§ 9, 2) sind dann offenbar erfüllt. Insbesondere gilt die Dreiecksungleichung:

$$(3{\cdot}0) \qquad \|a-b\| + \|b-c\| \geq \|a-c\|.$$

Es gilt, wenn $a \neq b$:

$$(3{\cdot}1) \qquad \|a-b\| < |a-b|.$$

Aus 17·3·32 entnehmen wir: Sind $((a_n))$, $((b_n))$ Punktfolgen des $\overline{R}_1$ mit $a_n \to a$, $b_n \to b$, so gilt:

$$(3{\cdot}2) \qquad \lim_n \|a_n - b_n\| = \|a-b\|.$$

Wie aus (3) hervorgeht, ist der $\overline{R}_1$ isometrisch (also auch homöomorph) mit dem Intervalle $[-1, 1]$ des R_1. Daraus folgt:

25·3·1. *Der $\overline{R}_1$ ist separabel, in sich kompakt, zusammenhängend und vollständig.*

Da im R_1 der Abstand der Punkte a, b gegeben ist durch $|a - b|$, im $\overline{R}_1$ durch $\|a - b\|$, so ist, wenn a, a_n endliche Zahlen bedeuten, die Aussage $a_n \to a$, gedeutet im R_1, gleichbedeutend mit $|a_n - a| \to 0$, hingegen, gedeutet im $\overline{R}_1$, gleichbedeutend mit $\|a_n - a\| \to 0$; da aber $\|a_n - a\| = |S(a_n) - S(a)|$, und da die Aussagen $|a_n - a| \to 0$ und $|S(a_n) - S(a)| \to 0$ offenbar äquivalent sind, so hat (wenn a, a_n endliche Zahlen sind), die Aussage $a_n \to a$ im R_1 und im $\overline{R}_1$ dieselbe Bedeutung. Aus 23·1·21 entnehmen wir also:

25·3·2. *Ordnen wir jedem Punkte $a \varepsilon R_1$ eben diesen Punkt $a \varepsilon \overline{R}_1$ zu, so ist dies eine homöomorphe Abbildung des R_1 auf die Menge $\overline{R}_1 - \{+\infty, -\infty\}$.*

Wie aus der Definition des $\overline{R}_1$ unmittelbar hervorgeht, haben im $\overline{R}_1$ die Aussagen $a_n \to +\infty$ (bzw. $a_n \to -\infty$) die bekannte Bedeutung: ist z eine beliebige endliche Zahl, so gilt $a_n > z$ (bzw. $a_n < z$) für fast alle n.

25·3·3. *Ist $[a, b]$ ein Intervall des R_1, so gibt es zu jedem $\sigma > 0$ ein $\varrho > 0$, so daß aus $z' \varepsilon [a, b]$, $z'' \varepsilon [a, b]$, $\|z' - z''\| < \varrho$ folgt: $|z' - z''| < \sigma$.*

Fassen wir das Intervall $[a, b]$ einmal als Punktmenge $A \subseteqq \overline{R}_1$, dann als Punktmenge $B \subseteqq R_1$ auf, und ordnen jedem Punkte $x \varepsilon A$ eben diesen Punkt $x \varepsilon B$ zu, so ist dies nach 25·3·2 eine stetige Abbildung von A auf B, die nach 22·2·2 auch gleichmäßig stetig ist. Daraus folgt die Behauptung (vgl. § 23, 4).

Ist $A \subseteqq \overline{R}_1$, so gibt es unter allen $z \varepsilon \overline{R}_1$, die $\geqq x$ (bzw. $\leqq x$) sind für alle $x \varepsilon A$, ein kleinstes (bzw. größtes); es heißt: das Supremum (bzw. das Infimum) von A und wird bezeichnet mit $\sup\limits_{x \varepsilon A} x$ (bzw. $\inf\limits_{x \varepsilon A} x$). Ebenso: ist $((a_n))$ eine Folge aus $\overline{R}_1$, so gibt es unter den $z \varepsilon \overline{R}_1$, die $\geqq a_n$ (bzw. $\leqq a_n$) sind für alle n, ein kleinstes (bzw. größtes); es wird bezeichnet mit $\sup\limits_n a_n$ (bzw. $\inf\limits_n a_n$). Ist $b_n = \sup\limits_\nu a_{n+\nu}$, $c_n = \inf\limits_\nu a_{n+\nu}$, so definieren wir: $\overline{\lim\limits_n}\, a_n = \inf\limits_n b_n$, $\underline{\lim\limits_n}\, a_n = \sup\limits_n c_n$. Damit für eine Punktfolge $((a_n))$ im $\overline{R}_1$ gelte: $\lim\limits_n a_n = a$, ist dann notwendig und hinreichend, daß $\overline{\lim\limits_n}\, a_n = \underline{\lim\limits_n}\, a_n = a$ sei.

25·3·4. *Ist $A \supset A$ abgeschlossen im $\bar{R}_1$ und $a' = \sup\limits_{x \varepsilon A} x$, $a'' = \inf\limits_{x \varepsilon A} x$, so ist $a' \varepsilon A$, $a'' \varepsilon A$.*

Denn es gibt in A eine Folge $((a_n))$ mit $a_n \to a'$; nach **17·3·6** ist also $a' \varepsilon A^0$, und weil A abgeschlossen, ist $A^0 = A$.

Ist $a \varepsilon \bar{R}_1$, $b \varepsilon \bar{R}_1$ und $a < b$, so bezeichnen wir auch die Intervalle $a \leq x \leq b$, $a < x < b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$ mit $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$. Aus **16·1·3** folgt dann:

25·3·5. *Die einzigen zusammenhängenden Mengen des $\bar{R}_1$ sind: A, die Mengen $\{a\}$, die Intervalle (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ des $\bar{R}_1$.*

4. **Reelle Funktionen.** Nach § 1, 5 liefert jede eindeutige Abbildung der Menge A auf eine Menge B eine Funktion f, die jedem Elemente $a \varepsilon A$ ein Element $f(a) \varepsilon B$ zuordnet; die Menge A heißt der Bereich dieser Funktion, und f heißt eine Funktion auf A oder in A. Ist $B \subseteqq \bar{R}_1$, d. h. ist jeder Funktionswert $f(a)$ eine (endliche oder unendliche) reelle Zahl, so heißt f eine reelle Funktion; wo wir weiterhin von einer Funktion schlechtweg sprechen, meinen wir stets eine reelle Funktion. Eine Funktion, die jedem $a \varepsilon A$ dieselbe reelle Zahl zuordnet, nennen wir eine Konstante. Wir beschäftigen uns zunächst nur mit Funktionen, deren Bereich Punktmenge eines metrischen Raumes ist (Punktfunktionen).

Ist f eine Funktion auf A und $C \subseteqq A$, so bezeichnen wir (vgl. § 22, 3) als die auf C eingeschränkte Teilfunktion $C\,1\,f$ diejenige Funktion auf C, die jedem $a \varepsilon C$ den Funktionswert $f(a)$ zuordnet; der Bereich von $C\,1\,f$ ist C.

Die Funktion f auf A heißt endlich, wenn für jedes $a \varepsilon A$ der Funktionswert $f(a)$ eine endliche Zahl ist.

Ist f eine Funktion auf A, so heißen die Zahlen $\sup\limits_{x \varepsilon A} f(x)$, $\inf\limits_{x \varepsilon A} f(x)$ das Supremum, bzw. das Infimum von f. Ist das Supremum (bzw. das Infimum) von f endlich, so heißt f nach oben (bzw. nach unten) beschränkt; ist f sowohl nach oben als nach unten beschränkt, so heißt f beschränkt. Natürlich kann f endlich sein, ohne beschränkt zu sein; Beispiel: sei A die Menge aller $a \neq 0$ des R_1 und $f(a) = \dfrac{1}{a}$.

Wenden wir auf eine Funktion f die Schränkungstransformation an (§ 25, 2), d. h. ersetzen wir jeden Funktionswert $f(a)$ durch $S(f(a))$, so entsteht eine beschränkte Funktion $S(f)$.

Ist f eine Funktion auf A, und gibt es ein $a \varepsilon A$, so daß $f(a) = \sup\limits_{x \varepsilon A} f(x)$ (bzw. $f(a) = \inf\limits_{x \varepsilon A} f(x)$), so sagt man: der Funktionswert $f(a)$ ist absolutes

M a x i m u m (bzw. Minimum) von f; dann ist $f(x) \leq f(a)$ (bzw. $\geq f(a)$) für alle $x \varepsilon A$. Ist $f(x) < f(a)$ bzw. $f(x) > f(a)$ für alle $x \varepsilon A - \{a\}$, so sagt man, der Funktionswert $f(a)$ ist ein e i g e n t l i c h e s absolutes Maximum (bzw. Minimum) von f. Gibt es eine Umgebung U_a, so daß $f(x) \leq f(a)$ (bzw. $\geq f(a)$) für alle $x \varepsilon A\, U_a$, so sagt man: der Funktionswert $f(a)$ ist ein M a x i m u m (bzw. Minimum) von f; gibt es obendrein eine reduzierte Umgebung U'_a (§ 9, 1), so daß $f(x) < f(a)$ (bzw. $f(x) > f(a)$) für alle $x \varepsilon A\, U'_a$, so sagt man: der Funktionswert $f(a)$ ist ein e i g e n t l i c h e s Maximum (bzw. Minimum) von f.

25·4·1. *Ist f eine Funktion auf der separablen Menge A, so gibt es nur abzählbar viele Punkte $a \varepsilon A$, in denen $f(a)$ ein eigentliches Maximum oder Minimum von f ist.*

Sei $K_{a\frac{1}{n}}$ die Kugel (§ 9, 2) vom Mittelpunkt a und Radius $\frac{1}{n}$, und sei A_n die Menge aller $a \varepsilon A$, für die $A\, K_{a\frac{1}{n}}\, 1\, f$ in a ein eigentliches absolutes Maximum hat; für je zwei verschiedene Punkte a, a' von A_n gilt dann: $a\, a' \geq \frac{1}{n}$, die Punkte von A_n bilden also einen isolierten Teil von A, mithin ist A_n abzählbar nach **13·5·91.** Da die Menge A' aller Punkte von A, in denen f ein eigentliches Maximum hat, $= \underset{n}{S}\, A_n$ ist, ist auch A' abzählbar. Ebenso sieht man, daß die Menge aller Punkte von A, in denen f ein eigentliches Minimum hat, abzählbar ist.

5. **Grenzwert.** Sei f eine Funktion auf A, sei $a \varepsilon A^1$, und $b \varepsilon \bar{R}_1$; wir sagen: f hat in a den G r e n z w e r t b, in Zeichen: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ (oder $f(x) \to b$ für $x \to a$), wenn es zu jedem $\delta > 0$ eine reduzierte Umgebung U'_a (§ 9, 1) gibt, so daß $\|f(x) - b\| < \delta$ für alle $x \varepsilon A\, U'_a$.

25·5·1. *Ist f eine Funktion auf A, $a \varepsilon A^1$ und $b \varepsilon R_1$, so ist, damit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ gelte, notwendig und hinreichend, daß es zu jedem $\eta > 0$ eine reduzierte Umgebung U'_a gebe, so daß $|f(x) - b| < \eta$ für alle $x \varepsilon A\, U'_a$.*

N o t w e n d i g: Nach **25·3·3** gibt es zu jedem $\eta > 0$ ein $\delta > 0$, so daß aus $\|f(x) - b\| < \delta$ folgt: $|f(x) - b| < \eta$; und nach Annahme gibt es ein U'_a, so daß aus $x \varepsilon A\, U'_a$ folgt $\|f(x) - b\| < \delta$. H i n r e i c h e n d: Dies folgt aus § 25 (3·1).

25·5·2. *Ist f eine Funktion auf A, so ist, damit f im Punkte $a \varepsilon A^1$ einen Grenzwert habe, notwendig und hinreichend, daß es zu jedem $\delta > 0$ eine Umgebung U'_a gebe, so daß $\|f(x) - f(x')\| < \delta$ für alle $x \varepsilon A\, U'_a$, $x' \varepsilon A\, U'_a$.*

Notwendig: Ist $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, so gibt es ein U'_a, so daß $\|f(x) - b\| < \frac{\delta}{2}$ $\|f(x') - b\| < \frac{\delta}{2}$ für alle $x \varepsilon A\, U'_a$, $x' \varepsilon A\, U'_a$; wegen der Dreiecksungleichung § 25 (3·0) ist dann aber $\|f(x) - f(x')\| < \delta$. Hinreichend: Ist die Bedingung erfüllt, und ist $((a_n))$ eine Folge aus $A - \{a\}$ mit $a_n \to a$, so ist $((f(a_n)))$ eine Cauchysche Folge im $\overline{R}_1$; da der $\overline{R}_1$ nach **25·3·1** vollständig, gibt es also ein $b \varepsilon \overline{R}_1$, so daß $f(a_n) \to b$. Nach Annahme gibt es ein U'_a, so daß $\|f(x) - f(x')\| < \frac{\delta}{2}$ für alle $x \varepsilon A\, U'_a$, $x' \varepsilon A\, U'_a$; wegen $a_n \to a$, $f(a_n) \to b$ gibt es ein n^*, so daß $a_{n^*} \varepsilon U'_a$ und $\|f(a_{n^*}) - b\| < \frac{\delta}{2}$; für alle $x \varepsilon A\, U'_a$ gilt dann: $\|f(x) - b\| \leq \|f(x) - f(a_{n^*})\| + \|f(a_{n^*}) - b\| < \delta$; damit ist die Behauptung bewiesen.

25·5·21. *Ist f eine Funktion auf A und $a \varepsilon A^1$, so ist, damit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ gelte, notwendig und hinreichend, daß für jede Folge $((a_n))$ aus $A - \{a\}$ mit $a_n \to a$ gelte: $f(a_n) \to b$.*

Notwendig: Sei $\delta > 0$; nach Annahme gibt es ein U'_a, so daß $\|f(x) - b\| < \delta$ für alle $x \varepsilon A\, U'_a$; da $a_n \varepsilon A - \{a\}$ und $a_n \to a$, ist $a_n \varepsilon A\, U'_a$ für fast alle n, also $\|f(a_n) - b\| < \delta$ für fast alle n, d. h. $f(a_n) \to b$. Hinreichend: Gilt nicht $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, so gibt es ein $\delta > 0$, so daß in jedem U'_a ein $x \varepsilon A\, U'_a$ mit $\|f(x) - b\| \geq \delta$ vorkommt; insbesondere gibt es also ein $a_n \varepsilon A\, K'_{a\frac{1}{n}}$, so daß $\|f(a_n) - b\| \geq \delta$; dann ist $a_n \varepsilon A - \{a\}$, $a_n \to a$, aber nicht $f(a_n) \to b$.

25·5·3. *Sind $f(x)$, $g(x)$ Funktionen auf A, ist $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, und ist $b + c$ $\left(\text{bzw. } b - c,\ b\,c,\ \frac{b}{c}\right)$ nicht sinnlos, so gibt es ein U'_a, so daß $f(x) + g(x)$ $\left(\text{bzw. } f(x) - g(x),\ f(x)\,g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\right)$ für kein $x \varepsilon A\, U'_a$ sinnlos ist.*

Wir führen den Beweis für $f + g$. Die Behauptung ist sicher richtig, wenn b, c endlich sind, denn dann gibt es ein U'_a, so daß $f(x)$ und $g(x)$ endlich sind für alle $x \varepsilon A\, U'_a$. Sei etwa $b = +\infty$; dann ist $c \neq -\infty$; es gibt dann ein U'_a, so daß $f(x) \neq -\infty$, $g(x) \neq -\infty$ für alle $x \varepsilon A\, U'_a$; dann aber ist $f(x) + g(x)$ für kein $x \varepsilon A\, U'_a$ sinnlos.

In bekannter Weise beweist man nun die Sätze:

25·5·4. *Gilt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, so auch $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |b|$.*

25·5·41. *Sind* $f(x)$, $g(x)$ *Funktionen auf* A, *und ist* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, *so ist* $\lim\limits_{x \to a} \max\bigl(f(x), g(x)\bigr) = \max(b, c)$. $\lim\limits_{x \to a} \min\bigl(f(x), g(x)\bigr) = \min(b, c)$.

25·5·42. *Sind* $f(x)$, $g(x)$ *Funktionen auf* A, *ist* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$ *und ist* $b + c$ $\left(\text{bzw. } b - c,\ b\,c,\ \dfrac{b}{c}\right)$ *nicht sinnlos, so ist* $\lim\limits_{x \to a} \bigl(f(x) + g(x)\bigr) = b + c$ $\left(\text{bzw. } \lim\limits_{x \to a} \bigl(f(x) - g(x)\bigr) = b - c,\ \lim\limits_{x \to a} f(x)\,g(x) = b\,c,\ \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}\right)$.

6. **Stetigkeit in einem Punkte.** Die reelle Funktion f auf A heißt stetig im Punkte $a \varepsilon A$, wenn die Abbildung, die jedem Punkte $x \varepsilon A$ die Zahl $f(x)$ zuordnet, stetig ist im Punkte a; anderenfalls heißt sie unstetig in a. In einem isolierten Punkte ihres Bereiches ist jede Funktion stetig. Ist f stetig im Punkte a, so heißt a ein Stetigkeitspunkt, anderenfalls ein Unstetigkeitspunkt von f.

Sei f eine Funktion auf A, sei $C \subseteqq A$ und $a \varepsilon C$; ist dann f stetig im Punkte a, so ist auch die Teilfunktion $C\,1\,f$ stetig im Punkte a; umgekehrt kann natürlich $C\,1\,f$ stetig sein in a, ohne daß f stetig in a wäre; ist $C\,1\,f$ stetig in a, so sagt man auch: f ist stetig auf C im Punkte a.

25·6·1. *Ist* f *eine Funktion auf* A *und* $a \varepsilon A$, *so ist, damit* f *stetig sei in* a, *notwendig und hinreichend, daß für jede Folge* $((a_n))$ *aus* A *mit* $a_n \to a$ *gelte*: $f(a_n) \to f(a)$.

Dies folgt aus **23·1·21.**

25·6·2. *Ist* f *eine Funktion auf* A *und* $a \varepsilon A_h$, *so ist, damit* f *stetig sei in* a, *notwendig und hinreichend, daß* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ *sei.*

Dies folgt, da nach § 12 (2·1) $A_h \subseteqq A^1$, aus **25·6·1** und **25·5·21.**

25·6·21. *Ist* f *eine Funktion auf* A *und* $a \varepsilon A$, *so ist, damit* f *stetig sei in* a, *notwendig und hinreichend, daß es zu jedem* $\delta > 0$ *eine Umgebung* U_a *gebe, so daß* $\|f(x) - f(a)\| < \delta$ (*oder, wenn* $f(a)$ *endlich, so daß* $|f(x) - f(a)| < \delta$) *für alle* $x \varepsilon A\,U_a$.

Das ist trivial, wenn $a \varepsilon A - A_h$, d. h. wenn a ein isolierter Punkt von A ist; es folgt, wenn $a \varepsilon A_h$, aus **25·6·2** (bzw. aus **25·6·2** und **25·5·1**).

Sind f und g Funktionen auf A, so besteht der Bereich von $f + g$ aus allen Punkten $a \varepsilon A$, für die $f(a) + g(a)$ nicht sinnlos ist (§ 25, 1). Analoges gilt für $f - g$, $f\,g$, $\dfrac{f}{g}$.

25·6·3. *Sind f und g Funktionen auf A, ist B der Bereich von $f+g$ $\left(\text{bzw. von } f-g,\ fg,\ \frac{f}{g}\right)$, ist $a \varepsilon B$, und sind f und g stetig in a, so gibt es eine Umgebung U_a, so daß $A\,U_a \subseteqq B$.*

Dies folgt aus 25·6·2 und 25·5·3.

Aus 25·6·2 und 25·5·4, 25·5·41, 25·5·42 folgen die Sätze:

25·6·4. *Ist $f(x)$ stetig in a, so auch $|f(x)|$.*

25·6·41. *Sind f, g Funktionen auf A, die stetig sind in a, so sind auch die Funktionen* $\max(f(x), g(x))$, $\min(f(x), g(x))$ *stetig in a.*

25·6·42. *Sind f, g Funktionen auf A, ist B der Bereich von $f+g$ $\left(\text{bzw. von } f-g,\ fg,\ \frac{f}{g}\right)$, ist $a \varepsilon B$ und sind f und g stetig in a, so ist auch $f+g$ $\left(\text{bzw. } f-g,\ fg,\ \frac{f}{g}\right)$ stetig in a.*

Sei f eine Funktion auf A, sei B die Menge aller $f(x)$ $(x \varepsilon A)$, und sei g eine Funktion, deren Bereich $\supseteqq B$ ist; dann ist $g(f(x))$ eine Funktion auf A; sie heißt die aus f und g zusammengesetzte Funktion. Für sie gilt:

25·6·5. *Ist f stetig im Punkte $a \varepsilon A$, und ist $B \,\rceil\, g$ stetig im Punkte $f(a) \varepsilon B$, so ist auch die zusammengesetzte Funktion $g(f(x))$ stetig im Punkte a.*

Dies folgt unmittelbar aus 22·1·4.

7. **Stetige Funktionen.** Ist A der Bereich der Funktion f, und ist f stetig in jedem Punkte $a \varepsilon A$, so heißt die Funktion f stetig (oder ausführlicher: eine stetige Funktion auf A). Jede Funktion f, deren Bereich eine isolierte Menge ist (§ 12, 3), ist stetig. Ist $C \subseteqq A$, und ist die Funktion $C \,\rceil\, f$ stetig, so heißt f stetig auf C. Ist A der Bereich von f, ist $C \subseteqq A$ und f stetig, so ist auch $C \,\rceil\, f$ stetig, d. h. f ist stetig auf C.

Ordnet die Funktion $f(x)$ auf A jedem $x \varepsilon A$ denselben Funktionswert c zu, so ist sie stetig; d. h.: jede konstante Funktion ist stetig.

Ist E ein metrischer Raum, $b \varepsilon E$, $B \subseteqq E$, so sind die Abstände xb, xB Funktionen, deren Bereich E ist; zufolge 25·6·1 und 17·3·31 gilt von ihnen:

25·7·1. *Die Funktionen xb und xB sind stetig.*

25·7·2. *Ist der Bereich A der stetigen Funktion f in sich kompakt, so ist auch die Menge M aller Werte $f(x)$ $(x \varepsilon A)$ in sich kompakt*[1]).

Dies folgt aus 23·3·1.

---

[1]) Dabei ist es, wenn f endlich ist, gleichgültig, ob M als Menge im $\overline{R}_1$ oder im R_1 aufgefaßt wird.

25·7·21. *Ist der Bereich A der stetigen Funktion f in sich kompakt, so gibt es einen Punkt $a' \varepsilon A$, in dem $f(a')$ ein absolutes Maximum, und einen Punkt $a'' \varepsilon A$, in dem $f(a'')$ ein absolutes Minimum ist.*

Dies folgt aus 25·3·4, denn nach 25·7·2 ist die Menge M aller Werte $f(x)$ $(x \varepsilon A)$ in sich kompakt, also nach 15·2·22 auch abgeschlossen.

25·7·22. *Damit auf der Menge A jede stetige, endliche Funktion beschränkt sei, ist notwendig und hinreichend, daß A in sich kompakt sei.*

Notwendig: Ist A nicht in sich kompakt, so gibt es einen unendlichen Teil $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ von A, der keinen Häufungspunkt εA besitzt; dann gibt es zu jedem a_n ein positives $\varrho_n < \frac{1}{n}$, so daß die Kugeln $K_{a_n \varrho_n}$ disjunkt sind; wir setzen $B = A - \underset{n}{S} K_{a_n \varrho_n}$ und definieren eine Funktion f auf A durch: $f(x) = 0$ für $x \varepsilon B$; $f(x) = n\left(1 - \frac{x a_n}{\varrho_n}\right)$ für $x \varepsilon A\, K_{a_n \varrho_n}$; dann ist f endlich, aber nicht beschränkt, da $f(a_n) = n$. Es ist noch zu zeigen, daß f stetig in jedem Punkte $a \varepsilon A$. Das folgt aus 35·7·1 wenn $a \varepsilon K_{a_n \varrho_n}$. Sei also $a \sim\varepsilon K_{a_n \varrho_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, d. h. $a \varepsilon B$. Dann ist $f(a) = 0$; nach 25·6·1 ist also zu zeigen: für jede Folge $((b_\nu))$ aus A mit $b_\nu \to a$ gilt $f(b_\nu) \to 0$. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein $\delta > 0$ und eine Teilfolge $((b_{\nu_i}))$, so daß $f(b_{\nu_i}) \geq \delta$ für alle i; wegen $f(b_{\nu_i}) > 0$ liegt jeder Punkt b_{ν_i} in einer der Kugeln $K_{a_n \varrho_n}$; wegen $f(b_{\nu_i}) \geq \delta$, $b_{\nu_i} \to a$ und $a \sim\varepsilon K_{a_n \varrho_n}$ kann aber keine der Kugeln $K_{a_n \varrho_n}$ unendlich viele b_{ν_i} enthalten; unter den b_{ν_i} müssen also Punkte aus unendlich vielen verschiedenen $K_{a_n \varrho_n}$ vorkommen; wegen $b_\nu \to a$, $\varrho_n < \frac{1}{n}$ wäre aber dann a Häufungspunkt der Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, was unmöglich, da diese Menge keinen Häufungspunkt εA besitzt. Hinreichend: Dies ist enthalten in 25·7·21.

Aus 22·2·1 entnehmen wir:

25·7·3. *Ist A der Bereich von f, ist A' ein in sich kompakter Teil von A und ist f stetig in jedem Punkte $x \varepsilon A'$, so gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $\sigma > 0$, so daß für je zwei Punkte $a \varepsilon A$ und $a' \varepsilon A'$ mit $a a' < \sigma$ die Ungleichung gilt $\|f(a) - f(a')\| < \delta$.*

Die Funktion f auf A heißt gleichmäßig stetig (vgl. § 23, 4), wenn es zu jedem $\delta > 0$ ein $\sigma > 0$ gibt, so daß für je zwei Punkte $a \varepsilon A$, $a' \varepsilon A$ mit $a a' < \sigma$ gilt: $\|f(a) - f(a')\| < \delta$; ist f beschränkt, so kann es nach 25·3·3 statt dessen heißen: $|f(a) - f(a')| < \delta$.

25·7·31. *Damit jede stetige Funktion auf A gleichmäßig stetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß A in sich kompakt sei.*

Notwendig: Dies zeigt die beim Beweise von 25·7·22 konstruierte Funktion $f(x)$. Hinreichend: Dies folgt aus 25·7·3.

Die Funktion f auf A heißt eine Darbouxsche Funktion[1]), wenn es zu je zwei Punkten $a_1 \varepsilon A$, $a_2 \varepsilon A$ mit $f(a_1) < f(a_2)$ und zu jedem der Ungleichung $f(a_1) < y < f(a_2)$ genügenden y ein $a \varepsilon A$ mit $f(a) = y$ gibt; d. h. (wegen 25·3·5), wenn die Menge aller Funktionswerte $f(x)$ $(x \varepsilon A)$ zusammenhängend ist.

25·7·4. *Damit jede stetige Funktion auf A eine Darbouxsche Funktion sei, ist notwendig und hinreichend, daß A zusammenhängend sei.*

Notwendig: Ist A unzusammenhängend, so gibt es nach 16·1·1 eine Zerlegung $A = A_1 + A_2$ in zwei fremde Summanden, die beide $\supset A$ und offen in A sind. Setzen wir $f = 0$ auf A_1, $f = 1$ auf A_2, so ist f eine stetige Funktion auf A, aber keine Darbouxsche Funktion. Hinreichend: Nach 23·5·1 ist die Menge M aller $f(x)$ $(x \varepsilon A)$ zusammenhängend.

Ein Beispiel einer Darbouxschen Funktion im R_1, die nicht stetig ist, liefert die durch $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$, $f(0) = 0$ definierte Funktion, die im Punkte 0 unstetig ist. Es gibt sogar im R_1 Darbouxsche Funktionen, die in jedem Intervalle $[a, b]$ jeden beliebigen Wert $z \varepsilon R_1$ annehmen (mithin in keinem Punkte stetig sind); man zerlege, um eine solche Funktion zu erhalten, den R_1 in $\aleph$ fremde, im R_1 dichte Summanden, ordne in ein-eindeutiger Weise jedem $z \varepsilon R_1$ einen dieser Summanden M_z zu, und setze $f(x) = z$ für $x \varepsilon M_z$. Eine solche Zerlegung des R_1 in $\aleph$ fremde dichte Summanden erhält man z. B. in folgender Weise: wir ordnen jeder dyadischen Folge $d = ((k_\nu))$ (§ 18, 7) die Menge A_d aller in der Form $g + \sum_\nu \frac{k_\nu}{2^{2\nu-1}}$ oder $g + \frac{g_1}{2} + \frac{g_2}{2^2} + \ldots + \frac{g_{2n}}{2^{2n}} + \sum_\nu \frac{k_\nu}{2^{2n+2\nu-1}}$ darstellbaren Zahlen zu, wo g eine ganze Zahl, $g_1, g_2, \ldots, g_{2n-1}$ eine der beiden Zahlen 0, 1 bedeutet und $g_{2n} = 1$ ist; jede dieser Mengen A_d ist dicht im R_1 und verschiedenen dyadischen Folgen d entsprechen fremde Mengen A_d; auch die Menge A aller $x \varepsilon R_1$, die zu keiner Menge A_d gehören, ist dicht im R_1; da es nach 5·2·2 $\aleph$ dyadische Folgen gibt, liefern die Mengen A_d zusammen mit A eine Zerlegung des R_1 in $\aleph$ fremde, im R_1 dichte Summanden.

25·7·5. *Ist f eine stetige Funktion auf A, und ist C dicht in A, so ist die Funktion f durch ihre Teilfunktion $C \rceil f$ völlig bestimmt.*

---

[1]) Abweichend hiervon bezeichnen manche Autoren eine Funktion f auf A als Darbouxsche Funktion, wenn $A' \rceil f$ für jeden zusammenhängenden Teil A' von A eine Darbouxsche Funktion im Sinne des Textes ist. Wie aus 25·7·4 hervorgeht, ist jede stetige Funktion in diesem Sinne eine Darbouxsche Funktion.

Dies ist ein Spezialfall von 22·3·1.

25·7·6. *Ist A separabel, so hat die Menge $\mathfrak{S}$ aller stetigen Funktionen auf A die Mächtigkeit $\aleph$.*

Da jede konstante Funktion stetig ist, hat $\mathfrak{S}$ mindestens die Mächtigkeit $\aleph$. Da A separabel, gibt es nach **13·1·3** einen abzählbaren in A dichten Teil C; da nach § 5 (2·0): $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$ ist, hat nach **4·3·2** die Menge aller Funktionen auf C die Mächtigkeit $\aleph$, also hat nach **25·7·5** $\mathfrak{S}$ auch höchstens die Mächtigkeit $\aleph$.

Literatur: Satz **25·7·4** ist bekannt als „Zwischenwertsatz"; er wurde zuerst exakt von B. Bolzano (1817) bewiesen. Daß es auch unstetige Funktionen gibt, für die der Zwischenwertsatz gilt, hat G. Darboux betont (Ann. Éc. Norm. (2) 4 (1875) S. 109); obiges Beispiel stammt von H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration S. 90. Über Darbouxsche Funktionen: C. H. Rowe, Am. Bull. 32 (1926) S. 285. Th. Radaković, Monatsh. f. Math. u. Phys. 38 (1931) S. 117; 39 (1932) S. 229.

8. **Urbildmengen.** Sei f eine Funktion auf A. Wir bezeichnen (§ 1, 3) mit $[f(\hat{x}) > a]$ die Menge aller $x \varepsilon A$, für die $f(x) > a$ gilt, und analoge Bedeutung haben die Symbole $[f(\hat{x}) < a]$, $[f(\hat{x}) = a]$, $[a < f(\hat{x}) < b]$ usf.

25·8·1. *Ist f eine stetige Funktion auf A, so sind für jedes $y \varepsilon \bar{R}_1$ die Mengen $[f(\hat{x}) > y]$ und $[f(\hat{x}) < y]$ offen in A, die Mengen $[f(\hat{x}) \geq y]$ und $[f(\hat{x}) \leq y]$ abgeschlossen in A.*

Da die Menge aller $z > y$, sowie die Menge aller $z < y$ offen (und die Menge aller $z \geq y$, sowie die Menge aller $z \leq y$ abgeschlossen) im $\bar{R}_1$ ist, folgt dies aus 23·2·1 und 23·2·11.

25·8·11. *Ist f eine Funktion auf A, ist die Menge M dicht im $\bar{R}_1$, und sind für jedes $z \varepsilon M$ die Mengen $[f(\hat{x}) > z]$ und $[f(\hat{x}) < z]$ offen in A, so ist f stetig.*

Sei $a \varepsilon A$ und $y^* < f(a)$; dann gibt es ein $z^* \varepsilon M$, so daß $y^* < z^* < f(a)$; dann ist $a \varepsilon [f(\hat{x}) > z^*]$, und da diese Menge offen in A, gibt es eine Umgebung U_a^*, so daß $A\, U_a^* \subseteqq [f(\hat{x}) > z^*]$; dann ist $f(x) > y^*$ für alle $x \varepsilon A\, U_a^*$. Ebenso gibt es zu jedem $y^{**} > f(a)$ ein U_a^{**}, so daß $f(x) < y^{**}$ für alle $x \varepsilon A\, U_a^{**}$. Setzen wir $U_a = U_a^* U_a^{**}$, so ist also $y^* < f(x) < y^{**}$ für $x \varepsilon A\, U_a$. Daraus folgt: zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein U_a, so daß $\| f(x) - f(a) \| < \delta$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$. Also ist f stetig nach 25·6·21.

25·8·12. *Ist f eine Funktion auf A, ist die Menge M dicht im $\bar{R}_1$, und sind für jedes $z \varepsilon M$ die Mengen $[f(\hat{x}) \geq z]$ und $[f(\hat{x}) \leq z]$ abgeschlossen in A, so ist f stetig.*

Da $[f(\hat{x}) \geq z] = A - [f(\hat{x}) < z]$, ist die Menge $[f(\hat{x}) < z]$ offen in A, ebenso die Menge $[f(\hat{x}) > z]$; die Behauptung folgt also aus 25·8·11.

25·8·13. *Ist f eine stetige Funktion auf A, so ist für jedes $a \varepsilon \overline{R}_1$ die Menge $[f(\acute{x}) = a]$ abgeschlossen in A.*

Dies folgt wegen $[f(\acute{x}) = a] = [f(\acute{x}) \geq a]\,[f(\acute{x}) \leq a]$ aus 25·8·1.

Die Umkehrung von 25·8·13 gilt nicht. Beispiel im R_1: $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

25·8·14. *Ist B offen in A, so gibt es eine stetige Funktion f auf A, so daß $[f(\acute{x}) > 0] = B$ (bzw. $[f(\acute{x}) < 0] = B$) und $[f(\acute{x}) = 0] = A - B$.*

Dies ist trivial, wenn $B = A$. Sei also $B \subset A$; setzen wir $A - B = C$, so ist $C \supset A$ und abgeschlossen in A, und die nach 25·7·1 stetige Funktion $f(x) = x\,C$ (bzw. $f(x) = -\,x\,C$) leistet zufolge 10·5·62 das Verlangte.

25·8·2. *Ist $A = \underset{\nu}{S}\, A_\nu$, wo die A_ν offen in A, ist f eine Funktion auf A, und ist $A_\nu \operatorname{l} f$ stetig für alle ν, so ist auch f stetig.*

Setzen wir $A_\nu \operatorname{l} f = f_\nu$, so ist $[f(\acute{x}) > y] = \underset{\nu}{S}\,[f_\nu(\acute{x}) > y]$; weil f_ν eine stetige Funktion auf A_ν, ist hierin nach 25·8·1 $[f_\nu(\acute{x}) > y]$ offen in A_ν, und weil A_ν offen in A, ist auch $[f_\nu(\acute{x}) > y]$ offen in A, also nach 10·1·2 auch $[f(\acute{x}) > y]$ offen in A, also ist f stetig nach 25·8·11.

25·8·21. *Ist $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, wo A_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ abgeschlossen in A, und ist $A_\nu \operatorname{l} f$ stetig $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, so ist auch f stetig.*

Setzen wir $A_\nu \operatorname{l} f = f_\nu$, so ist $[f(\acute{x}) \geq y] = \overset{n}{\underset{\nu=1}{S}}\,[f_\nu(\acute{x}) \geq y]$; hierin ist $[f_\nu(\acute{x}) \geq y]$ nach 25·8·1 abgeschlossen in A_ν, also auch in A; nach 10·2·1 ist also auch $[f(\acute{x}) \geq y]$ abgeschlossen in A, also ist f stetig nach 25·8·12.

§ 26. Unstetige Funktionen.

1. Die Hülle einer Funktion. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteqq X$ und f eine reelle Funktion auf A. Zu jedem Punkte $a \varepsilon A^0$ bilden wir die Menge aller $y \varepsilon \overline{R}_1$, zu denen es eine Folge $((a_n))$ aus A mit $a_n \to a$ und $f(a_n) \to y$ gibt; diese Menge nennen wir die H ü l l e v o n f i n a und bezeichnen sie mit $P_f^0(a)$, oder, wenn kein Zweifel bestehen kann, mit $P^0(a)$. Ist $a \varepsilon A$ und setzen wir $a_n = a$, $f(a_n) = f(a)$, so gilt $a_n \to a$, $f(a_n) \to f(a)$; für jedes $a \varepsilon A$ gilt also $f(a) \varepsilon P^0(a)$. Für jeden isolierten Punkt a von A ist $P^0(a) = \{f(a)\}$.

26·1·1. *Ist $a \varepsilon A^0$, $a_n \varepsilon A$, $a_n \to a$ und ist b Häufungspunkt der Folge $((f(a_n)))$, so ist $b \varepsilon P^0(a)$.*

Denn nach 17·3·53 gibt es eine Teilfolge $((a_{n_\nu}))$, so daß $f(a_{n_\nu}) \to b$.

26·1·11. *Ist $a \varepsilon A^0$, $b \varepsilon \overline{R}_1$, so ist, damit $b \varepsilon P^0(a)$ sei, notwendig und hinreichend, daß es zu jeder Umgebung U_a und jeder Umgebung U_b ein $x \varepsilon A\,U_a$ mit $f(x) \varepsilon U_b$ gebe.*

Notwendig: Ist $b \varepsilon P^0(a)$, so gibt es in A eine Folge $((a_n))$ mit $a_n \to a$, $f(a_n) \to b$; dann ist $a_n \varepsilon A\, U_a$, $f(a_n) \varepsilon U_b$ für fast alle n. Hinreichend: Nach Annahme gibt es ein $a_n \varepsilon A\, K_{a\frac{1}{n}}$, so daß $f(a_n) \varepsilon K_{b\frac{1}{n}}$; dann aber gilt $a_n \to a$, $f(a_n) \to b$, mithin $b \varepsilon P^0(a)$.

26·1·2. *Die Menge $P^0(a)$ ist abgeschlossen im $\overline{R}_1$.*

Sei $b \varepsilon (P^0(a))^0$; wir haben zu zeigen: dann ist auch $b \varepsilon P^0(a)$. Nach **10·5·4** gibt es in jeder Umgebung U_b ein $b' \varepsilon P^0(a)$; da U_b auch eine Umgebung $U_{b'}$ ist, gibt es nach **26·1·11** in jeder Umgebung U_a ein $x \varepsilon A\, U_a$ mit $f(x) \varepsilon U_b$, also gilt nach **26·1·11** $b \varepsilon P^0(a)$, w. z. b. w.

Machen wir Gebrauch von der Abweichung $e(M, M')$ zweier Mengen (§ 9, 6), so gilt:

26·1·3. *Sind f und g Funktionen auf A, und gibt es eine Umgebung U_a des Punktes $a \varepsilon A^0$, so daß $\| f(x) - g(x) \| \leq k$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$, so ist $e(P_f^0(a), P_g^0(a)) \leq k$.*

Sei $b \varepsilon P_f^0(a)$; dann gibt es in A eine Folge $((a_n))$ mit $a_n \to a$, $f(a_n) \to b$; die Folge $((g(a_n)))$ hat, da der $\overline{R}_1$ in sich kompakt ist, mindestens einen Häufungspunkt c, und nach **26·1·1** ist $c \varepsilon P_g^0(a)$. Nach Annahme ist $\| f(a_n) - g(a_n) \| \leq k$ für fast alle n; aus § 25 (3·2) folgt also auch $\| b - c \| \leq k$; zu jedem $b \varepsilon P_f^0(a)$ gibt es also ein $c \varepsilon P_g^0(a)$ mit $\| b - c \| \leq k$; somit ist, wenn wir $P_f^0(a) = B$, $P_g^0(a) = C$ setzen: $\sup\limits_{b \varepsilon B} b\, C \leq k$. Ebenso zeigt man: $\sup\limits_{c \varepsilon C} c\, B \leq k$; also ist auch $e(B, C) \leq k$, d. h. $e(P_f^0(a), P_g^0(a)) \leq k$.

26·1·4. *Sei A kompakt, f eine Funktion auf A, und B die Menge aller Funktionswerte $f(a)$ $(a \varepsilon A)$; dann gibt es zu jedem $b \varepsilon B^0$ ein $a \varepsilon A^0$, so daß $b \varepsilon P^0(a)$.*

Nach **17·3·6** gibt es in B eine Folge $((b_n))$ mit $b_n \to b$; sei $b_n = f(a_n)$; da A kompakt, hat nach **17·2·3** $((a_n))$ einen Häufungspunkt $a \varepsilon A^0$; in $((a_n))$ gibt es eine Teilfolge $((a_{n_\nu}))$ mit $a_{n_\nu} \to a$; wegen $b_n \to b$ ist auch $b_{n_\nu} \to b$, d. h. $f(a_{n_\nu}) \to b$, also ist $b \varepsilon P^0(a)$.

Ordnen wir jedem $x \varepsilon A^0$ jedes $y \varepsilon P_f^0(x)$ zu, so entsteht eine Abbildung von A^0 auf eine Punktmenge des $\overline{R}_1$; diese Abbildung bezeichnen wir mit P_f^0 (oder P^0); dann ist die Relation $x\, P_f^0\, y$ gleichbedeutend mit $y \varepsilon P_f^0(x)$.

26·1·5. *Die Abbildung P_f^0 von A^0 ist oberhalb stetig.*

Da der $\overline{R}_1$ in sich kompakt ist, genügt es nach **21·2·21**, zu zeigen: Ist $a \varepsilon A^0$ und $((a_n))$ eine Punktfolge aus A^0 mit $a_n \to a$, so ist $\overline{\lim\limits_n}\, P^0(a_n) \subseteqq P^0(a)$. Sei $b \varepsilon \overline{\lim\limits_n}\, P^0(a_n)$; dann gibt es nach **17·3·521** eine Indizesfolge $((n_\nu))$ und ein $b_{n_\nu} \varepsilon P^0(a_{n_\nu})$, so daß $b_{n_\nu} \to b$; nach **26·1·11** gibt es ein $a'_{n_\nu} \varepsilon A$, so daß

$a'_{n_\nu} a_{n_\nu} < \frac{1}{\nu}$, $\|f(a'_{n_\nu}) - b_{n_\nu}\| < \frac{1}{\nu}$; dann ist auch $a'_{n_\nu} \to a$, $f(a'_{n_\nu}) \to b$, also ist $b \varepsilon P^0(a)$. Aus $b \varepsilon \overline{\lim_n}\, P^0(a_n)$ folgt also $b \varepsilon P^0(a)$; d. h. es ist $\overline{\lim_n}\, P^0(a_n) \subseteqq P^0(a)$, w. z. b. w.

2. **Die Schrankenfunktionen.** Sei wieder X ein metrischer Raum, $A \subseteqq X$, f eine reelle Funktion auf A; sei $a \varepsilon A^0$ und $P^0(a)$ die Hülle von f in a. Da $P^0(a)$ nach 26·1·2 abgeschlossen, gibt es nach 25·3·4 unter den Zahlen von $P^0(a)$ eine größte und eine kleinste; wir bezeichnen sie mit $\bar f(a)$ bzw. $\underline{f}(a)$, und nennen sie die *obere* bzw. *untere Schranke von f in a*; es sind $\bar f$ und $\underline{f}$ Funktionen auf A^0, die wir als die *obere* bzw. *untere Schrankenfunktion von f* bezeichnen. Da $f(a) \varepsilon P^0(a)$ war für $a \varepsilon A$, so ist $\underline{f}(a) \leq f(a) \leq \bar f(a)$ für $a \varepsilon A$. Für jeden isolierten Punkt a von A ist $\bar f(a) = f(a) = \underline{f}(a)$.

26·2·1. *Ist $a \varepsilon A^0$ und $((U_{na}))$ eine sich auf a zusammenziehende Umgebungsfolge* (§ 13, 1), *so ist:* $\bar f(a) = \lim\limits_n \sup\limits_{x \varepsilon A U_{na}} f(x)$; $\underline{f}(a) = \lim\limits_n \inf\limits_{x \varepsilon A U_{na}} f(x)$.

Wir setzen $\sup\limits_{x \varepsilon A U_{na}} f(x) = g_n$. Ist $p < \bar f(a)$, so gibt es nach 26·1·11 ein $x \varepsilon A U_{na}$ mit $f(x) > p$; also ist $g_n \geq \bar f(a)$ für alle n; also ist $\underline{\lim_n}\, g_n \geq \bar f(a)$. Bleibt zu zeigen, daß auch $\overline{\lim_n}\, g_n \leq \bar f(a)$. Sei $q > \bar f(a)$; die Menge H aller $z \varepsilon \bar R_1$ mit $z < q$ ist offen im $\bar R_1$ und es ist $P^0(a) \subseteqq H$; aus 26·1·5 folgt also: es gibt eine Umgebung U_a, so daß $P^0(x) \subseteqq H$ für alle $x \varepsilon A U_a$; wegen $f(x) \varepsilon P^0(x)$ ist dann $f(x) < q$ für alle $x \varepsilon A U_a$; da $U_{na} \subseteqq U_a$ für fast alle n, ist also $g_n \leq q$ für fast alle n, und mithin $\overline{\lim_n}\, g_n \leq \bar f(a)$, w. z. b. w.

Aus 26·2·1 folgt unmittelbar:

26·2·11. *Ist $a \varepsilon A^0$, so gibt es zu jedem $z > \bar f(a)$ (bzw. $z < \underline{f}(a)$) eine Umgebung U_a, so daß $f(x) < z$ (bzw. $f(x) > z$) für alle $x \varepsilon A U_a$; und zu jedem $z < \bar f(a)$ (bzw. $z > \underline{f}(a)$) gibt es in jeder Umgebung U_a ein $x \varepsilon A$ mit $f(x) > z$ (bzw. $f(x) < z$).*

26·2·2. *Für jede in X offene Menge G, für die $A G \supset \Lambda$, ist:*
$\sup\limits_{x \varepsilon A G} f(x) = \sup\limits_{x \varepsilon A^0 G} \bar f(x)$, $\inf\limits_{x \varepsilon A G} f(x) = \inf\limits_{x \varepsilon A^0 G} \underline{f}(x)$.

Wir setzen $\sup\limits_{x \varepsilon A^0 G} \bar f(x) = g$. Es gibt in $A^0 G$ eine Folge $((x_n))$, so daß $\bar f(x_n) \to g$; da G offen, gibt es nach 26·1·11 ein $x'_n \varepsilon A G$, so daß

$\|f(x_n') - \bar f(x_n)\| < \frac{1}{n}$; also ist $\sup\limits_{x \varepsilon A G} f(x) \geq g$. Da aber $f(x) \leq f(x)$ für alle $x \varepsilon A$, ist auch $\sup\limits_{x \varepsilon A G} f(x) \leq g$. Also ist $\sup\limits_{x \varepsilon A G} f(x) = g$, w. z. b. w.

26·2·3. *Ist A kompakt, so gibt es ein $a' \varepsilon A^0$ und ein $a'' \varepsilon A^0$, so daß $\bar f(a') = \sup\limits_{x \varepsilon A} f(x)$, $\underline{f}(a'') = \inf\limits_{x \varepsilon A} f(x)$.*

Wir setzen $\sup\limits_{x \varepsilon A} f(x) = g$. Bezeichnen wir mit B die Menge aller Funktionswerte $f(x)$ $(x \varepsilon A)$, so ist $g \varepsilon B^0$; also gibt es nach **26·1·4** ein $a' \varepsilon A^0$, so daß $g \varepsilon P^0(a')$; dann aber ist g die größte Zahl in $P^0(a')$, also $\bar f(a') = g$.

26·2·4. *Damit f stetig sei im Punkte $a \varepsilon A$, ist notwendig und hinreichend, daß $\bar f(a) = \underline{f}(a)$ $(= f(a))$ sei.*

Denn $\bar f(a) = \underline{f}(a)$ ist gleichbedeutend mit $P^0(a) = \{f(a)\}$; d. h. für jede Folge $((a_n))$ aus A mit $a_n \to a$ gilt $f(a_n) \to f(a)$; die Behauptung folgt also aus **25·6·1.**

3. Die Schwankung. Ist f eine Funktion auf A, ist g das Supremum, h das Infimum von f (§ 25, 4), so heißt die Zahl $\omega_f(A) = \|g - h\|$ die Schwankung von f. Ist $A' \subseteq A$, so heißt die Schwankung von $A' \rceil f$ die Schwankung von f auf A'; sie ist $\leq \omega_f(A)$. Ist $a \varepsilon A^0$, so heißt die Zahl $\omega_f(a) = \|\bar f(a) - \underline{f}(a)\|$ die Schwankung von f in a; es ist $\omega_f(a)$ eine Funktion auf A^0, die wir als die Schwankungsfunktion von f bezeichnen; wo kein Zweifel möglich ist, schreiben wir $\omega(a)$ statt $\omega_f(a)$. In jedem isolierten Punkte a von A ist $\omega(a) = 0$.

26·3·1. *Ist $a \varepsilon A^0$, ist $((U_{na}))$ eine sich auf a zusammenziehende Umgebungsfolge, und ist ω_n die Schwankung von f auf $A\,U_{na}$, so ist $\omega(a) = \lim\limits_n \omega_n$.*

Dies folgt wegen § 25 (3·2) aus **26·2·1.**

26·3·11. *Ist $a \varepsilon A^0$, so gibt es zu jedem $z > \omega(a)$ eine Umgebung U_a, so daß $\|f(x) - f(x')\| < z$ für alle $x \varepsilon A\,U_a$, $x' \varepsilon A\,U_a$; und zu jedem $z < \omega(a)$ gibt es in jeder Umgebung U_a ein $x' \varepsilon A\,U_a$ und ein $x'' \varepsilon A\,U_a$, so daß $\|f(x') - f(x'')\| > z$.*

Dies folgt aus **26·3·1.**

26·3·12. *Ist $a \varepsilon A$, so gibt es zu jedem $z < \omega(a)$ und zu jeder Umgebung U_a ein $x \varepsilon A\,U_a$, so daß $\|f(x) - f(a)\| > \frac{z}{2}$.*

Denn anderenfalls wäre für alle $x' \varepsilon A\,U_a$, $x'' \varepsilon A\,U_a$:

$$\|f(x') - f(a)\| \leq \frac{z}{2}, \quad \|f(x'') - f(a)\| \leq \frac{z}{2}, \text{ also } \|f(x') - f(x'')\| \leq z,$$

im Widerspruche mit **26·3·11.**

26·3·2. *Damit f stetig sei im Punkte $a \varepsilon A$, ist notwendig und hinreichend, daß $\omega(a) = 0$.*

Dies folgt aus **26·2·4.**

26·3·3. *Ist A' ein in sich kompakter Teil von A, und ist $\omega(x) \leq k$ für alle $x \varepsilon A'$, so gibt es zu jedem $z > k$ ein $\sigma > 0$, so daß für je zwei Punkte $a \varepsilon A$, $a' \varepsilon A'$ mit $a a' < \sigma$ die Ungleichung gilt: $\|f(a) - f(a')\| < z$.*

Anderenfalls gäbe es ein $z > k$, ein $a_n \varepsilon A$ und ein $a'_n \varepsilon A'$, so daß $a_n a'_n < \frac{1}{n}$, $\|f(a_n) - f(a'_n)\| \geq z$. Da A' in sich kompakt, hat $((a'_n))$ einen Häufungspunkt $a \varepsilon A'$, und es gibt eine Teilfolge $((a'_{n_\nu}))$ mit $a'_{n_\nu} \to a$; wegen $a_n a'_n < \frac{1}{n}$ ist dann auch $a_{n_\nu} \to a$. Nach Annahme ist $\omega(a) \leq k < z$, also gibt es nach **26·3·11** eine Umgebung U_a, so daß $\|f(x) - f(x')\| < z$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$, $x' \varepsilon A\, U_a$; da $a_{n_\nu} \varepsilon A\, U_a$, $a'_{n_\nu} \varepsilon A\, U_a$ für fast alle ν, steht dies in Widerspruch mit $\|f(a_n) - f(a'_n)\| \geq z$.

26·3·31. *Ist A in sich kompakt und ist $\omega(x) \leq k$ für alle $x \varepsilon A$, so gibt es zu jedem $z > k$ ein $\sigma > 0$, so daß für je zwei Punkte $a \varepsilon A$, $a' \varepsilon A$ mit $a a' < \sigma$ die Ungleichung gilt: $\|f(a) - f(a')\| < z$.*

Dies folgt aus **26·3·3** für $A' = A$.

Die Sätze **26·3·3**, **26·3·31** enthalten (für $k = 0$) die Sätze **25·7·3**, **25·7·31.**

26·3·4. *Für jedes k ist die Menge aller $a \varepsilon A^0$ mit $\omega(a) \geq k$ abgeschlossen.*

Sei B diese Menge und $b \varepsilon B^0$. In jeder Umgebung U_b gibt es ein $a \varepsilon B$; da U_b auch eine Umgebung von a ist, gibt es nach **26·3·11** in U_b zu jedem $z < k$ zwei Punkte x, x' von A, für die $\|f(x) - f(x')\| > z$; nach **26·3·11** ist also $\omega(b) \geq k$, d. h. es ist $b \varepsilon B$. Aus $b \varepsilon B^0$ folgt also $b \varepsilon B$, somit ist B abgeschlossen.

26·3·41. *Für jedes k ist die Menge aller $a \varepsilon A$ mit $\omega(a) \geq k$ abgeschlossen in A, und wenn $k > 0$ ist, auch abgeschlossen in A_h.*

Seien B und B' die Menge aller $x \varepsilon A^0$, bzw. aller $x \varepsilon A$ mit $\omega(x) \geq k$. Da $B' = A\, B$ und nach **26·3·4** B abgeschlossen, ist B' abgeschlossen in A. Ist $k > 0$, so ist, da $\omega(x) = 0$ für alle $x \varepsilon A - A_h$ gilt: $B' \subseteqq A_h$, also $B' = A_h\, B$, also ist B' auch abgeschlossen in A_h.

4. **Verteilung der Unstetigkeitspunkte.** Sei wieder f eine Funktion auf A; wir betrachten die Menge aller ihrer Unstetigkeitspunkte.

26·4·1. *Die Menge C aller Unstetigkeitspunkte von f ist ein F_σ in A und in A_h.*

Sei C_n die Menge aller $x \varepsilon A$ mit $\omega(x) \geq \frac{1}{n}$; dann ist nach 26·3·2 $C = \underset{n}{S} C_n$, die Behauptung folgt also aus 26·3·41. — Die Umkehrung werden wir in 26·4·3 beweisen.

26·4·11. *Die Menge D aller Stetigkeitspunkte von f ist ein G_δ in A.*

Denn nach 26·4·1 ist $A - D$ ein F_σ in A.

Ist f eine Funktion auf A, die in jedem Punkte $y \varepsilon A$ unstetig ist, so heißt f total unstetig.

26·4·2. *Ist $A \supset \Lambda$ und insichdicht, und sind z_1, z_2 zwei verschiedene Zahlen, so gibt es auf A eine total unstetige Funktion, die nur die zwei Werte z_1, z_2 annimmt.*

Nach 12·4·6 zerlegen wir: $A = B + (A - B)$, wo B und $A - B$ dicht in A. Setzen wir $f(x) = z_1$ für $x \varepsilon B$, $f(x) = z_2$ für $x \varepsilon A - B$, so leistet f das Verlangte.

26·4·3. *Ist C ein F_σ in A_h, so gibt es auf A eine Funktion f, die unstetig ist in allen Punkten von C, stetig in allen Punkten von $A - C$.*

Sei $C = \underset{n}{S} C_n$, wo C_n abgeschlossen in A_h; da A_h nach 12·2·3 abgeschlossen in A, ist nach 10·8·5 C_n auch abgeschlossen in A. Seien C_1', C_1'' insichdichter Kern und separierter Bestandteil (§ 12, 7) von C_1, und C_n', C_n'' insichdichter Kern und separierter Bestandteil von $C_n - (C_1 + \ldots + C_{n-1})$; dann ist $C = \underset{n}{S}(C_n' + C_n'')$, und die Mengen C_1', C_1'', C_2', C_2'', ... sind disjunkt. Falls $C_n' \supset \Lambda$, sei (gemäß 26·4·2) f_n eine total unstetige Funktion auf C_n', die nur die Werte 0 und $\frac{1}{n}$ annimmt. Nun definieren wir eine Funktion f auf A durch:

$$f(x) = f_n(x) \text{ für } x \varepsilon C_n'; \quad f(x) = \frac{1}{n} \text{ für } x \varepsilon C_n''; \quad f(x) = 0 \text{ für } x \varepsilon A - C.$$

Diese Funktion leistet das Verlangte: Sie ist stetig in jedem Punkte von $A - C$; denn sei $a \varepsilon A - C$ und $((a_\nu))$ eine Punktfolge aus A mit $a_\nu \to a$; da $a \sim\varepsilon (C_1 + C_2 + \ldots + C_n)$ und $C_1 + C_2 + \ldots + C_n$ abgeschlossen in A, gilt auch $a_\nu \sim\varepsilon (C_1 + C_2 + \ldots + C_n)$ für fast alle ν; mithin ist $0 \leq f(a_\nu) < \frac{1}{n}$ für fast alle ν; und da dies für jedes n gilt, ist $f(a_\nu) \to 0$; wegen $a \varepsilon A - C$ ist aber auch $f(a) = 0$, also ist f stetig in a, wie behauptet. Die Funktion $f(x)$ ist unstetig in jedem Punkte von C; denn sei $a \varepsilon C$; dann gibt es ein n, so daß entweder $a \varepsilon C_n'$ oder $a \varepsilon C_n''$; ist $a \varepsilon C_n'$, so ist f unstetig in a, weil $f_n = C_n' \mathbin{\rceil} f$ unstetig in a; ist $a \varepsilon C_n''$, so ist $f(a) = \frac{1}{n}$; da $C_n'' = (C_n - (C_1 + \ldots + C_{n-1}))_s$, ist nach 12·7·2 $(C_n - (C_1 + \ldots + C_{n-1}))_s$

dicht in C''_n, es gibt also in $(C_n - (C_1 + \ldots + C_{n-1}))_j$ eine Folge $((a_\nu))$ mit $a_\nu \to a$; dann ist a_ν isolierter Punkt von $C_n - (C_1 + \ldots + C_{n-1})$, und wegen $C_n \subseteqq A_h$ Häufungspunkt von A, es gibt also ein $a'_\nu \,\varepsilon\, A$, so daß $a'_\nu a_\nu < \frac{1}{\nu}$ und $a'_\nu \sim \varepsilon\, (C_n - (C_1 + \ldots + C_{n-1}))$, d. h. $a'_\nu \sim \varepsilon\, (C'_n + C''_n)$; also ist $f(a'_\nu) = 0$ oder $= \frac{1}{k}$ $(k \neq n)$; wegen $f(a) = \frac{1}{n}$ gilt also nicht $f(a'_\nu) \to f(a)$, und da aus $a_\nu \to a$, $a'_\nu a_\nu < \frac{1}{\nu}$ folgt: $a'_\nu \to a$, ist f unstetig in a.

Literatur: Satz **26·4·11** geht zurück auf W. H. Young, Wien. Ber. 112 (1903) S. 1307.

5. **Punktweise unstetige Funktionen.** Eine Funktion f auf A heißt punktweise unstetig, wenn die Menge der Stetigkeitspunkte von f dicht in A ist; insbesondere ist also jede stetige Funktion punktweise unstetig. Ist A separiert, so ist jede Funktion f auf A punktweise unstetig, denn nach 12·7·2 ist A_j dicht in A, und in jedem Punkte von A_j ist f stetig.

26·5·1. *Ist f punktweise unstetig, so ist für jedes $k > 0$ die Menge aller $a \,\varepsilon\, A$ mit $\omega(a) \geq k$ nirgends dicht in A.*

Sei B diese Menge und C die Menge der Stetigkeitspunkte; da $\omega(x) = 0$ für $x \,\varepsilon\, C$, ist $C \subseteqq A - B$; und da nach Annahme C dicht in A, ist auch $A - B$ dicht in A; da B nach **26·3·41** abgeschlossen in A, so ist nach **11·2·51** B nirgends dicht in A.

26·5·11. *Ist f punktweise unstetig, so ist die Menge B aller Unstetigkeitspunkte von f von erster Kategorie in A.*

Denn ist B_n die Menge aller $a \,\varepsilon\, A$ mit $\omega(a) \geq \frac{1}{n}$, so ist $B = \underset{n}{S}\, B_n$; die Behauptung folgt also aus **26·5·1**.

Ist A eine Youngsche Menge, so können diese Sätze umgekehrt werden:

26·5·2. *Ist f eine Funktion auf der Youngschen Menge A und ist die Menge B aller Unstetigkeitspunkte von f von erster Kategorie in A, so ist f punktweise unstetig.*

Denn die Menge $A - B$ der Stetigkeitspunkte von f ist eine Residualmenge (§ 19, 7), also nach **19·7·51** dicht in A.

26·5·21. *Ist f eine Funktion auf der Youngschen Menge A, und ist für jedes $k > 0$ die Menge B_k aller $a \,\varepsilon\, A$ mit $\omega(a) \geq k$ von erster Kategorie in A, so ist f punktweise unstetig.*

Denn dann ist nach **19·4·2** auch die Menge $B = \underset{n}{S}\, B_{\frac{1}{n}}$ von erster Kategorie in A, und da B die Menge aller Unstetigkeitspunkte von f ist, folgt die Behauptung aus **26·5·2**.

26·5·22. *Ist f eine Funktion auf der Youngschen Menge A, und ist für jedes $k > 0$ die Menge aller $a \varepsilon A^0$ mit $\omega(a) \geq k$ von erster Kategorie in A^0, so ist f punktweise unstetig.*

Dies folgt aus **19·4·32** und **26·5·21**.

Die Sätze **26·5·11, 26·5·2** können zusammengefaßt werden in:

26·5·23. *Ist f eine Funktion auf der Youngschen Menge A, so ist, damit f punktweise unstetig sei, notwendig und hinreichend, daß die Menge der Stetigkeitspunkte von f eine Residualmenge in A sei.*

Eine Funktion im R_1, die stetig ist in allen irrationalen, unstetig in allen rationalen Punkten des R_1, ist punktweise unstetig; eine solche Funktion erhält man z. B., indem man setzt: $f(x) = 0$, wenn x irrational; $f(x) = \frac{1}{q}$, wenn $x = \pm \frac{p}{q}$ (p, q teilerfremde natürliche Zahlen); $f(0) = 1$. Eine Funktion im R_1, die stetig in allen rationalen, unstetig in allen irrationalen Punkten wäre, kann es nicht geben; dies folgt aus **26·5·11**, weil die Menge der irrationalen Punkte nicht von erster Kategorie ist, oder auch aus **26·4·1**, weil die Menge der irrationalen Punkte kein F_σ ist (§ 19, 2).

26·5·3. *Sind f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ punktweise unstetige Funktionen auf der Youngschen Menge A, so ist die Menge aller Punkte, in denen sämtliche f_n stetig sind, dicht in A.*

Dies folgt aus **26·5·23** und **19·7·52**.

26·5·4. *Ist f punktweise unstetig, so auch* $|f|$.

Dies folgt aus **25·6·4**.

26·5·41. *Sind f und g punktweise unstetige Funktionen auf der Youngschen Menge A, so auch* $\max(f(x), g(x))$ *und* $\min(f(x), g(x))$.

Dies folgt aus **25·6·41** und **26·5·3**.

26·5·42. *Sind f und g punktweise unstetige Funktionen auf der Youngschen Menge A, und ist eine der Funktionen $f+g$, $f-g$, $f\,g$, $\frac{f}{g}$ definiert auf A, so ist sie punktweise unstetig.*

Dies folgt aus **25·6·42** und **26·5·3**.

Hingegen folgt daraus, daß f und g punktweise unstetig sind, nicht die punktweise Unstetigkeit der zusammengesetzten Funktion $g(f(x))$. Beispiel: sei $f(x)$ die vorhin eingeführte, im R_1 punktweise unstetige Funktion, die $= 0$ ist, wenn x irrational, $= \frac{1}{q}$ wenn $x = \pm \frac{p}{q}$ (p, q teilerfremde natürliche Zahlen) und $= 1$ für $x = 0$; sei ferner $g(y)$ die im R_1 punktweise unstetige Funktion, die $= 0$ ist für $y = 0$ und $= 1$ für $y \neq 0$; dann ist

$g(f(x)) = 1$, wenn x rational, und $= 0$, wenn x irrational; somit ist $g(f(x))$ total unstetig.

Literatur: Der Begriff der punktweise unstetigen Funktion rührt her von H. Hankel, Math. Ann. 20 (1882) S. 89.

§ 27. Vernachlässigung von Teilmengen.

1. Die reduzierte Hülle einer Funktion. Sei wieder X ein metrischer Raum, $A \subseteqq X$ und f eine Funktion auf A. Zu jedem Punkte $a \varepsilon A^1$ bilden wir die Menge aller $y \varepsilon \bar{R}_1$, zu denen es eine Folge $((a_n))$ aus $A - \{a\}$ mit $a_n \to a$ und $f(a_n) \to y$ gibt; diese Menge nennen wir die reduzierte Hülle von f in a und bezeichnen sie mit $P_f^1(a)$ (oder einfach mit $P^1(a)$). Die Abbildung, die entsteht, indem wir jedem $x \varepsilon A^1$ jedes $y \varepsilon P_f^1(x)$ zuordnen, bezeichnen wir mit P_f^1 (oder P^1). Für alle $a \varepsilon A^1$ ist $P^1(a) \subseteqq P^0(a)$; für alle $a \varepsilon A^1 - A$ ist $P^1(a) = P^0(a)$; für $a \varepsilon A_h$ ist entweder $P^1(a) = P^0(a)$ oder $P^1(a) = P^0(a) - \{f(a)\}$. Ganz analog, wie die entsprechenden Sätze in § 26, 1 beweist man:

27·1·1. *Ist $a \varepsilon A^1$, $a_n \varepsilon A - \{a\}$, $a_n \to a$, und ist b Häufungspunkt der Folge $((f(a_n)))$, so ist $b \varepsilon P^1(a)$.*

27·1·11. *Ist $a \varepsilon A^1$, $b \varepsilon \bar{R}_1$, so ist, damit $b \varepsilon P^1(a)$ sei, notwendig und hinreichend, daß es zu jeder reduzierten Umgebung U'_a und jeder Umgebung U_b ein $x \varepsilon A\,U'_a$ mit $f(x) \varepsilon U_b$ gebe.*

27·1·2. *Die Menge $P^1(a)$ ist abgeschlossen im $\bar{R}_1$.*

27·1·3. *Sind f und g Funktionen auf A, und gibt es eine reduzierte Umgebung U'_a des Punktes $a \varepsilon A^1$, so daß $\|f(x) - g(x)\| \leq k$ für alle $x \varepsilon A\,U'_a$, so ist $e(P_f^1(a), P_g^1(a)) \leq k$.*

27·1·4. *Sei A kompakt, f eine Funktion auf A und B die Menge aller Funktionswerte $f(a)$ $(a \varepsilon A)$; dann gibt es zu jedem $b \varepsilon B^1$ ein $a \varepsilon A^1$, so daß $b \varepsilon P^1(a)$.*

27·1·5. *Die Abbildung P_f^1 von A^1 ist oberhalb stetig.*

Während für alle $a \varepsilon A$ gilt: $f(a) \varepsilon P^0(a)$, braucht nicht $f(a) \varepsilon P^1(a)$ zu sein[1]; wohl aber gilt:

27·1·6. *Ist A_h separabel, so kann es nur abzählbar viele $a \varepsilon A_h$ mit $f(a) \sim\varepsilon P^1(a)$ geben.*

Sei $\mathfrak{G}$, bzw. $\mathfrak{H}$ ein abzählbares ausgezeichnetes System in A_h bzw. im $\bar{R}_1$ offener Mengen (§ 13, 1). Ist $a \varepsilon A_h$, $f(a) = b$, $b \sim\varepsilon P^1(a)$, so gibt es nach

[1]) Beispiel im R_1: sei $f(x) = 0$ für irrationales x, $f(x) = \frac{1}{q}$ für $x = \pm\frac{p}{q}$ (p, q teilerfremde natürliche Zahlen), $f(0) = 1$; dann ist $P^1(x) = \{0\}$ für alle $x \varepsilon R_1$; also ist $f(x) \sim\varepsilon P^1(x)$ für alle rationalen x.

27·1·11 ein U_a und ein U_b, so daß für alle $x \varepsilon (A\, U_a - \{a\})$ gilt: $f(x) \sim\varepsilon\, U_b$; es ist also a der einzige Punkt $x \varepsilon A\, U_a$ mit $f(x) \varepsilon U_b$. Nun gibt es ein $G \varepsilon \mathfrak{G}$ und ein $H \varepsilon \mathfrak{H}$, so daß $a \varepsilon G$, $G \subseteqq U_a$, $b \varepsilon H$, $H \subseteqq U_b$; dann ist auch a der einzige Punkt $x \varepsilon G$ mit $f(x) \varepsilon H$. Jedem Punkte $a \varepsilon A_h$ mit $f(a) \sim\varepsilon P^1(a)$ kann also ein $G \varepsilon \mathfrak{G}$ und ein $H \varepsilon \mathfrak{H}$ so zugeordnet werden, daß a der einzige Punkt $x \varepsilon G$ mit $f(x) \varepsilon H$ ist. Da hierbei verschiedenen Punkten $a \varepsilon A_h$ verschiedene Paare (G, H) zugeordnet werden, und da es — weil $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ abzählbar sind — nur abzählbar viele Paare (G, H) gibt, gibt es also auch nur abzählbar viele $a \varepsilon A_h$ mit $f(a) \sim\varepsilon P^1(a)$.

Literatur: Das Studium der reduzierten Hülle geht im wesentlichen zurück auf R. Bettazzi, Rend. Pal. 6 (1892) S. 177.

2. **Die reduzierten Schrankenfunktionen.** Da $P^1(a)$ nach 27·1·2 abgeschlossen, gibt es unter den Zahlen von $P^1(a)$ eine größte und eine kleinste; wir bezeichnen sie mit $\overline{f}^1(a)$ bzw. $\underline{f}^1(a)$ und nennen sie die obere bzw. untere reduzierte Schranke von f in a; es sind $\overline{f}^1$ und $\underline{f}^1$ Funktionen auf A^1, die wir als die obere bzw. untere reduzierte Schrankenfunktion von f bezeichnen. Für alle $a \varepsilon A^1 - A$ ist $\overline{f}^1(a) = \overline{f}(a)$, $\underline{f}^1(a) = \underline{f}(a)$, für alle $a \varepsilon A^1$ ist $\overline{f}^1(a) \leqq \overline{f}(a)$, $\underline{f}^1(a) \geqq \underline{f}(a)$; für alle $a \varepsilon A_h$ ist $\overline{f}(a) = \max\left(\overline{f}^1(a), f(a)\right)$, $\underline{f}(a) = \min\left(\underline{f}^1(a), f(a)\right)$.

27·2·1. *Ist $a \varepsilon A^1$, ist $((U_{na}))$ eine sich auf a zusammenziehende Umgebungsfolge und $U'_{na} = U_{na} - \{a\}$, so ist $\overline{f}^1(a) = \lim\limits_{n} \sup\limits_{x \varepsilon A\, U'_{na}} f(x)$, $\underline{f}^1(a) = \lim\limits_{n} \inf\limits_{x \varepsilon A\, U'_{na}} f(x)$.*

Ist $a \varepsilon A^1 - A$, so ist dies gleichbedeutend mit 26·2·1. Ist $a \varepsilon A^1 A\,(= A_h)$, so erhält man die Behauptung, indem man 26·2·1 auf die Funktion anwendet, die $= f$ ist auf $A - \{a\}$, und $= \overline{f}^1$ im Punkte a.

Aus 27·2·1 folgt unmittelbar:

27·2·11. *Ist $a \varepsilon A^1$, so gibt es zu jedem $z > \overline{f}^1(a)$ $\left(\text{bzw. } z < \underline{f}^1(a)\right)$ eine reduzierte Umgebung U'_a, so daß $f(x) < z$ $\left(\text{bzw. } f(x) > z\right)$ für alle $x \varepsilon A\, U'_a$; und zu jedem $z < \overline{f}^1(a)$ $\left(\text{bzw. } z > \underline{f}^1(a)\right)$ gibt es in jeder reduzierten Umgebung U'_a ein $x \varepsilon A$ mit $f(x) > z$ $\left(\text{bzw. } f(x) < z\right)$.*

27·2·2. *Ist A_h separabel, so gilt für alle $a \varepsilon A_h$ mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen: $\underline{f}^1(a) \leqq f(a) \leqq \overline{f}^1(a)$.*

Dies folgt aus 27·1·6.

27·2·3. *Ist $a \varepsilon A^1$, so ist, damit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ sei, notwendig und hinreichend, daß $\overline{f}^1(a) = \underline{f}^1(a) = b$ sei.*

Denn $\bar{f}^1(a) = \underline{f}^1(a) = b$ ist gleichbedeutend mit $P^1(a) = \{b\}$; d. h. für jede Folge $((a_n))$ aus $A - \{a\}$ mit $a_n \to a$ folgt $f(a_n) \to b$; die Behauptung folgt also aus **25·5·21.**

27·2·4. *Ist f eine Funktion auf A, ist $A_j \subseteqq B \subseteqq A$, ist g eine Funktion auf A^0 und $g(x) = f(x)$ für alle $x \varepsilon B$, $\underline{f}^1(x) \leq g(x) \leq \bar{f}^1(x)$ für alle $x \varepsilon A^1 - B$, so gilt $\underline{f}^1(x) \leq \underline{g}^1(x) \leq \bar{g}^1(x) \leq \bar{f}^1(x)$ für alle $x \varepsilon A^1$.*

Sei $a \varepsilon A^1$; nach **27·2·11** haben wir zu zeigen: Ist $z > \bar{f}^1(a)$, so gibt es eine reduzierte Umgebung U'_a, so daß $g(x) \leq z$ für alle $x \varepsilon A^0 U'_a$. Nach **27·2·11** gibt es eine reduzierte Umgebung U'_a, so daß $f(x) < z$ für alle $x \varepsilon A U'_a$; nach **27·2·11** ist dann auch $\bar{f}^1(x) \leq z$ für alle $x \varepsilon A^1 U'_a$, mithin

(2) $$g(x) \leq z \text{ für alle } x \varepsilon A^1 U'_a - B.$$

Da $f(x) < z$ war für alle $x \varepsilon A U'_a$, gilt $g(x) = f(x) < z$ für alle $x \varepsilon B U'_a$; wegen $A_j = A^0 - A^1$ (§ 12 (2·2)) und $A_j \subseteqq B$ folgt also aus (2): $g(x) \leq z$ für alle $x \varepsilon A^0 U'_a$, w. z. b. w.

Ist $a \varepsilon A_h$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $f(a) \neq b$, so ist nach **25·6·2** f unstetig in a; und zwar heißt f h e b b a r u n s t e t i g in a, weil f durch bloße Abänderung des Funktionswertes $f(a)$ in den Wert b zu einer in a stetigen Funktion wird.

27·2·5. *Hat die Funktion f auf A keine anderen als hebbare Unstetigkeiten, so geht sie in eine stetige Funktion g über, wenn man in jedem Unstetigkeitspunkte a den Funktionswert $f(a)$ durch $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ersetzt.*

Da g in jedem Punkte $a \varepsilon A_j$ (§ 12, 2) stetig ist, ist nur zu zeigen, daß g auch in jedem Punkte $a \varepsilon A_h$ stetig ist. In jedem Punkte $a \varepsilon A_h$ aber ist nach **27·2·3** $\underline{f}^1(a) = \bar{f}^1(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = g(a)$, also nach **27·2·4** $\underline{g}^1(a) = \bar{g}^1(a) = g(a)$, also nach **27·2·3**: $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$, also ist g stetig in a nach **25·6·2.**

27·2·51. *Ist A_h separabel und hat die Funktion f auf A keine anderen als hebbare Unstetigkeiten, so hat sie höchstens abzählbar viele Unstetigkeitspunkte.*

Da f in jedem Punkte $a \varepsilon A_j$ stetig ist, ist nur zu zeigen: es gibt nur abzählbar viele Unstetigkeitspunkte $a \varepsilon A_h$. Nach Annahme existiert für jedes $a \varepsilon A_h$ der Grenzwert: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g(a)$; nach **27·2·3** ist also $\underline{f}^1(a) = \bar{f}^1(a) = g(a)$; also gilt nach **27·2·2** für alle $a \varepsilon A_h$ mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen: $f(a) = g(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, also gibt es nach **25·6·2** nur abzählbar viele Unstetigkeitspunkte $a \varepsilon A_h$.

L i t e r a t u r: Satz **27·2·2** geht zurück auf W. H. Y o u n g, Lond. Proc. (2) 8 (1910) S. 119.

3. **Die reduzierte Schwankung.** Ist $a \varepsilon A^1$, so heißt die Zahl $\omega_f^1(a) = \|\bar{f}^1(a) - \underline{f}^1(a)\|$ die reduzierte Schwankung von f in a; es ist $\omega_f^1(a)$ eine Funktion auf A^1, die wir als die reduzierte Schwankungsfunktion von f bezeichnen; wo kein Zweifel möglich ist, schreiben wir $\omega^1(a)$ statt $\omega_f^1(a)$. Für alle $a \varepsilon A^1 - A$ ist $\omega^1(a) = \omega(a)$, für alle $a \varepsilon A^1$ ist $\omega^1(a) \leq \omega(a)$. Wie die analogen Sätze in § 26, 3 zeigt man:

27·3·1. *Ist $a \varepsilon A^1$, ist $((U_{na}))$ eine sich auf a zusammenziehende Umgebungsfolge und $U'_{na} = U_{na} - \{a\}$, und bedeutet ω'_n die Schwankung von f auf $A\, U'_{na}$, so ist $\omega^1(a) = \lim\limits_n \omega'_n$.*

27·3·11. *Ist $a \varepsilon A^1$, so gibt es zu jedem $z > \omega^1(a)$ eine reduzierte Umgebung U'_a, so daß $\|f(x) - f(x')\| < z$ für alle $x \varepsilon A\, U'_a$, $x' \varepsilon A\, U'_a$; und zu jedem $z < \omega^1(a)$ gibt es in jeder reduzierten Umgebung U'_a ein $x \varepsilon A\, U'_a$ und ein $x' \varepsilon A\, U'_a$, so daß $\|f(x) - f(x')\| > z$.*

Aus **27·2·3** folgt:

27·3·2. *Damit f einen Grenzwert habe im Punkte $a \varepsilon A^1$, ist notwendig und hinreichend, daß $\omega^1(a) = 0$.*

27·3·3. *Für jedes k ist die Menge aller $a \varepsilon A^1$ mit $\omega^1(a) \geq k$ abgeschlossen.*

Sei B diese Menge und $b \varepsilon B^1$. In jeder reduzierten Umgebung U'_b gibt es ein $a \varepsilon B$; da $U'_b - \{a\}$ eine reduzierte Umgebung von a ist, gibt es zu jedem $z < k$ nach **27·3·11** in U'_b zwei Punkte x, x' von A, für die $\|f(x) - f(x')\| > z$; nach **27·3·11** ist also $\omega^1(b) \geq k$, d. h. es ist $b \varepsilon B$. Aus $b \varepsilon B^1$ folgt also $b \varepsilon B$, somit ist B abgeschlossen.

27·3·31. *Für jedes k ist die Menge aller $a \varepsilon A_h$ mit $\omega^1(a) \geq k$ abgeschlossen in A und in A_h.*

Der Beweis ist analog dem von **26·3·41**.

27·3·4. *Ist f eine Funktion auf der Youngschen Menge A, und ist für jedes $k > 0$ die Menge C_k aller $a \varepsilon A_h$ mit $\omega^1(a) \geq k$ von erster Kategorie in A, so ist f punktweise unstetig.*

Wäre f nicht punktweise unstetig, so gäbe es nach **26·5·21** ein $l > 0$, so daß die Menge B_l aller $x \varepsilon A$ mit $\omega(x) \geq l$ nicht nirgends dicht in A. Da B_l nach **26·3·41** abgeschlossen in A, gibt es dann nach **11·2·111** eine nicht leere, in A offene Menge $G\, A \subseteqq B_l$ (G offen). Bezeichnen wir mit C die Menge aller $x \varepsilon A_h$ mit $\omega^1(x) > 0$, so ist $C = \mathop{S}\limits_n C_{\frac{1}{n}}$, und da jedes $C_{\frac{1}{n}}$ von erster Kategorie in A, ist nach **19·4·2** auch C von erster Kategorie in A. Also ist $A - C$ eine Residualmenge in A, also nach **19·7·51** dicht in A, also gibt es ein $a \varepsilon G\,(A - C)$; wegen $G\, A \subseteqq B_l$ ist $a \varepsilon B_l$, d. h. $\omega(a) \geq l$, also ist $a \varepsilon A_h$, denn in jedem isolierten Punkte von A ist $\omega(a) = 0$; da aber C die Menge aller $x \varepsilon A_h$ mit $\omega^1(a) > 0$ war, und $a \varepsilon A_h - C$ ist, so ist $\omega^1(a) = 0$;

nach **27·3·11** gibt es also eine reduzierte Umgebung U'_a, so daß $\|f(x) - f(x')\| < \frac{l}{2}$ für alle $x \varepsilon A U'_a$, $x' \varepsilon A U'_a$. Wegen $a \varepsilon A_h$ gibt es ein $a' \varepsilon A U'_a G$, und da U'_a eine Umgebung von a' ist, so ist nach **26·3·11** $\omega(a') \leq \frac{l}{2}$; aus $a' \varepsilon A G$ und $A G \subseteqq B_l$ folgt aber $a' \varepsilon B_l$, d. h. $\omega(a') \geq l$; die Annahme, f sei nicht punktweise unstetig, führt also auf einen Widerspruch.

27·3·41. *Ist f eine Funktion auf der Youngschen Menge A, und ist für jedes $k > 0$ die Menge C_k aller $a \varepsilon A^1$ mit $\omega^1(a) \geq k$ von erster Kategorie in A^0, so ist f punktweise unstetig.*

Nach **11·3·12** und **19·4·32** ist $C_k A$ von erster Kategorie in A. Da $C_k A$ die Menge aller $a \varepsilon A_h$ mit $\omega^1(a) \geq k$ ist, folgt die Behauptung aus **27·3·4**.

27·3·5. *Ist f eine Funktion auf der Youngschen Menge A, und ist die Menge B aller $a \varepsilon A_h$, in denen f einen Grenzwert hat, dicht in A_h, so ist f punktweise unstetig.*

Sei C_k $(k > 0)$ die Menge aller $a \varepsilon A_h$ mit $\omega^1(a) \geq k$; da $B \subseteqq A_h - C_k$, ist $A_h - C_k$ dicht in A_h; weil C_k nach **27·3·31** abgeschlossen in A_h, ist also nach **11·2·51** C_k nirgends dicht in A_h, also auch nirgends dicht in A, und die Behauptung folgt aus **27·3·4.**

27·3·51. *Ist f eine Funktion auf der Youngschen Menge A, und ist die Menge aller $a \varepsilon A^1$, in denen f einen Grenzwert hat, dicht in A^1, so ist f punktweise unstetig.*

Der Beweis ist (unter Berufung auf **27·3·3** und **27·3·41**) analog dem von **27·3·5.**

4. **Vernachlässigung von Teilmengen.** Sei $\mathfrak{M}$ ein System von Teilen der Menge A mit folgenden Eigenschaften:

1. Ist $M \varepsilon \mathfrak{M}$ und $M' \subseteqq M$, so ist auch $M' \varepsilon \mathfrak{M}$.
2. $\mathfrak{M}$ ist ein σ-System.
3. Kein $M \supset A$ aus $\mathfrak{M}$ ist offen in A.

Aus 1. folgt: $A \varepsilon \mathfrak{M}$. Beispiele solcher Systeme $\mathfrak{M}$ sind: wenn A verdichtet (§ 13, 5), das System aller abzählbaren Teile von A; wenn A eine Youngsche Menge, das System aller Mengen erster Kategorie in A (nach **19·7·62**). — Jede Menge $M \varepsilon \mathfrak{M}$ nennen wir kurz eine $\mathfrak{M}$-Menge. — Ist $a \varepsilon A^0$, und M eine $\mathfrak{M}$-Menge, so gibt es wegen 3. in $A - M$ eine Folge $((a_n))$ mit $a_n \to a$.

Sei f eine Funktion auf A. Zu jedem Punkte $a \varepsilon A^0$ bilden wir die Menge aller $y \varepsilon \overline{R}_1$, zu denen es für jedes $M \varepsilon \mathfrak{M}$ eine Folge $((a_n))$ aus $A - M$ mit

$a_n \to a$ und $f(a_n) \to y$ gibt; diese Menge nennen wir die Hülle von f in a bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen, und bezeichnen sie mit $P_f^{(\mathfrak{M})}(a)$ (oder einfach mit $P^{(\mathfrak{M})}(a)$). Die Abbildung, die entsteht, indem wir jedem $x \varepsilon A^0$ jedes $y \varepsilon P_f^{(\mathfrak{M})}(a)$ zuordnen, bezeichnen wir mit $P_f^{(\mathfrak{M})}$ (oder $P^{(\mathfrak{M})}$). Ist auch g eine Funktion auf A, und ist die Menge aller $x \varepsilon A$ mit $f(x) \neq g(x)$ eine $\mathfrak{M}$-Menge, so stimmen $P_f^{(\mathfrak{M})}$ und $P_g^{(\mathfrak{M})}$ überein.

Ganz ebenso wie **26·1·11**, **26·1·2**, **26·1·5** zeigt man:

27·4·1. *Ist $a \varepsilon A^0$, $b \varepsilon \bar{R}_1$, so ist, damit $b \varepsilon P^{(\mathfrak{M})}(a)$ sei, notwendig und hinreichend, daß es zu jeder Umgebung U_a, jeder Umgebung U_b und jedem $M \varepsilon \mathfrak{M}$ ein $x \varepsilon (A - M)\, U_a$ mit $f(x) \varepsilon U_b$ gebe.*

27·4·2. *Die Menge $P^{(\mathfrak{M})}(a)$ ist abgeschlossen im $\bar{R}_1$.*

27·4·3. *Die Abbildung $P_f^{(\mathfrak{M})}$ von A^0 ist oberhalb stetig.*

27·4·4. *Ist A separabel, so ist die Menge aller $a \varepsilon A$ mit $f(a) \sim\varepsilon P^{(\mathfrak{M})}(a)$ eine $\mathfrak{M}$-Menge.*

Sei $G_1, G_2, \ldots, G_i, \ldots$, bzw. $H_1, H_2, \ldots, H_j, \ldots$ ein abzählbares ausgezeichnetes System in A, bzw. im $\bar{R}_1$ offener Mengen (§ 13, 1). Sei $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ die abzählbare Menge derjenigen Paare (G_i, H_j), für die die Menge aller $x \varepsilon G_i$ mit $f(x) \varepsilon H_j$ eine $\mathfrak{M}$-Menge ist; für das Paar Q_n bezeichnen wir die Menge dieser x mit M_n und setzen $M = \underset{n}{S}\, M_n$; da $\mathfrak{M}$ ein σ-System, ist dann auch M eine $\mathfrak{M}$-Menge. Es genügt also zu zeigen: ist $f(a) \sim\varepsilon P^{(\mathfrak{M})}(a)$, so ist $a \varepsilon M$. Sei also $b = f(a)$, $b \sim\varepsilon P^{(\mathfrak{M})}(a)$; dann gibt es nach **27·4·1** ein U_a und ein U_b, so daß die Menge aller $x \varepsilon A\, U_a$ mit $f(x) \varepsilon U_b$ eine $\mathfrak{M}$-Menge ist; sodann gibt es ein G_i und ein H_j, so daß $a \varepsilon G_i$, $G_i \subseteqq U_a$, $b \varepsilon H_j$, $H_j \subseteqq U_b$; dann ist, da jeder Teil einer $\mathfrak{M}$-Menge eine $\mathfrak{M}$-Menge ist, auch die Menge aller $x \varepsilon G_i$ mit $f(x) \varepsilon H_j$ eine $\mathfrak{M}$-Menge, und somit ist (G_i, H_j) eines der Paare $Q_1, Q_2, \ldots$, etwa das Paar Q_n; da aber $a \varepsilon G_i$, $f(a) \varepsilon H_j$, ist dann $a \varepsilon M_n$, also auch $a \varepsilon M$, w. z. b. w.

Da $P^{(\mathfrak{M})}(a)$ nach **27·4·2** abgeschlossen, gibt es unter den Zahlen von $P^{(\mathfrak{M})}(a)$ eine größte und eine kleinste; wir bezeichnen sie mit $\bar{f}^{(\mathfrak{M})}(a)$ bzw. $\underline{f}^{(\mathfrak{M})}(a)$, und nennen sie die obere und untere Schranke von f in a bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen; die Zahl $\omega^{(\mathfrak{M})}(a) = \|\bar{f}^{(\mathfrak{M})}(a) - \underline{f}^{(\mathfrak{M})}(a)\|$ nennen wir die Schwankung von f in a bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen; es sind $\bar{f}^{(\mathfrak{M})}(a)$, $\underline{f}^{(\mathfrak{M})}(a)$, $\omega^{(\mathfrak{M})}(a)$ Funktionen auf A^0, die wir als die obere und untere Schrankenfunktion, bzw. die Schwankungsfunktion von f bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen bezeichnen. Aus **27·4·4** folgt:

27·4·5. *Ist A separabel, so ist die Menge aller $a \varepsilon A$, in denen nicht $\underline{f}^{(\mathfrak{M})}(a) \leq f(a) \leq \bar{f}^{(\mathfrak{M})}(a)$ gilt, eine $\mathfrak{M}$-Menge.*

27·4·51. *Für jedes k ist die Menge C aller $a \varepsilon A^0$ mit $\omega^{(\mathfrak{M})}(a) \geq k$ abgeschlossen.*

Sei $a \varepsilon A^0 - C$, also $\omega^{(\mathfrak{M})}(a) < k$. Aus **27·4·8** folgt: zu jedem $p > \bar{f}^{(\mathfrak{M})}(a)$ (bzw. zu jedem $q < \underline{f}^{(\mathfrak{M})}(a)$) gibt es eine Umgebung U_a, so daß $\bar{f}^{(\mathfrak{M})}(x) < p$ (bzw. $\underline{f}^{(\mathfrak{M})}(x) > q$) für alle $x \varepsilon A^0 U_a$; wegen $\omega^{(\mathfrak{M})} = ||\bar{f}^{(\mathfrak{M})} - \underline{f}^{(\mathfrak{M})}||$ und $\omega^{(\mathfrak{M})}(a) < k$ gibt es also eine Umgebung U_a, so daß $\omega^{(\mathfrak{M})}(x) < k$ für alle $x \varepsilon A^0 U_a$; also ist $A^0 U_a \subseteqq A^0 - C$, also ist $A^0 - C$ offen in A^0, mithin C abgeschlossen in A^0, und da A^0 abgeschlossen, ist C abgeschlossen.

In Anlehnung an **26·2·4** und **26·3·2** definieren wir: Ist $a \varepsilon A$ und $\bar{f}^{(\mathfrak{M})}(a) = \underline{f}^{(\mathfrak{M})}(a)$ (d.h. $\omega^{(\mathfrak{M})}(a) = 0$), so heißt f stetig in a bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen; gilt dies für jeden Punkt a des Bereiches A von f, so heißt f stetig bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen.

27·4·6. *Ist f stetig in a bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen, so ist die Abbildung $P^{(\mathfrak{M})}$ stetig in a.*

Dies folgt aus **27·4·8** und **22·1·5.**

27·4·61. *Ist f stetig bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen, und setzen wir $g(x) = \bar{f}^{(\mathfrak{M})}(x) = \underline{f}^{(\mathfrak{M})}(x)$ für $x \varepsilon A$, so ist die Funktion g auf A stetig.*

Dies folgt aus **27·4·6.**

Offenbar gilt:

27·4·62. *Sind f und g Funktionen auf A, ist g stetig, und ist die Menge aller $x \varepsilon A$ mit $f(x) \neq g(x)$ eine $\mathfrak{M}$-Menge, so ist f stetig bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen.*

Hiervon gilt folgende Umkehrung:

27·4·621. *Ist A separabel und f stetig bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen, so gibt es eine stetige Funktion g auf A, so daß die Menge aller $x \varepsilon A$ mit $f(x) \neq g(x)$ eine $\mathfrak{M}$-Menge ist.*

Dies folgt aus **27·4·61** und **27·4·5.**

Die Funktion f auf A heißt punktweise unstetig bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen, wenn die Menge aller Punkte, in denen f stetig ist bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen, dicht in A ist. Offenbar gilt:

27·4·7. *Sind f und g Funktionen auf A, ist g punktweise unstetig, und ist die Menge aller $x \varepsilon A$ mit $f(x) \neq g(x)$ eine $\mathfrak{M}$-Menge, so ist f punktweise unstetig bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen.*

Hiervon gilt folgende Umkehrung:

27·4·71. *Ist A separabel und f punktweise unstetig bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen, so gibt es eine punktweise unstetige Funktion g auf A, so daß die Menge aller $x \varepsilon A$ mit $f(x) \neq g(x)$ eine $\mathfrak{M}$-Menge ist.*

Sei $g(x) = f(x)$ für alle $x \varepsilon A$, in denen $\underline{f}^{(\mathfrak{M})}(x) \leq f(x) \leq \bar{f}^{(\mathfrak{M})}(x)$, und $g(x) = \bar{f}^{(\mathfrak{M})}(x)$ für alle übrigen $x \varepsilon A$; nach **27·4·5** ist dann die Menge aller $x \varepsilon A$ mit $f(x) \neq g(x)$ eine $\mathfrak{M}$-Menge. Da die Menge $P_f^{(\mathfrak{M})}(x)$ nach **27·4·2** abgeschlossen im $\bar{R}_1$, ist sie nach **15·2·3** in sich kompakt, d. h. die Abbildung $P_f^{(\mathfrak{M})}$ ist in sich kompakt; ist f stetig in a bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen, so ist nach **27·4·6** die Abbildung $P_f^{(\mathfrak{M})}$ stetig in a, nach **22·1·2** gibt es also zu jedem $\delta > 0$ ein $\sigma > 0$, so daß $e(P_f^{(\mathfrak{M})}(x), P_f^{(\mathfrak{M})}(a)) < \delta$ für alle $x \varepsilon A\, K_{a\sigma}$; da $P_f^{(\mathfrak{M})}(a) = \{g(a)\}$, und da überall $\underline{f}^{(\mathfrak{M})}(x) \leq g(x) \leq \bar{f}^{(\mathfrak{M})}(x)$, folgt daraus sofort $\| g(x) - g(a) \| < \delta$; also ist nach **25·6·21** g stetig in a. Es ist also g in jedem Punkte stetig, in dem f stetig ist bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen; also ist g punktweise unstetig.

27·4·72. *Ist f punktweise unstetig bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen, so ist die Menge aller Punkte von A, in denen f nicht stetig ist bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen, von erster Kategorie in A.*

Dies folgt aus **27·4·51** ebenso wie **26·5·11** aus **26·3·4.**

Wir nennen die Funktion f auf A s t e t i g b i s a u f e i n e $\mathfrak{M}$-M e n g e, wenn es eine $\mathfrak{M}$-Menge $M \subseteqq A$ gibt, so daß $(A - M)\,1\,f$ stetig ist. Ist A separabel und ist die Funktion f stetig bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen, so ist sie zufolge **27·4·621** auch stetig bis auf eine $\mathfrak{M}$-Menge, aber nicht umgekehrt (vgl. Satz **27·4·811**).

27·4·8. *Ist M_0 die Menge aller $x \varepsilon A$, für die nicht $f(x) = \bar{f}^{(\mathfrak{M})}(x) = \underline{f}^{(\mathfrak{M})}(x)$ gilt, so ist $(A - M_0)\,1\,f$ stetig.*

Dies folgt unmittelbar aus **27·4·6.**

27·4·81. *Ist f stetig bis auf eine $\mathfrak{M}$-Menge, so ist die Menge C aller $a \varepsilon A$, in denen f nicht stetig ist bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen, eine $\mathfrak{M}$-Menge.*

Sei M eine $\mathfrak{M}$-Menge und $(A - M)\,1\,f$ stetig; dann ist f in jedem Punkte $a \varepsilon A - M$ stetig bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen, also ist $C \subseteqq M$, mithin eine $\mathfrak{M}$-Menge.

Hiervon gilt folgende Umkehrung:

27·4·811. *Ist A separabel und ist die Menge C aller $x \varepsilon A$, in denen f nicht stetig ist bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen, eine $\mathfrak{M}$-Menge, so ist f stetig bis auf eine $\mathfrak{M}$-Menge.*

Nach Voraussetzung ist die Menge aller $x \varepsilon A$, in denen nicht $\bar{f}^{(\mathfrak{M})}(x) = \underline{f}^{(\mathfrak{M})}(x)$ gilt, eine $\mathfrak{M}$-Menge; also ist nach **27·4·5** auch die Menge M_0 aller $x \varepsilon A$, in denen nicht $f(x) = \bar{f}^{(\mathfrak{M})}(x) = \underline{f}^{(\mathfrak{M})}(x)$ gilt, eine $\mathfrak{M}$-Menge, und die Behauptung folgt aus **27·4·8.**

27·4·82. *Ist f stetig bis auf eine $\mathfrak{M}$-Menge, so gibt es unter allen $\mathfrak{M}$-Mengen M, für die $(A - M)\, 1\, f$ stetig ist, eine kleinste, nämlich die Menge M_0 aller $x \varepsilon A$, für die nicht $f(x) = \bar{f}^{(\mathfrak{M})}(x) = \underline{f}^{(\mathfrak{M})}(x)$ gilt.*

Ist M eine $\mathfrak{M}$-Menge und $a \varepsilon M_0 - M$, so kann $(A - M)\, 1\, f$ nicht stetig in a sein; für alle $\mathfrak{M}$-Mengen, für die $(A - M)\, 1\, f$ stetig ist, gilt also $M \supseteqq M_0$. Da es nach Voraussetzung solche $\mathfrak{M}$-Mengen gibt, ist auch M_0 eine $\mathfrak{M}$-Menge, und da nach 27·4·8 $(A - M_0)\, 1\, f$ stetig ist, ist M_0 die kleinste $\mathfrak{M}$-Menge, für die $(A - M)\, 1\, f$ stetig ist.

27·4·9. *Ist f stetig bis auf eine $\mathfrak{M}$-Menge, so ist f punktweise unstetig bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen.*

Sei M eine $\mathfrak{M}$-Menge und $(A - M)\, 1\, f$ stetig. Dann ist f stetig bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen in jedem Punkte von $A - M$. Es ist also nur mehr zu zeigen, daß $A - M$ dicht in A ist. Sei $G \supset A$ und offen in A; nach Eigenschaft 3. der $\mathfrak{M}$-Mengen ist dann $G - M \supset A$, also auch $G(A - M) \supset A$, also ist $A - M$ dicht in A nach 11·1·3, w. z. b. w.

Ist A eine separable Youngsche Menge und verstehen wir unter den $\mathfrak{M}$-Mengen insbesondere die Mengen erster Kategorie in A, so gilt hiervon auch die Umkehrung:

27·4·91. *Ist A eine separable, Youngsche Menge, so ist, damit f stetig sei bis auf eine Menge erster Kategorie in A, notwendig und hinreichend, daß f punktweise unstetig sei bei Vernachlässigung von Mengen erster Kategorie in A.*

Notwendig: Dies ist enthalten in 27·4·9. Hinreichend: Nach 27·4·72 ist die Menge aller $x \varepsilon A$, in denen f nicht stetig ist bei Vernachlässigung von Mengen erster Kategorie, von erster Kategorie, die Behauptung folgt also aus 27·4·811.

27·4·92. *Damit die charakteristische Funktion f der Menge $M \subseteqq E$ stetig sei bis auf eine Menge erster Kategorie, ist notwendig und hinreichend, daß M offen sei bis auf eine Menge erster Kategorie.*

Notwendig: Nach Annahme gibt es eine Menge A, die von erster Kategorie in E ist, so daß $(E - A)\, 1\, f$ stetig ist. Dann ist $[(E - A)\, 1\, f(\mathfrak{x}) = 1]$ $= \left[(E - A)\, 1\, f(\mathfrak{x}) > \frac{1}{2}\right]$ offen in $E - A$ nach 25·8·1; also ist

$$[(E - A)\, 1\, f(\mathfrak{x}) = 1] = G(E - A) = G - A,$$

wo G offen in E; also ist $M = [f(\mathfrak{x}) = 1] = (G - A) + A'$, wo $A' \subseteqq A$; da A von erster Kategorie in E, so auch A'. Hinreichend: Nach Annahme ist $M = (G - A) + A'$, wo G offen, A und A' von erster Kategorie. Nach 11·2·71 ist G_g nirgends dicht, also ist die Menge $B = A + A' + G_g$ von erster Kategorie, und offenbar ist $(E - B)\, 1\, f$ stetig.

Literatur: Die Betrachtungen dieser Nummer gehen zurück auf R. Baire, Ann. di mat. (3) 3 (1899) S. 72, 81; Acta math. 30 (1906) S. 21; H. Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 185, 189. Satz 27·4·82 stammt im wesentlichen von W. Sierpiński, Fund. math. 5 (1924) S. 20.

5. **Teilfunktionen.** Sei f eine Funktion auf A, $B \subseteqq A$ und $g = B\,1\cdot f$. Ist dann $a \varepsilon B^0$ (bzw. $a \varepsilon B^1$, bzw. $a \varepsilon B^0$), so gilt für die Hüllen (§ 26, 1) von f und g in a (bzw. für die reduzierten Hüllen (§ 27, 1) von f und g in a, bzw. für die Hüllen von f und g in a bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen): $P_g^0(a) \subseteqq P_f^0(a)$ (bzw. $P_g^1(a) \subseteqq P_f^1(a)$, bzw. $P_g^{(\mathfrak{M})}(a) \subseteqq P_f^{(\mathfrak{M})}(a)$).

Wählen wir insbesondere für B eine in A offene Menge $A\,G$ (G offen), so heiße $g = A\,G\,1\,f$ eine offene Teilfunktion von f.

27·5·1. *Ist G offen und $g = A\,G\,1 f$, so gilt für alle $a \varepsilon A^0 G$:*

$$P_g^0(a) = P_f^0(a),\ P_g^1(a) = P_f^1(a),\ P_g^{(\mathfrak{M})}(a) = P_f^{(\mathfrak{M})}(a).$$

Denn G ist eine Umgebung von a, und für alle $x \varepsilon A\,G$ ist $g(x) = f(x)$.

Hingegen kann für $a \varepsilon (A\,G)^0 - G$ sehr wohl $P_g^0(a) \subset P_f^0(a)$ (ebenso $P_g^1(a) \subset P_f^1(a)$, $P_g^{(\mathfrak{M})}(a) \subset P_f^{(\mathfrak{M})}(a)$) sein. Diesbezüglich gilt:

27·5·2. *Die Menge C aller $a \varepsilon A^0$ (bzw. aller $a \varepsilon A^1$, bzw. aller $a \varepsilon A^0$), zu denen es eine offene Menge G mit $a \varepsilon (A\,G)^0$ gibt, so daß für die offene Teilfunktion $g = A\,G\,1\,f$ gilt: $P_g^0(a) \subset P_f^0(a)$ (bzw. $P_g^1(a) \subset P_f^1(a)$, bzw. $P_g^{(\mathfrak{M})}(a) \subset P_f^{(\mathfrak{M})}(a)$), ist von erster Kategorie in A^0 (bzw. in A^1, bzw. in A^0).*

Seien $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ die abzählbar vielen abgeschlossenen Intervalle des R_1, deren Randpunkte p, q rational oder $= \pm\infty$ sind. Ist $P_g^0(a) \subset P_f^0(a)$, so gibt es, da $P_g^0(a)$ nach 26·1·2 abgeschlossen, ein I_n, so daß $P_g^0(a)\,I_n = \Lambda$, $P_f^0(a)\,I_n \supset \Lambda$. Bezeichnen wir also mit C_n die Menge aller $a \varepsilon A^0$, zu denen es eine offene Menge G mit $a \varepsilon (A\,G)^0$ gibt, so daß für die offene Teilfunktion $g = A\,G\,1\,f$ gilt: $P_g^0(a)\,I_n = \Lambda$, $P_f^0(a)\,I_n \supset \Lambda$, so ist $C = \underset{n}{S}\, C_n$.

Um zu zeigen, daß C von erster Kategorie in A^0, genügt es also zu zeigen, daß C_n nirgends dicht in A^0. Sei also $a \varepsilon C_n$, d. h. es gibt ein offenes G, so daß $a \varepsilon (A\,G)^0$ und $P_g^0(a)\,I_n = \Lambda$, $P_f^0(a)\,I_n \supset \Lambda$. Da nach 26·1·5 die Abbildung P_g^0 von $(A\,G)^0$ oberhalb stetig ist, so ist nach 21·5·2 die Menge aller $x \varepsilon (A\,G)^0$, für die $P_g^0(x)\,I_n \supset \Lambda$ ist, abgeschlossen, mithin die Menge aller $x \varepsilon (A\,G)^0$, für die $P_g^0(x) I_n = \Lambda$ ist, offen in $(A\,G)^0$, also von der Gestalt $(A\,G)^0 G'$, wo G' offen. Da nach 27·5·1 $P_g^0(x) = P_f^0(x)$ für alle $x \varepsilon A^0 G$, und da $A^0 G \subseteqq (A\,G)^0$, so ist auch $P_f^0(x)\,I_n = \Lambda$ für alle $x \varepsilon A^0 G\,G'$, und daher ist $C_n\,G\,G' = \Lambda$. Sei nun $A^0 H$ (H offen) eine a enthaltende, in A^0 offene Menge; wegen $a \varepsilon (A G)^0$ und $P_g^0(a)\,I_n = \Lambda$, ist $a \varepsilon (A\,G)^0 G'$, also ist $G' H$ eine Umgebung von a; wegen $a \varepsilon (A\,G)^0$ ist also $A\,G\,G'\,H \supset \Lambda$, also ist $A^0 G G' H$ eine nicht leere, in A^0 offene Menge $\subseteqq A^0 H$, die wegen $C_n\,G\,G' = \Lambda$ zu C_n

fremd ist; in jeder in A^0 offenen Menge $A^0 H$, die einen Punkt von C_n enthält, gibt es also eine zu C_n fremde, nicht leere, in A^0 offene Menge, also ist nach 11·2·2 C_n nirgends dicht, w. z. b. w.

Sei E ein metrischer Raum, und f eine Funktion auf E; wir nennen die in E dichte Menge B eine Kernmenge für f, wenn es zu jedem $b \varepsilon B$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U_b gibt, so daß die Menge aller $x \varepsilon B\, U_b$ mit $\|f(x) - f(b)\| < \varepsilon$ dicht in U_b ist.

27·5·3. *Ist E ein separabler Youngscher Raum, so gibt es für jede Funktion f auf E eine Kernmenge.*

Verstehen wir unter den $\mathfrak{M}$-Mengen die Mengen erster Kategorie, so ist nach 27·4·4 die Menge B' aller $a \varepsilon E$, für die $f(a) \varepsilon P_f^{(\mathfrak{M})}(a)$ gilt, eine Residualmenge. Setzen wir in 27·5·2 $A = E$ (also auch $A^0 = E$), so ist, da die Menge C von 27·5·2 von erster Kategorie ist, die Menge $B'' = E - C$ eine Residualmenge. Setzen wir $B = B' B''$, so ist nach 19·7·2 auch B eine Residualmenge, und nach 19·7·51 ist B dicht. Wir haben noch zu zeigen: ist $b \varepsilon B$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U_b, so daß die Menge aller $x \varepsilon B\, U_b$ mit $\|f(x) - f(b)\| < \varepsilon$ dicht in U_b. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$, so daß in keiner Umgebung U_b die Menge aller $x \varepsilon B\, U_b$ mit $\|f(x) - f(b)\| < \varepsilon$ dicht; nach 11·1·3 gäbe es dann zu jeder Umgebung U_b eine nicht leere offene Menge $G_{U_b} \subseteqq U_b$, so daß $\|f(x) - f(b)\| \geq \varepsilon$ für alle $x \varepsilon B\, G_{U_b}$; ist dann $((U_{nb}))$ eine sich auf b zusammenziehende Umgebungsfolge (§ 13, 1) und $G = \underset{n}{S}\, G_{U_{nb}}$, so wäre G offen, $b \varepsilon G^0$ und $\|f(x) - f(b)\| \geq \varepsilon$ für alle $x \varepsilon B\, G$; setzen wir $g = G\, 1 f$, so wäre demnach, da B eine Residualmenge also $E - B$ von erster Kategorie, mithin nach 19·4·4 $G - B$ von erster Kategorie in G ist: $f(b) \sim \varepsilon P_g^{(\mathfrak{M})}(b)$, im Widerspruche zur Tatsache, daß aus $b \varepsilon B = B' B''$ folgt: $f(b) \varepsilon P_f^{(\mathfrak{M})}(b)$ und $P_f^{(\mathfrak{M})}(b) = P_g^{(\mathfrak{M})}(b)$.

27·5·4. *Ist E ein separabler Youngscher Raum, so gibt es zu jeder Funktion f auf E eine in E dichte Menge A, so daß $A\, 1 f$ stetig.*

Sei $((\varepsilon_n))$ eine abnehmende Zahlenfolge mit $\varepsilon_n \to 0$. Nach 27·5·3 gibt es eine Kernmenge B_1 für f, und nach 9·7·1 gibt es in B_1 ein ε_1-Netz C_1, das nach 18·1·6 abzählbar ist; es bestehe aus den Punkten $b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1\nu}, \ldots$ Dann gibt es ein disjunktes System von Umgebungen $U_{b_{1\nu}}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, so daß, wenn $B_{1\nu}$ die Menge aller $x \varepsilon B_1$ mit $\|f(x) - f(b_{1\nu})\| < \varepsilon_1$ bedeutet, $B_{1\nu}\, U_{b_{1\nu}}$ dicht in $U_{b_{1\nu}}$ ist. Wir setzen nun: $\underset{\nu}{S}\, U_{b_{1\nu}} = G_1$, $B_2 = \underset{\nu}{S}\, B_{1\nu}\, U_{b_{1\nu}} + (B_1 - G_1^0)$. Dann ist $B_2 \subseteqq B_1$. Wir zeigen, daß B_2 dicht ist; da G_1 offen, ist nach 11·2·71 $G_1^0 - G_1 = G_{1g}$ nirgends dicht; bedeutet also G eine offene Menge $\supset A$, so ist nach 11·2·11 $G - G_{1g} \supset A$, wegen $G - G_{1g} = G\, G_1 + (G - G_1^0)$ ist also eine der offenen Mengen $G\, U_{b_{1\nu}}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$,

$G - G_1^0$ nicht leer, und da $B_{1\nu} U_{b_{1\nu}}$ dicht in $U_{b_{1\nu}}$ und B_1 dicht, ist also $B_2 G \supset A$, d. h. nach **11·1·3**: B_2 ist dicht, wie behauptet. Wir zeigen nun, daß B_2 eine Kernmenge für f ist. Sei $b \varepsilon B_2$; dann gehört b zu $B_1 - G_1^0$ oder zu einer der Mengen $B_{1\nu}\, U_{b_{1\nu}}$; wir haben zu zeigen: zu jedem $\delta > 0$ gibt es eine Umgebung U_b, so daß die Menge aller $x \varepsilon B_2 U_b$ mit $\|f(x) - f(b)\| < \delta$ dicht in U_b; dies ist evident, wenn $b \varepsilon B_1 - G_1^0$, weil $E - G_1^0$ offen, weil $B_2(E - G_1^0) = B_1(E - G_1^0)$ und weil B_1 eine Kernmenge; sei also $b \varepsilon B_{1\nu}\, U_{b_{1\nu}}$; nach Definition von $B_{1\nu}$ ist dann $\|f(b) - f(b_{1\nu})\| < \varepsilon_1$; wir können ohne weiteres annehmen: $\delta < \varepsilon_1 - \|f(b) - f(b_{1\nu})\|$; da $b \varepsilon B_1 U_{b_{1\nu}}$ und da B_1 eine Kernmenge, gibt es eine Umgebung $U_b \subseteqq U_{b_{1\nu}}$, so daß die Menge M aller $x \varepsilon B_1 U_b$ mit $\|f(x) - f(b)\| < \delta$ dicht in U_b; da aber $\|f(x) - f(b_{1\nu})\| \leq \|f(x) - f(b)\| + \|f(b) - f(b_{1\nu})\| < \varepsilon_1$, ist $M \subseteqq B_{1\nu} U_b \subseteqq B_{1\nu} U_{b_{1\nu}}$, also auch $M \subseteqq B_2$; also ist $B_2 U_b$ dicht in U_b, w. z. b. w. — Da also B_2 eine Kernmenge, können wir mit B_2 genau so verfahren, wie vorhin mit B_1, indem wir nur ε_1 durch ε_2 ersetzen: es gibt nach **9·7·2** in B_2 ein ε_2-Netz $C_2 \supseteqq C_1$, bestehend etwa aus den Punkten $b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2\nu}, \ldots$, und es gibt ein disjunktes System von Umgebungen $U_{b_{2\nu}}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, so daß, wenn $B_{2\nu}$ die Menge aller $x \varepsilon B_2$ mit $\|f(x) - f(b_{2\nu})\| < \varepsilon_2$ bedeutet, $B_{2\nu} U_{b_{2\nu}}$ dicht in $U_{b_{2\nu}}$. Setzen wir dann $\underset{\nu}{S}\, U_{b_{2\nu}} = G_2$, $B_3 = \underset{\nu}{S}\, B_{2\nu} U_{b_{2\nu}} + (B_2 - G_2^0)$, so ist $B_3 \subseteqq B_2$ und es ist auch B_3 eine Kernmenge usw. Wir gelangen so zu einer monoton abnehmenden Folge $((B_n))$ von Kernmengen für f und zu einer monoton wachsenden Mengenfolge $((C_n))$, wo C_n ein ε_n-Netz in B_n; zufolge der Definition von B_{n+1} gibt es zu jedem $a \varepsilon C_n$ eine Umgebung U_a, so daß $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon_n$ für alle $x \varepsilon B_{n+1} U_a$. Wir setzen nun $A = \underset{n}{S}\, C_n$; da B_n dicht und C_n ein ε_n-Netz in B_n, ist wegen $\varepsilon_n \to 0$ auch A dicht. Wir haben noch zu zeigen, daß $A \rceil f$ stetig. Sei $a \varepsilon A$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben; dann gibt es ein n^*, so daß $a \varepsilon C_{n^*}$; da die C_n monoton wachsen, kann wegen $\varepsilon_n \to 0$ angenommen werden: $\varepsilon_{n^*} < \varepsilon$; da $a \varepsilon C_{n^*}$, gibt es eine Umgebung U_a, so daß $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon_{n^*}$ $(< \varepsilon)$ für $x \varepsilon B_{n^*+1} U_a$; da die B_n monoton abnehmen, die C_n monoton wachsen, ist $A \subseteqq B_{n^*+1}$, es gilt also $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$, d. h. $A \rceil f$ ist stetig.

Als Gegenstück zu **27·5·4** zeigen wir noch:

27·5·5. *Ist A separabel, so gibt es eine Funktion f auf A, so daß für keinen Teil A' von A, der die Mächtigkeit $\aleph$ hat, $A' \rceil f$ stetig ist.*

Dies ist trivial, wenn A eine Mächtigkeit $< \aleph$ hat. Wir nehmen also an, die Mächtigkeit von A sei $\geq \aleph$; nach **13·2·1** ist sie dann $= \aleph$. Nach **18·2·5** gibt es $\aleph$ in A offene Mengen, also nach **5·2·48** auch $\aleph$ G_δ in A. Nach **25·7·6** gibt es auf jedem G_δ in A $\aleph$ stetige Funktionen,

und da nach § 5 (2·0) $\aleph^2 = \aleph$ ist, hat auch die Menge aller stetigen Funktionen, deren Bereich ein G_δ in A ist, die Mächtigkeit $\aleph$. Bezeichnet γ die kleinste Ordinalzahl der Mächtigkeit $\aleph$, so können also nach 8·3·2 sowohl die Punkte des $\overline{R}_1$, als auch die Punkte $a \varepsilon A$, als auch die stetigen Funktionen, deren Bereich ein G_δ in A ist, ein-eindeutig den Ordinalzahlen $\xi < \gamma$ zugeordnet werden; seien z_ξ $(\xi < \gamma)$ die sämtlichen Punkte des $\overline{R}_1$, a_ξ $(\xi < \gamma)$ die sämtlichen Punkte $a \varepsilon A$ und f_ξ $(\xi < \gamma)$ die sämtlichen stetigen Funktionen, deren Bereich ein G_δ in A ist; der Bereich von f_ξ werde mit A_ξ bezeichnet. Wir definieren nun vermöge transfiniter Induktion (§ 7, 4) eine Funktion f auf A durch die Festsetzungen: 1. $f(a_0) = z_0$; 2. ist $f(a_{\eta'})$ definiert für alle $\eta' < \eta$ $(< \gamma)$, so sei $f(a_\eta)$ das erste z_ξ, das von allen $f_{\eta'}(a_\eta)$ $(\eta' < \eta,\ a_\eta \varepsilon A_{\eta'})$ verschieden ist (ein solches z_ξ gibt es, weil die Menge der $f_{\eta'}(a_\eta)$ $(\eta' < \eta,\ a_\eta \varepsilon A_{\eta'})$ eine Mächtigkeit $< \aleph$ hat). Sei nun A' ein Teil von A der Mächtigkeit $\aleph$; wir haben zu zeigen, daß $A' \mathrm{l} f$ nicht stetig ist. Angenommen, $A' \mathrm{l} f$ wäre stetig; nach 22·4·3, 22·4·1, 23·4·1 gibt es dann ein $\overline{A} \supseteqq A'$, das ein G_δ in A ist, und eine stetige Funktion g auf $\overline{A}$, so daß $A' \mathrm{l}\, g = A' \mathrm{l} f$. Dann ist g eine unserer Funktionen f_ξ, etwa f_{ξ^*}, und $\overline{A} = A_{\xi^*}$. Da A' die Mächtigkeit $\aleph$, die Menge der a_ξ mit $\xi \leq \xi^*$ eine Mächtigkeit $< \aleph$ hat, gibt es ein $a_{\xi^{**}} \varepsilon A'$ mit $\xi^{**} > \xi^*$; dann aber ist nach Definition von f: $f(a_{\xi^{**}}) \neq f_{\xi^*}(a_{\xi^{**}})$, d. h. $f(a_{\xi^{**}}) \neq g(a_{\xi^{**}})$, was unmöglich, da wegen $a_{\xi^{**}} \varepsilon A'$: $g(a_{\xi^{**}}) = f(a_{\xi^{**}})$.

Literatur: Satz 27·5·2 geht zurück auf W. H. Young Lond. Proc. (2) 8 (1910) S. 118; die Sätze 27·5·3, 27·5·4 stammen von H. Blumberg, Am. Trans. 24 (1922) S. 113; Satz 27·5·5 stammt von W. Sierpiński und A. Zygmund, Fund. math. 4 (1923), S. 316.

6. **Einseitige Hüllen.** Wir beschäftigen uns nun insbesondere mit Funktionen, deren Bereich eine lineare Punktmenge, d. h. eine Punktmenge A des R_1 ist. Die Menge der linksseitigen (bzw. rechtsseitigen) Häufungspunkte von A (§ 24, 2) bezeichnen wir mit A^1_- (bzw. A^1_+); die Menge der beiderseitigen Häufungspunkte ist dann $A^1_- A^1_+$.

27·6·1. *Die Mengen $A^1 - A^1_-$, $A^1 - A^1_+$, $A^1 - A^1_- A^1_+$ sind abzählbar.*

Dies folgt unmittelbar aus 24·2·1.

Sei A eine lineare Punktmenge, f eine Funktion auf A und $a \varepsilon A^1_-$; mit B bezeichnen wir die Menge aller $x \varepsilon A$ mit $x < a$, und setzen $B \mathrm{l} f = g$; dann heißt die Hülle $P^0_g(a)$ von g in a die linksseitige reduzierte Hülle $P^1_{f-}(a)$ (oder kurz $P^1_-(a)$) von f in a. Analog ist die Definition

der rechtsseitigen reduzierten Hülle $P^1_{f+}(a)$ (oder kurz $P^1_+(a)$) von f in a. Offenbar ist $P^1(a) = P^1_-(a) + P^1_+(a)$. Aus **26·1·2** folgt:

27·6·2. *Die Mengen* $P^1_-(a)$, $P^1_+(a)$ *sind abgeschlossen im* $\overline{R}_1$.

An Stelle von **27·5·2** tritt hier der schärfere Satz:

27·6·21. *Die Menge* C *aller* $a \,\varepsilon\, A^1_- A^1_+$, *für die* $P^1_-(a) \neq P^1_+(a)$ *gilt, ist abzählbar.*

Seien $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ die Intervalle $[p, q]$ des $\overline{R}_1$, deren Randpunkte p, q rational oder $= \pm\infty$ sind; sei ferner C_n (bzw. C'_n) die Menge aller $a \,\varepsilon\, A^1_- A^1_+$, für die $P^1_-(a)\, I_n = \Lambda$, $P^1_+(a)\, I_n \supset \Lambda$ (bzw. $P^1_+(a)\, I_n = \Lambda$, $P^1_-(a)\, I_n \supset \Lambda$). Wie beim Beweise von **27·5·2** sieht man, daß $C = \underset{n}{S}(C_n + C'_n)$; es genügt also zu zeigen, daß C_n und C'_n abzählbar; wir zeigen es für C_n. Sei also $a \,\varepsilon\, C_n$; dann ist $P^1_-(a)\, I_n = \Lambda$. Bezeichnen wir mit G die Menge aller $x \,\varepsilon\, A$ mit $x < a$ und setzen $G \,\rceil\, f = g$, so sehen wir, wie beim Beweise von **27·5·2**, daß die Menge aller $x \,\varepsilon\, G^0$, für die $P^0_g(x)\, I_n = \Lambda$ ist, offen in G^0 ist. Daraus folgt, daß es ein Intervall $(a - \sigma, a)$ gibt, so daß auch $P^1_{f+}(x)\, I_n = \Lambda$ für alle $x \,\varepsilon\, (a - \sigma, a)\, A^1_+$; somit ist auch $(a - \sigma, a)\, C_n = \Lambda$. Zu jedem $a \,\varepsilon\, C_n$ gibt es also ein Intervall $(a - \sigma, a)$, so daß $(a - \sigma, a)\, C_n = \Lambda$. Da es aber im R_1 nur abzählbar viele fremde Intervalle gibt, ist C_n abzählbar, w. z. b. w.

Literatur: Satz **27·6·21** stammt von W. H. Young, Quart. Journ. 39 (1907) S. 67; Rend. Linc. 17/1 (1908) S. 582.

7. **Einseitige Schrankenfunktionen.** Sei wieder A eine lineare Punktmenge, f eine Funktion auf A. Da $P^1_-(a)$ und $P^1_+(a)$ nach **27·6·2** abgeschlossen, gibt es unter den Zahlen von $P^1_-(a)$ und von $P^1_+(a)$ je eine größte und eine kleinste; wir bezeichnen sie mit $\overline{f}^1_-(a)$, $\underline{f}^1_-(a)$, $\overline{f}^1_+(a)$, $\underline{f}^1_+(a)$ und nennen sie die linksseitige (bzw. rechtsseitige) obere (bzw. untere) reduzierte Schranke von f in a; betrachtet man sie als Funktionen auf A^1_- (bzw. auf A^1_+), so heißen sie linksseitige (bzw. rechtsseitige) obere (bzw. untere) reduzierte Schrankenfunktion von f.

Sei $a \,\varepsilon\, A^1_-$, sei B die Menge aller $x \,\varepsilon\, A$ mit $x < a$ und $g = B \,\rceil\, f$. Ist dann $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, so heißt b linksseitiger Grenzwert von f in a, in Zeichen: $\lim\limits_{x \to a - 0} f(x)$, oder auch $f(a - 0)$. Analog ist die Definition des rechtsseitigen Grenzwertes $\lim\limits_{x \to a + 0} f(x)$ oder $f(a + 0)$. Wir sagen: f hat in a einen einseitigen Grenzwert, wenn f in a sei es einen rechtsseitigen, sei es einen linksseitigen Grenzwert hat. Ist $a \,\varepsilon\, A^1_- A^1_+$, so ist das Bestehen von $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ gleichbedeutend mit

dem gleichzeitigen Bestehen von $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$ und $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$. Offenbar gilt:

27·7·1. *Ist* $a \varepsilon A_-^1$ *(bzw.* $a \varepsilon A_+^1$*), so ist, damit* $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$ *(bzw.* $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$*) sei, notwendig und hinreichend, daß* $\bar{f}_-^1(a) = \underline{f}_-^1(a) = b$ *(bzw.* $\bar{f}_+^1(a) = \underline{f}_+^1(a) = b$*) sei.*

27·7·2. *Ist* A *eine Youngsche Menge, und ist die Menge* C *aller* $a \varepsilon A_h$ *(bzw. aller* $a \varepsilon A^1$*), in denen* f *einen einseitigen Grenzwert hat, dicht in* A_h *(bzw. in* A^1*), so ist* f *punktweise unstetig.*

Nach **26·5·21** genügt es, zu zeigen: für jedes $k > 0$ ist die Menge B_k aller $a \varepsilon A$ mit $\omega(a) \geq k$ nirgends dicht in A. Da B_k nach **26·3·41** abgeschlossen in A, genügt es weiter zufolge **11·2·51**, zu zeigen: die Menge $A - B_k$ ist dicht in A. Nach **11·1·3** ist also zu zeigen: ist G offen und $A\,G \supset \Lambda$, so gibt es ein $a \varepsilon A\,G$ mit $\omega(a) < k$. Dies ist trivial, wenn $A_j\,G \supset \Lambda$, denn in jedem Punkte $a \varepsilon A_j\,G$ ist $\omega(a) = 0 < k$. Sei also $A_j\,G = \Lambda$, d. h. $A\,G = A_h\,G$. Da $A_h\,G \supset \Lambda$ und offen in A_h, und da C dicht in A_h, gibt es nach **11·1·3** ein $c \varepsilon C\,A_h\,G$. In c hat f einen einseitigen, etwa den linksseitigen Grenzwert; daher gibt es ein Intervall $(c - \sigma, c)$, so daß $A\,(c - \sigma, c) \supset \Lambda$ und $\|f(x') - f(x'')\| \leq \frac{k}{2}$ für alle $x' \varepsilon A\,(c - \sigma, c)$, $x'' \varepsilon A\,(c - \sigma, c)$; dabei können wir sofort annehmen: $(c - \sigma, c) \subseteqq G$. Für jedes $a \varepsilon A\,(c - \sigma, c)$ aber gilt nach **26·3·11**: $\omega(a) \leq \frac{k}{2}$; und da $A\,(c - \sigma, c) \subseteqq A\,G$, gibt es also ein $a \varepsilon A\,G$ mit $\omega(a) < k$, w. z. b. w.

In Anlehnung an **25·6·2** definieren wir: ist $a \varepsilon A\,A_-^1$ (bzw. $a \varepsilon A\,A_+^1$) und gilt $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$ (bzw. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$), so heißt f linksseitig (bzw. rechtsseitig) stetig in a.

Ein Unstetigkeitspunkt a von f heißt von erster Art, wenn, falls $a \varepsilon A_-^1$ ist, ein linksseitiger, und falls $a \varepsilon A_+^1$ ist, ein rechtsseitiger Grenzwert von f in a existiert.

27·7·3. *Sind sämtliche Unstetigkeitspunkte von* f *von erster Art, so hat* f *nur abzählbar viele Unstetigkeitspunkte.*

Wegen **27·6·1** brauchen wir nur die Punkte von $A\,A_-^1\,A_+^1$ in Betracht zu ziehen. Nach **27·7·1** gilt für alle $a \varepsilon A\,A_-^1\,A_+^1$: $\bar{f}_-^1(a) = \underline{f}_-^1(a)$, $\bar{f}_+^1(a) = \underline{f}_+^1(a)$, also zufolge **27·6·21** mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen:

$$\bar{f}_-^1(a) = \underline{f}_-^1(a) = \bar{f}_+^1(a) = \underline{f}_+^1(a), \text{ d. h. } \bar{f}^1(a) = \underline{f}^1(a);$$

da jede Punktmenge des R_1 separabel ist, gilt daher nach **27·2·2** weiter für alle $a \varepsilon A A^1_- A^1_+$ mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen: $\overline{f}^1(a) = \underline{f}^1(a) = f(a)$, d. h. nach **27·2·3** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$; daraus folgt die Behauptung nach **25·6·2.**

Literatur: Satz **27·7·2** stammt von U. Dini, Grundl. f. e. Theorie d. Funkt. einer veränderl. reellen Größe (1892) § 151.

§ 28. Konvergente Funktionenfolgen.

1. Uniforme, einfach-gleichmäßige, völlig uniforme Konvergenz. Wir betrachten nun eine Folge reeller Funktionen f_ν, deren Bereich die Punktmenge A eines metrischen Raumes ist. Ist $a \varepsilon A$ und gibt es ein $b \varepsilon \overline{R}_1$, so daß $f_\nu(a) \to b$, so heißt die Funktionenfolge $((f_\nu))$ konvergent im Punkte a, und der Punkt a heißt ein Konvergenzpunkt von $((f_\nu))$; die übrigen Punkte von A heißen Divergenzpunkte von $((f_\nu))$. Ist die Folge $((f_\nu))$ konvergent in jedem Punkte von A, so heißt sie konvergent (oder ausführlicher: konvergent auf A); dann ist $\lim\limits_{\nu} f_\nu(a)$ eine Funktion auf A, die als die Grenzfunktion der Folge $((f_\nu))$ bezeichnet wird. Wir behandeln nun Bedingungen, unter denen aus der Stetigkeit der Funktionen f_ν einer konvergenten Funktionenfolge die Stetigkeit ihrer Grenzfunktion folgt.

Sei $((f_\nu))$ eine konvergente Folge von Funktionen auf A. Wir sagen: die Folge $((f_\nu))$ konvergiert im Punkte $a \varepsilon A^0$ uniform gegen f, wenn es zu jedem $\delta > 0$ ein ν und eine Umgebung U_a gibt, so daß $\| f_\nu(x) - f(x) \| < \delta$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$. Wir sagen: die Folge $((f_\nu))$ konvergiert im Punkte $a \varepsilon A^0$ einfach-gleichmäßig gegen f, wenn es zu jedem $\delta > 0$ und jedem ν_0 ein $\nu \geq \nu_0$ und eine Umgebung U_a gibt, so daß $\| f_\nu(x) - f(x) \| < \delta$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$. Wir sagen: die Folge $((f_\nu))$ konvergiert im Punkte $a \varepsilon A^0$ völlig uniform gegen f, wenn zu jedem $\delta > 0$ ein ν_δ gehört, so daß es zu jedem $\nu \geq \nu_\delta$ ein $U_{a,\nu}$ gibt, so daß $\| f_\nu(x) - f(x) \| < \delta$ für alle $x \varepsilon A\, U_{a,\nu}$. — Wenn $((f_\nu))$ im Punkte $a \varepsilon A^0$ völlig uniform gegen f konvergiert, so auch einfach-gleichmäßig, und wenn einfach-gleichmäßig, so auch uniform.

28·1·1. *Ist $f = \lim\limits_{\nu} f_\nu$ und sind alle f_ν stetig im Punkte $a \varepsilon A$, so ist, damit auch f stetig sei in a, notwendig und hinreichend, daß $((f_\nu))$ in a uniform (oder einfach-gleichmäßig, oder völlig uniform) gegen f konvergiere.*

Notwendig: Wegen $\lim\limits_{\nu} f_\nu(a) = f(a)$ gibt es ein ν_δ, so daß

$$\| f_\nu(a) - f(a) \| < \frac{\delta}{3} \text{ für } \nu \geq \nu_\delta;$$

weil f und alle f_ν stetig sind, gibt es ein $U_{a,\nu}$, so daß $||f_\nu(x)-f_\nu(a)||<\frac{\delta}{3}$ und $||f(x)-f(a)||<\frac{\delta}{3}$ für alle $x \varepsilon A\, U_{a,\nu}$; also ist: $||f_\nu(x)-f(x)|| \leq ||f_\nu(x)-f_\nu(a)|| + ||f_\nu(a)-f(a)|| + ||f(a)-f(x)|| < \delta$ für alle $\nu \geq \nu_\delta$ und alle $x \varepsilon A\, U_{a,\nu}$; also konvergiert $((f_\nu))$ in a völlig uniform, mithin auch einfach-gleichmäßig und uniform gegen f. Hinreichend: Konvergiert $((f_\nu))$ in a uniform (oder einfach-gleichmäßig, oder völlig uniform) gegen f, so gibt es ein ν und ein U_a, so daß $||f_\nu(x)-f(x)||<\delta$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$; insbesondere ist also $||f_\nu(a)-f(a)||<\delta$; weil f_ν stetig in a, gibt es eine Umgebung U^*_a, so daß $||f_\nu(x)-f_\nu(a)||<\delta$ für alle $x \varepsilon A\, U^*_a$. Also ist $||f(x)-f(a)|| \leq ||f(x)-f_\nu(x)|| + ||f_\nu(x)-f_\nu(a)|| + ||f_\nu(a)-f(a)|| < 3\,\delta$ für alle $x \varepsilon A\, U_a\, U^*_a$, d. h. f ist stetig in a.

28·1·2. *Ist $((f_\nu))$ eine konvergente Funktionenfolge und sind alle f_ν stetig im Punkte $a \varepsilon A$, so sind die Aussagen: „Die Folge $((f_\nu))$ konvergiert in a uniform, bzw. einfach-gleichmäßig, bzw. völlig uniform gegen ihre Grenzfunktion f" äquivalent.*

Denn jede dieser drei Aussagen ist zufolge 28·1·1 äquivalent der Aussage: „f ist stetig in a".

28·1·3. *Konvergiert die Funktionenfolge $((f_\nu))$ im Punkte $a \varepsilon A^1$ uniform gegen ihre Grenzfunktion f und existiert für jedes ν der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f_\nu(x)$, so existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.*

Wegen der uniformen Konvergenz gibt es ein ν und ein U_a, so daß $||f_\nu(x)-f(x)||<\delta$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$; wegen der Existenz von $\lim\limits_{x \to a} f_\nu(x)$ gibt es eine Umgebung U^*_a, so daß $||f_\nu(x')-f_\nu(x'')||<\delta$ für alle $x' \varepsilon A\, U^*_a$, $x'' \varepsilon A\, U^*_a$. Also gilt für alle $x' \varepsilon A\, U_a\, U^*_a$, $x'' \varepsilon A\, U_a\, U^*_a$:

$$||f(x')-f(x'')|| \leq$$
$$||f(x')-f_\nu(x')|| + ||f_\nu(x')-f_\nu(x'')|| + ||f_\nu(x'')-f(x'')|| < 3\,\delta,$$

also existiert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

28·1·31. *Konvergiert die Funktionenfolge $((f_\nu))$ im Punkte $a \varepsilon A^1$ völlig uniform gegen ihre Grenzfunktion f und existiert für jedes ν der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f_\nu(x) = l_\nu$, so existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, und es gilt: $l_\nu \to l$.*

Wegen 28·1·3 ist nur mehr zu zeigen: $l_\nu \to l$. Wegen der völlig uniformen Konvergenz gibt es ein ν_δ und ein $U_{a,\nu}$, so daß $||f_\nu(x)-f(x)||<\delta$ für alle $\nu \geq \nu_\delta$ und alle $x \varepsilon A\, U_{a,\nu}$; daraus folgt: $||l_\nu - l|| \leq \delta$ für alle $\nu \geq \nu_\delta$, d. h. $l_\nu \to l$, w. z. b. w.

Dieser Satz ist ein Spezialfall des Satzes:

28·1·4. *Konvergiert die Funktionenfolge* $((f_\nu))$ *im Punkte* $a \varepsilon A^0$ *(bzw.* $a \varepsilon A^1$*) völlig uniform gegen ihre Grenzfunktion* f*, so gilt für die Hüllen* (§ 26, 1): $\lim_\nu P^0_{f_\nu}(a) = P^0_f(a)$ *(bzw. für die reduzierten Hüllen:* $\lim_\nu P^1_{f_\nu}(a) = P^1_f(a)$*).*

Denn zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein ν_δ und ein $U_{a,\nu}$, so daß $\|f_\nu(x) - f(x)\| < \delta$ für alle $\nu \geq \nu_\delta$ und alle $x \varepsilon A\, U_{a,\nu}$; nach **26·1·3** ist also $e\left(P^0_{f_\nu}(a), P^0_f(a)\right) \leq \delta$ für alle $\nu \geq \nu_\delta$, somit nach **17·1·7** $\lim_\nu P^0_{f_\nu}(a) = \left(P^0_f(a)\right)^0$, und nach **26·1·2** ist $\left(P^0_f(a)\right)^0 = P^0_f(a)$.

Literatur: E. W. Hobson, The theory of functions of a real variable (Cambridge 1907) S. 489; F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre S. 386.

2. **Quasigleichmäßige Konvergenz.** Sei wieder $((f_\nu))$ eine konvergente Funktionenfolge auf A und f ihre Grenzfunktion. Wir sagen: die Folge $((f_\nu))$ konvergiert quasigleichmäßig gegen f, wenn es zu jedem $\delta > 0$ und jedem ν_0 ein $\nu_0' > \nu_0$ gibt, so daß für jedes $x \varepsilon A$ mindestens eine der $\nu_0' - \nu_0 + 1$ Ungleichungen gilt: $\|f_\nu(x) - f(x)\| < \delta$ $(\nu_0 \leq \nu \leq \nu_0')$.

28·2·1. *Konvergiert die Folge* $((f_\nu))$ *quasigleichmäßig gegen* f*, so konvergiert sie in jedem Punkte* $a \varepsilon A$*, in dem alle* f_ν *stetig sind, völlig uniform (und mithin auch einfach-gleichmäßig und uniform) gegen* f*.*

Wegen der Konvergenz von $((f_\nu))$ gibt es ein ν_0, so daß

$$\|f_\nu(a) - f_{\nu_0}(a)\| < \delta \text{ für } \nu \geq \nu_0. \tag{2}$$

Weil die Konvergenz quasigleichmäßig ist, gibt es ein $\nu_0' > \nu_0$, und zu jedem $x \varepsilon A$ einen der Ungleichung $\nu_0 \leq \nu_x \leq \nu_0'$ genügenden Index ν_x, so daß $\|f_{\nu_x}(x) - f(x)\| < \delta$. Wegen der Stetigkeit der f_ν gibt es zufolge (2) ein U_a, so daß $\|f_\nu(x) - f_{\nu_0}(x)\| < \delta$ für $\nu_0 \leq \nu \leq \nu_0'$ und alle $x \varepsilon A\, U_a$. Also gilt für alle $x \varepsilon A\, U_a$:

$$\|f_{\nu_0}(x) - f(x)\| \leq \|f_{\nu_0}(x) - f_{\nu_x}(x)\| + \|f_{\nu_x}(x) - f(x)\| < 2\,\delta,$$

d. h. $((f_\nu))$ konvergiert in a uniform, und somit nach **28·1·2** auch völlig uniform gegen f.

Umgekehrt gilt:

28·2·11. *Ist* A *in sich kompakt und konvergiert die Folge* $((f_\nu))$ *in jedem Punkte* $a \varepsilon A$ *einfach-gleichmäßig (oder völlig uniform) gegen* f*, so konvergiert sie quasigleichmäßig gegen* f*.*

Nach Annahme gibt es zu jedem $\delta > 0$, jedem $a \varepsilon A$ und jedem ν_0 ein U_a und ein $\nu_a \geq \nu_0$, so daß $\|f_{\nu_a}(x) - f(x)\| < \delta$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$. Nach **15·5·11** gibt es im System der $A\, U_a$ ein endliches, A überdeckendes Teilsystem, etwa $A\, U_{a_1}, A\, U_{a_2}, \ldots, A\, U_{a_n}$. Für jedes $x \varepsilon A$ gilt also mindestens eine der

n Ungleichungen: $\|f_{\nu_{a_i}}(x) - f(x)\| < \delta$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, und somit, wenn wir $\max(\nu_{a_1}, \nu_{a_2}, \ldots, \nu_{a_n}) = \nu_0'$ setzen, mindestens eine der Ungleichungen $\|f_\nu(x) - f(x)\| < \delta$ $(\nu_0 \leq \nu \leq \nu_0')$, d. h. $((f_\nu))$ konvergiert quasigleichmäßig gegen f.

28·2·2. *Ist $((f_\nu))$ eine konvergente Folge stetiger Funktionen auf A, so ist, damit auch $f = \lim\limits_\nu f_\nu$ stetig sei, hinreichend und, wenn A in sich kompakt ist, auch notwendig, daß $((f_\nu))$ quasigleichmäßig gegen f konvergiere.*

Notwendig: Dies folgt aus 28·1·1 und 28·2·11. Hinreichend: Dies folgt aus 28·2·1 und 28·1·1.

Literatur: Der Inhalt dieser Nummer geht zurück auf C. Arzelà, Rend. Bol. (1) 19 (1883/84) S. 83; Mem. Bol. (5) 8 (1899/1900) S. 131.

3. **Gleichmäßige Konvergenz in einem Punkte.** Sei wieder $((f_\nu))$ eine konvergente Funktionenfolge auf A und f ihre Grenzfunktion. Wir sagen: die Folge $((f_\nu))$ konvergiert im Punkte $a \varepsilon A^0$ gleichmäßig gegen f, wenn es zu jedem $\delta > 0$ ein ν_δ und eine Umgebung U_a gibt, so daß $\|f_\nu(x) - f(x)\| < \delta$ für alle $\nu \geq \nu_\delta$ und alle $x \varepsilon A\, U_a$. Die Folge $((f_\nu))$ heißt gleichmäßig konvergent im Punkte $a \varepsilon A^0$, wenn es eine Funktion f auf A gibt, so daß $((f_\nu))$ im Punkte a gleichmäßig gegen f konvergiert.

Konvergiert $((f_\nu))$ in a gleichmäßig gegen f, so auch völlig uniform, und mithin auch einfach-gleichmäßig und uniform. Umgekehrt gilt:

28·3·1. *Konvergiert die monotone[1]) Funktionenfolge $((f_\nu))$ im Punkte $a \varepsilon A^0$ uniform (oder einfach-gleichmäßig, oder völlig uniform) gegen f, so konvergiert sie auch gleichmäßig in a gegen f.*

Denn zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein ν_δ und eine Umgebung U_a, so daß $\|f_{\nu_\delta}(x) - f(x)\| < \delta$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$; da $((f_\nu))$ monoton, gilt dann aber auch: $\|f_\nu(x) - f(x)\| < \delta$ für alle $\nu \geq \nu_\delta$ und alle $x \varepsilon A\, U_a$.

In 28·1·1 und 28·1·31 sind die beiden Sätze enthalten:

28·3·2. *Konvergiert $((f_\nu))$ im Punkte $a \varepsilon A$ gleichmäßig gegen f, und sind alle f_ν stetig in a, so ist auch f stetig in a.*

28·3·3. *Konvergiert $((f_\nu))$ im Punkte $a \varepsilon A^1$ gleichmäßig gegen f, und existiert für jedes ν der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f_\nu(x) = l_\nu$, so existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, und es gilt: $l_\nu \to l$.*

---

[1]) Die Funktionenfolge $((f_\nu))$ auf A heißt monoton wachsend (abnehmend), wenn für alle ν und alle $x \varepsilon A$ gilt: $f_{\nu+1}(x) \geqq f_\nu(x)$ $\big($bzw. $f_{\nu+1}(x) \leqq f_\nu(x)\big)$.

28·3·4. *Ist $((f_\nu))$ eine monoton wachsende (bzw. abnehmende) Folge monoton wachsender (bzw. abnehmender) Funktionen*[1]) *im Intervalle (a, b) des $\overline{R}_1$, so konvergiert sie in b gleichmäßig gegen ihre Grenzfunktion. Ist $((f_\nu))$ eine monoton wachsende (bzw. abnehmende) Folge monoton abnehmender (bzw. wachsender) Funktionen im Intervalle (a, b) des $\overline{R}_1$, so konvergiert sie in a gleichmäßig gegen ihre Grenzfunktion.*

Sei $\lim\limits_\nu f_\nu = f$; ebenso wie die f_ν ist auch f monoton wachsend; es existieren also die Grenzwerte $f_\nu(b-0)$, $f(b-0)$. Wir zeigen zunächst: $f_\nu(b-0) \to f(b-0)$. Weil $((f_\nu))$ monoton wächst, gilt jedenfalls $f_\nu(b-0) \leq f(b-0)$ für alle ν; sei sodann $q < f(b-0)$; dann gibt es ein $x \,\varepsilon\, (a, b)$, so daß auch $f(x) > q$; mithin ist auch $f_\nu(x) > q$ für fast alle ν; weil die f_ν monoton wachsen, ist also auch $f_\nu(b-0) > q$ für fast alle ν; d. h. es gilt $f_\nu(b-0) \to f(b-0)$, wie behauptet. Es gibt also ein ν_δ, so daß $\| f_{\nu_\delta}(b-0) - f(b-0) \| < \delta$; wegen

$$\| f_{\nu_\delta}(x) - f(x) \| \leq \| f_{\nu_\delta}(b-0) - f(b-0) \| + \\ \| f_{\nu_\delta}(x) - f_{\nu_\delta}(b-0) \| + \| f(x) - f(b-0) \|$$

gibt es dann auch ein Intervall (c, b), so daß $\| f_{\nu_\delta}(x) - f(x) \| < \delta$ für alle $x \,\varepsilon\, (c, b)$; weil $((f_\nu))$ monoton wachsend, ist dann auch $\| f_\nu(x) - f(x) \| < \delta$ für alle $x \,\varepsilon\, (c, b)$ und alle $\nu \geq \nu_\delta$, d. h. $((f_\nu))$ konvergiert in b gleichmäßig gegen f.

4. **Gleichmäßige Konvergenz.** Ist $((f_\nu))$ eine konvergente Funktionenfolge auf A und f ihre Grenzfunktion, so sagen wir: die Folge $((f_\nu))$ konvergiert gleichmäßig gegen f, wenn es zu jedem $\delta > 0$ ein ν_δ gibt, so daß $\| f_\nu(x) - f(x) \| < \delta$ für alle $x \,\varepsilon\, A$ und alle $\nu \geq \nu_\delta$. Ist $((f_\nu))$ eine Funktionenfolge auf A und gibt es eine Funktion auf A, gegen die $((f_\nu))$ gleichmäßig konvergiert, so heißt die Folge $((f_\nu))$ gleichmäßig konvergent.

28·4·1. *Damit $((f_\nu))$ gleichmäßig konvergent sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem $\delta > 0$ ein ν_δ gebe, so daß $\| f_\nu(x) - f_{\nu'}(x) \| < \delta$ für alle $x \,\varepsilon\, A$ und alle $\nu \geq \nu_\delta$, $\nu' \geq \nu_\delta$.*

Notwendig: Nach Annahme gibt es eine Funktion f, gegen die $((f_\nu))$ gleichmäßig konvergiert; es gibt also ein ν_δ, so daß $\| f_\nu(x) - f(x) \| < \frac{\delta}{2}$ für alle $x \,\varepsilon\, A$ und alle $\nu \geq \nu_\delta$. Also gilt für alle $x \,\varepsilon\, A$ und alle $\nu \geq \nu_\delta$, $\nu' \geq \nu_\delta$:

$$\| f_\nu(x) - f_{\nu'}(x) \| \leq \| f_\nu(x) - f(x) \| + \| f(x) - f_{\nu'}(x) \| < \delta.$$

---

[1]) Eine Funktion g im Intervalle (a, b) des $\overline{R}_1$ heißt monoton wachsend (bzw. abnehmend), wenn aus $a < x < x' < b$ folgt $g(x) \leqq g(x')$ (bzw. $g(x) \geqq g(x')$).

Hinreichend: Jedenfalls ist die Funktionenfolge $((f_\nu))$ konvergent; sei f ihre Grenzfunktion. Da $\|f_\nu(x) - f_{\nu'}(x)\| < \delta$ für alle $x \varepsilon A$ und alle $\nu \geq \nu_\delta$, $\nu' \geq \nu_\delta$, so folgt durch den Grenzübergang $\nu' \to \infty$: $\|f_\nu(x) - f(x)\| \leq \delta$ für alle $x \varepsilon A$ und alle $\nu \geq \nu_\delta$, d. h. $((f_\nu))$ konvergiert gleichmäßig gegen f.

28·4·2. *Damit die Folge $((f_\nu))$ gleichmäßig gegen f konvergiere, ist notwendig und, wenn A in sich kompakt ist, auch hinreichend, daß sie in jedem Punkte $a \varepsilon A$ gleichmäßig gegen f konvergiere.*

Notwendig: Dies ist trivial. Hinreichend: Zu jedem $a \varepsilon A$ gibt es ein ν_a und ein U_a, so daß: $\|f_\nu(x) - f(x)\| < \delta$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$ und alle $\nu \geq \nu_a$. Nach **15·5·11** gibt es im System der $A\, U_a$ ein endliches, A überdeckendes Teilsystem, etwa $A\, U_{a_1}, A\, U_{a_2}, \ldots, A\, U_{a_n}$. Setzen wir $\max(\nu_{a_1}, \nu_{a_2}, \ldots, \nu_{a_n}) = \nu_\delta$, so gilt $\|f_\nu(x) - f(x)\| < \delta$ für alle $\nu \geq \nu_\delta$, d. h. $((f_\nu))$ konvergiert gleichmäßig gegen f.

28·4·3. *Konvergiert $((f_\nu))$ gleichmäßig gegen f, und sind alle f_ν stetig, so ist auch f stetig.*

Dies folgt aus 28·2·2; denn konvergiert $((f_\nu))$ gleichmäßig gegen f, so auch quasigleichmäßig.

Sei (b, c) ein Intervall des $\overline{R}_1$ und sei $f(x, t)$ eine Funktion auf A für jedes $t \varepsilon (b, c)$. Wir sagen: $f(x, t)$ konvergiert für $t \to c - 0$ gleichmäßig gegen die Funktion $f(x)$, wenn es zu jedem $\delta > 0$ ein Intervall (c_δ, c) gibt, so daß $\|f(x, t) - f(x)\| < \delta$ für alle $x \varepsilon A$ und alle $t \varepsilon (c_\delta, c)$. Wir sagen: $f(x, t)$ ist für $t \to c - 0$ gleichmäßig konvergent, wenn es eine Funktion $f(x)$ gibt, gegen die $f(x, t)$ für $t \to c - 0$ gleichmäßig konvergiert. Analog ist die Definition der gleichmäßigen Konvergenz für $t \to b + 0$.

28·4·4. *Damit $f(x, t)$ für $t \to c - 0$ (bzw. für $t \to b + 0$) gleichmäßig konvergent sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem $\delta > 0$ ein Intervall (c_δ, c) (bzw. ein Intervall (b, b_δ)) gebe, so daß $\|f(x, t) - f(x, t')\| < \delta$ für alle $x \varepsilon A$ und alle t und t' aus (c_δ, c) (bzw. aus (b, b_δ)).*

Der Beweis ist analog dem von **28·4·1.**

28·4·5. *Damit $f(x, t)$ für $t \to c - 0$ (bzw. für $t \to b + 0$) gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiere, ist notwendig und hinreichend, daß für jede Folge $((t_\nu))$ aus (b, c) mit $t_\nu \to c$ (bzw. mit $t_\nu \to b$) die Folge der Funktionen $f(x, t_\nu)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiere.*

Notwendig: Nach Annahme gibt es ein Intervall (c_δ, c), so daß $\|f(x, t) - f(x)\| < \delta$ für alle $x \varepsilon A$ und alle $t \varepsilon (c_\delta, c)$; wegen $t_\nu \to c$ aber gibt es ein ν^*, so daß $t_\nu \varepsilon (c_\delta, c)$ für $\nu \geq \nu^*$; also ist: $\|f(x, t_\nu) - f(x)\| < \delta$ für $\nu \geq \nu^*$ und alle $x \varepsilon A$; d. h. die Folge $f(x, t_\nu)$ konvergiert gleichmäßig gegen f. Hinreichend: Sei $((c_\nu))$ eine Folge aus (b, c) mit $c_\nu \to c$. Wenn $f(x, t)$

für $t \to c - 0$ nicht gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert, so gibt es ein $\delta > 0$, und in jedem Intervall (c_ν, c) ein t_ν, so daß nicht $\|f(x, t_\nu) - f(x)\| < \delta$ für alle $x \varepsilon A$ gilt; dann ist $t_\nu \to c$ und die Folge $f(x, t_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen $f(x)$.

28·4·6. *Konvergiert $f(x, t)$ für $t \to c - 0$ (oder für $t \to b + 0$) gleichmäßig gegen $f(x)$, und ist $f(x, t)$ für jedes $t \varepsilon (b, c)$ eine stetige Funktion von x, so ist auch $f(x)$ stetig.*

Dies folgt aus 28·4·5 und 28·4·3.

5. **Der Ungleichmäßigkeitsgrad.** Sei wieder $((f_\nu))$ eine konvergente Funktionenfolge auf A, f ihre Grenzfunktion, und sei $a \varepsilon A^0$. Sei $\chi(a)$ das Infimum aller Zahlen z, zu denen es ein U_a und ein ν^* gibt, so daß $\|f_\nu(x) - f(x)\| < z$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$ und alle $\nu \geq \nu^*$ (solche Zahlen z gibt es sicher: jedes $z > 2$ ist eine solche Zahl); wir nennen $\chi(a)$ den Ungleichmäßigkeitsgrad von $((f_\nu))$ im Punkte a. Es ist $0 \leq \chi(a) \leq 2$; in jedem Punkte $a \varepsilon A_j$ ist $\chi(a) = 0$. Ist $z < \chi(a)$ so gibt es in jeder Umgebung U_a zu jedem ν^* ein $x \varepsilon A\, U_a$ und ein $\nu \geq \nu^*$, so daß $\|f_\nu(x) - f(x)\| \geq z$. Ist $((f_{\nu_i}))$ eine Teilfolge von $((f_\nu))$ und $\chi^*(a)$ der Ungleichmäßigkeitsgrad von $((f_{\nu_i}))$, so ist $\chi^*(a) \leq \chi(a)$.

28·5·1. *Damit $((f_\nu))$ im Punkte $a \varepsilon A^0$ gleichmäßig gegen f konvergiere, ist notwendig und hinreichend, daß $\chi(a) = 0$ sei.*

Denn $\chi(a) = 0$ bedeutet: zu jedem $z > 0$ gibt es ein U_a und ein ν^*, so daß $\|f_\nu(x) - f(x)\| < z$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$ und alle $\nu \geq \nu^*$.

28·5·2. *Für jedes k ist die Menge aller $a \varepsilon A^0$ mit $\chi(a) \geq k$ abgeschlossen.*

Sei B diese Menge und $b \varepsilon B^0$. In jeder Umgebung U_b gibt es ein $a \varepsilon B$; da U_b auch eine Umgebung von a, gibt es wegen $\chi(a) \geq k$ zu jedem $z < k$ und zu jedem ν^* ein $x \varepsilon A\, U_b$ und ein $\nu \geq \nu^*$, so daß $\|f_\nu(x) - f(x)\| \geq z$; also muß $\chi(b) \geq k$ sein; d. h. $b \varepsilon B$. Aus $b \varepsilon B^0$ folgt also $b \varepsilon B$, somit ist B abgeschlossen.

Aus 28·5·2 folgt unmittelbar:

28·5·21. *Für jedes k ist die Menge aller $a \varepsilon A$ mit $\chi(a) \geq k$ abgeschlossen in A und, wenn $k > 0$ ist, auch abgeschlossen in A_h.*

Literatur: Der Ungleichmäßigkeitsgrad wurde eingeführt von W. F. Osgood, Am. Journ. 19 (1897) S. 164.

6. **Verteilung der Punkte ungleichmäßiger Konvergenz.** Ist wieder $((f_\nu))$ eine konvergente Funktionenfolge auf A, so bezeichnen wir auf Grund

von **28·5·1** den Punkt $a \varepsilon A$ als einen Punkt gleichmäßiger oder ungleichmäßiger Konvergenz, je nachdem $\chi(a) = 0$ oder $\chi(a) > 0$.

28·6·1. *Ist $((f_\nu))$ eine konvergente Funktionenfolge auf A, so ist die Menge aller Punkte ungleichmäßiger Konvergenz von $((f_\nu))$ ein F_σ in A und in A_h, und die Menge aller Punkte gleichmäßiger Konvergenz von $((f_\nu))$ ein G_δ in A.*

Der Beweis ist analog dem von **26·4·1** und **26·4·11.**

Die konvergente Funktionenfolge $((f_\nu))$ auf A heißt total ungleichmäßig konvergent, wenn jeder Punkt $a \varepsilon A$ ein Punkt ungleichmäßiger Konvergenz ist.

28·6·2. *Ist $A \supset A$ und insichdicht, und ist $z \neq 0$, so gibt es auf A eine total ungleichmäßig konvergente Folge von Funktionen g_ν, die nur die Werte 0 und z annehmen, mit $\lim_\nu g_\nu = 0$.*

Nach **12·4·61** gibt es eine Zerlegung $A \doteq \underset{\nu}{S} A_\nu$ von A in $\aleph_0$ disjunkte, in A dichte Teile. Sei $g_\nu = z$ auf A_ν, $g_\nu = 0$ auf $A - A_\nu$. Dann ist $\lim_\nu g_\nu(a) = 0$ für alle $a \varepsilon A$, und da $A_\nu U_a \supset A$ ist für jede Umgebung U_a und alle ν, und $g_\nu(x) = z$ ist für alle $x \varepsilon A_\nu$, ist $\chi(a) = \| z - 0 \| > 0$ für alle $a \varepsilon A$.

28·6·21. *Ist B abgeschlossen in A_h und $z \neq 0$, so gibt es auf A eine Folge von Funktionen f_ν, die nur die Werte 0 und z annehmen, mit $\lim_\nu f_\nu = 0$, so daß $\chi(a) > 0$ für $a \varepsilon B$, $\chi(a) = 0$ für $a \varepsilon A - B$.*

Seien B', B'' insichdichter Kern und separierter Bestandteil von B (§ 12, 7). Falls $B' \supset A$, gibt es nach **28·6·2** auf B' eine total ungleichmäßig konvergente Folge von Funktionen g_ν, die nur die Werte 0 und z annehmen, mit $g_\nu \to 0$. Wir definieren nun eine Funktionenfolge $((f_\nu))$ auf A durch: $f_\nu(x) = g_\nu(x)$ für $x \varepsilon B'$; $f_\nu(x) = 0$ für $x \varepsilon B''$; $f_\nu(x) = z$ für $x \varepsilon A - B$ und $xB < \frac{1}{\nu}$; $f_\nu(x) = 0$ für $x \varepsilon A - B$ und $xB \geq \frac{1}{\nu}$. Wir zeigen zunächst, daß für alle $x \varepsilon A$ gilt: $f_\nu(x) \to 0$; dies bedarf eines Beweises nur für $x \varepsilon A - B$; sei also $x \varepsilon A - B$; da B abgeschlossen in A_h, also wegen **12·2·3** auch in A, ist dann nach **10·5·62** $xB > 0$, also $\frac{1}{\nu} \leq xB$ für fast alle ν, also $f_\nu(x) = 0$ für fast alle ν, also $f_\nu(x) \to 0$, wie behauptet. — Nun zeigen wir: $\chi(a) > 0$ für $a \varepsilon B$; wegen $B' \mathbin{\rceil} f_\nu = g_\nu$ ist dies evident für $a \varepsilon B'$; sei also $a \varepsilon B''$ und U_a eine beliebige Umgebung von a; da nach **12·7·2** B_j dicht in B'', gibt es ein $b \varepsilon B_j U_a$, und da $B \subseteqq A_h$, ist auch $b \varepsilon A_h$; aus $b \varepsilon B_j A_h$ folgt aber: es gibt in $A - B$ eine Folge $((x_n))$ mit $x_n \to b$; für jedes ν ist dann $x_n B < \frac{1}{\nu}$ für fast alle n, also $f_\nu(x_n) = z$ für fast alle n; und da wegen $b \varepsilon U_a$ auch $x_n \varepsilon U_a$ für fast alle n ist, und $f_\nu \to 0$ gilt, so ist $\chi(a) = \| z - 0 \| > 0$, wie behauptet. — Nun ist nur mehr zu zeigen: $\chi(a) = 0$ für $a \varepsilon A - B$;

da B abgeschlossen in A_h, und somit in A, ist dann nach **10·5·62**: $a\,B > 0$; für $0 < \varrho < a\,B$ ist dann die Kugel $K_{a\varrho}$ eine Umgebung U_a, für die $\overline{U_a\,B} > 0$; wählen wir ν^* so, daß $\frac{1}{\nu^*} < \overline{U_a\,B}$, so ist $f_\nu(x) = 0$ für alle $x \,\varepsilon\, A\,U_a$ und alle $\nu \geq \nu^*$; wegen $f_\nu \to 0$ ist also auch $\chi(a) = 0$, wie behauptet.

28·6·3. *Ist B ein F_σ in A_h, so gibt es auf A eine konvergente Funktionenfolge $((f_\nu))$, für die jedes $a \,\varepsilon\, B$ ein Punkt ungleichmäßiger, jedes $a \,\varepsilon\, A - B$ ein Punkt gleichmäßiger Konvergenz ist.*

Sei $B = \underset{n}{S}\, B_n$, wo B_n abgeschlossen in A_h. Nach **28·6·21** gibt es auf A eine Folge von Funktionen $f_{n1}, f_{n2}, \ldots, f_{n\mu}, \ldots$, die nur die Werte 0 und $\frac{1}{n}$ annehmen, mit $\lim\limits_{\mu} f_{n\mu} = 0$, für deren Ungleichmäßigkeitsgrad $\chi_n(x)$ gilt: $\chi_n(x) \neq 0$ für $x \,\varepsilon\, B_n$, $\chi_n(x) = 0$ für $x \,\varepsilon\, A - B_n$. Wir ordnen die Doppelfolge der $f_{n\mu}$ in eine einfache Folge $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$, und zeigen zunächst, daß für jedes $x \,\varepsilon\, A$ gilt: $f_\nu(x) \to 0$; sei $\delta > 0$ beliebig gegeben und $n^* > \frac{1}{\delta}$; da $f_{n\mu}$ nur die Werte 0 und $\frac{1}{n}$ annimmt, ist $0 \leq f_{n\mu}(x) < \delta$ für $n > n^*$ und alle μ; und da $\lim\limits_{\mu} f_{n\mu}(x) = 0$, gilt auch für die $f_{n\mu}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots, n^*)$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen: $0 \leq f_{n\mu}(x) < \delta$; es ist also $0 \leq f_\nu(x) < \delta$ für fast alle ν, d. h. $f_\nu(x) \to 0$, wie behauptet. — Nun zeigen wir, daß $\chi(a) > 0$ für jedes $a \,\varepsilon\, B$; ist $a \,\varepsilon\, B$, so gibt es ein n, so daß $a \,\varepsilon\, B_n$; also ist $\chi_n(a) > 0$, und da die Folge $f_{n1}, f_{n2}, \ldots, f_{n\mu}, \ldots$ Teilfolge von $((f_\nu))$ ist, so ist auch $\chi(a) > 0$, wie behauptet. — Nun ist nur mehr zu zeigen: $\chi(a) = 0$ für $a \,\varepsilon\, A - B$; dann ist $\chi_n(a) = 0$ für alle n; sei $\delta > 0$ beliebig gegeben und $n^* > \frac{1}{\delta}$; dann ist $0 \leq f_{n\mu}(x) < \delta$ für $n > n^*$, alle μ und alle $x \,\varepsilon\, A$; und wegen $\chi_n(a) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots, n^*)$ und $\lim\limits_{\mu} f_{n\mu} = 0$ gibt es eine Umgebung U_a und ein μ^*, so daß $|f_{n\mu}(x)| < \delta$ für $n = 1, 2, \ldots, n^*$, $\mu \geq \mu^*$ und alle $x \,\varepsilon\, A\,U_a$; es gilt also für alle f_ν mit höchstens endlich vielen Ausnahmen: $|f_\nu(x)| < \delta$ für alle $x \,\varepsilon\, A\,U_a$; und da $f_\nu \to 0$, folgt daraus $\chi(a) = 0$, wie behauptet.

Literatur: Die Verteilung der Punkte ungleichmäßiger Konvergenz wurde zuerst untersucht von W. H. Young, Lond. Proc. (2) 1 (1904) S. 356.

7. **Punktweise ungleichmäßige Konvergenz.** Eine konvergente Funktionenfolge $((f_\nu))$ auf A heißt punktweise ungleichmäßig konvergent, wenn die Menge ihrer Punkte gleichmäßiger Konvergenz dicht

in A ist; insbesondere ist also jede gleichmäßig konvergente Funktionenfolge auch punktweise ungleichmäßig konvergent.

28·7·1. *Ist $((f_\nu))$ punktweise ungleichmäßig konvergent, so ist für jedes $k > 0$ die Menge aller $a \varepsilon A$ mit $\chi(a) \geq k$ nirgends dicht in A.*

Der Beweis ist, unter Berufung auf **28·5·21**, analog dem von **26·5·1.**

28·7·11. *Ist $((f_\nu))$ punktweise ungleichmäßig konvergent, so ist die Menge aller Punkte ungleichmäßiger Konvergenz von erster Kategorie in A.*

Der Beweis ist analog dem von **26·5·11.**

28·7·2. *Ist $((f_\nu))$ eine konvergente Funktionenfolge auf der Youngschen Menge A, und ist für jedes $k > 0$ die Menge aller $a \varepsilon A$ mit $\chi(a) \geq k$ von erster Kategorie in A, so ist $((f_\nu))$ punktweise ungleichmäßig konvergent.*

Der Beweis ist analog dem von **26·5·21.**

28·7·21. *Ist $((f_\nu))$ eine konvergente Funktionenfolge auf der Youngschen Menge A, so ist, damit $((f_\nu))$ punktweise ungleichmäßig konvergent sei, notwendig und hinreichend, daß die Menge der Punkte gleichmäßiger Konvergenz eine Residualmenge in A sei.*

Dies ergibt sich wie **26·5·23.**

8. **Konvergente Folgen stetiger Funktionen.** Wir behandeln nun insbesondere konvergente Folgen s t e t i g e r Funktionen. Sei E der zugrunde gelegte metrische Raum. Anknüpfend an die Begriffsbildungen von § 19, 5 bezeichnen wir mit E_{II} die Menge aller $x \varepsilon E$, in denen E von zweiter Kategorie ist. Dann gilt:

28·8·1. *Ist $((f_\nu))$ eine konvergente Folge stetiger Funktionen auf E, und ist B_k die Menge aller $x \varepsilon E$ mit $\chi(x) \geq k$, so ist $B_k E_{IIi}$ für jedes $k > 0$ nirgends dicht in E_{IIi}.*

Da $B_k E_{IIi}$ nach **28·5·21** abgeschlossen in E_{IIi}, ist die Behauptung nach **11·2·51** gleichbedeutend mit: die Menge aller $x \varepsilon E_{IIi}$ mit $\chi(x) < k$ ist dicht in E_{IIi}. Nach **11·1·3** ist also zu zeigen: ist G offen und $A \subset G \subseteqq E_{IIi}$, so gibt es ein $a \varepsilon G$ mit $\chi(a) < k$. Wie aus § 25 (3·2) hervorgeht, ist $\|f_{\nu'}(x) - f_{\nu''}(x)\|$ eine stetige Funktion auf E; die Menge aller $x \varepsilon G$ mit $\|f_{\nu'}(x) - f_{\nu''}(x)\| \leq \frac{k}{2}$ ist also nach **25·8·1** abgeschlossen in G; also ist auch die Menge G_ν aller $x \varepsilon G$, in denen $\|f_{\nu'}(x) - f_{\nu''}(x)\| \leq \frac{k}{2}$ ist für alle $\nu' \geq \nu$, $\nu'' \geq \nu$, als Durchschnitt in G abgeschlossener Mengen, abgeschlossen in G. Da aber $((f_\nu))$ konvergent, ist $G = \underset{\nu}{S}\, G_\nu$; und da nach **19·5·4** G von zweiter Kategorie, also nach **19·4·31** auch von zweiter Kategorie in G, ist mindestens ein G_ν nicht nirgends dicht in G; da G_ν abgeschlossen in

G, gibt es dann nach **11·2·111** eine nicht leere, in G (und mithin in E) offene Menge $H \subseteqq G_\nu$; für alle $x \varepsilon H$ gilt nun: $\|f_{\nu'}(x) - f_{\nu''}(x)\| \leq \frac{k}{2}$ für $\nu' \geq \nu$, $\nu'' \geq \nu$; also durch Grenzübergang $\nu'' \to \infty$, wenn $\lim\limits_{\nu} f_\nu = f$ gesetzt wird, auch: $\|f_{\nu'}(x) - f(x)\| \leq \frac{k}{2}$ für alle $x \varepsilon H$ und alle $\nu' \geq \nu$; für jedes $a \varepsilon H$ ist also $\chi(a) \leq \frac{k}{2} < k$, und wegen $H \subseteqq G$ ist auch $a \varepsilon G$, w. z. b. w.

28·8·11. *Ist $((f_\nu))$ eine konvergente Folge stetiger Funktionen auf E, so ist die Menge aller Punkte ungleichmäßiger Konvergenz von $((f_\nu))$ von erster Kategorie in E.*

Es genügt zu zeigen: für jedes $k > 0$ ist die Menge B_k aller $x \varepsilon E$ mit $\chi(x) \geq k$ von erster Kategorie in E. Es ist $B_k = B_k E_{IIi} + B_k(E - E_{IIi})$; hierin ist nach **28·8·1** $B_k E_{IIi}$ nirgends dicht in E_{IIi}, also nach **19·4·8** von erster Kategorie in E; nach **19·5·83** und **19·4·1** ist auch $B_k(E - E_{IIi})$ von erster Kategorie in E; also ist nach **19·4·2** auch B_k von erster Kategorie in E, w. z. b. w.

28·8·12. *Auf einer Youngschen Menge A ist jede konvergente Folge $((f_\nu))$ stetiger Funktionen punktweise ungleichmäßig konvergent.*

Dies folgt (für $A = E$) aus **28·8·11** und **28·7·21.**

28·8·2. *Ist $((f_\nu))$ eine konvergente Folge stetiger Funktionen auf der Youngschen Menge A, und $f = \lim\limits_{\nu} f_\nu$, so ist f punktweise unstetig.*

Dies folgt wegen **26·5·2** aus **28·8·11** und **28·3·2.** — Wir kommen auf diesen Satz in § 37, 1 zurück.

Nach **28·8·11** kann auf einer Youngschen Menge eine konvergente Folge stetiger Funktionen nicht total ungleichmäßig konvergieren; tatsächlich sind auch die Funktionen g_ν von **28·6·2** unstetig. Bei Beschränkung auf Folgen stetiger Funktionen treten an Stelle von **28·6·21**, **28·6·3** die Sätze:

28·8·3. *Ist B abgeschlossen in A_h und nirgends dicht in A, und ist $z > 0$, so gibt es auf A eine Folge stetiger Funktionen f_ν, die der Ungleichung $0 \leq f_\nu \leq z$ genügen, mit $\lim\limits_{\nu} f_\nu = 0$, so daß $\chi(a) > 0$ für $a \varepsilon B$, $\chi(a) = 0$ für $a \varepsilon A - B$.*

Sei $h_\nu(r)$ eine für $r \geq 0$ definierte, der Ungleichung $0 \leq h_\nu \leq z$ genügende, stetige Funktion der reellen Veränderlichen r, die $= 0$ ist für $r = 0$ und für $r \geq \frac{1}{2^\nu}$, und $= z$ ist für $\frac{1}{2^{\nu+2}} \leq r \leq \frac{1}{2^{\nu+1}}$, und sei $f_\nu(x) = h_\nu(xB)$ für $x \varepsilon A$. Dann ist f_ν eine stetige Funktion auf A, und es gilt $f_\nu \to 0$. Sei $a \varepsilon B$; nach **17·8·64** gibt es in $A - B$ eine Punktfolge $((a_n))$ mit $a_n \to a$,

und wir können ohne weiteres annehmen: $a_n a \leq \frac{1}{2^2}$; nach Definition von f_ν gibt es zu jedem n ein ν_n, so daß $\nu_n \to \infty$ und $f_{\nu_n}(a_n) = z$; also ist $\chi(a) > 0$. Sei $a \varepsilon A - B$; da B abgeschlossen in A_h, somit auch in A, ist $aB > 0$; für $0 < \varrho < aB$ ist dann die Kugel $K_{a\varrho}$ eine Umgebung U_a, für die $\overline{U_a\,B} > 0$; wählen wir ν^* so, daß $\frac{1}{2^{\nu^*}} < \overline{U_a\,B}$, so ist $f_\nu(x) = 0$ für $\nu \geq \nu^*$ und alle $x \varepsilon A\,U_a$; also ist $\chi(a) = 0$.

28·8·4. *Ist $B = \underset{n}{S}\, B_n$, wo alle B_n abgeschlossen in A_h und nirgends dicht in A, so gibt es auf A eine konvergente Folge stetiger Funktionen, für die jedes $a \varepsilon B$ ein Punkt ungleichmäßiger, jedes $a \varepsilon A - B$ ein Punkt gleichmäßiger Konvergenz ist.*

Der Beweis ist, unter Berufung auf 28·8·3, analog dem Beweise von 28·6·3.

28·8·5. *Damit es auf E eine total ungleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen gebe, ist notwendig und hinreichend, daß E in sich von erster Kategorie sei.*

Notwendig: Dies folgt aus 28·8·11. Hinreichend: Sei E in sich von erster Kategorie; nach 19·6·2 ist $E = E_h$; aus 19·4·7 folgt: $E = \underset{n}{S}\, B_n$, wo B_n abgeschlossen und nirgends dicht in E. Nun ergibt sich die Behauptung aus 28·8·4.

Literatur: Satz 28·8·11 geht zurück auf W. F. Osgood, Am. Journ. 19 (1897) S. 155; Satz 28·8·2 stammt von R. Baire, Ann. di mat (3) 3 (1899) S. 30; Satz 28·8·5 stammt von W. Hurewicz.

9. Stetige Konvergenz. Sei wieder A Punktmenge eines metrischen Raumes und $((f_\nu))$ eine Funktionenfolge auf A. Wir setzen nun nicht mehr voraus, daß $((f_\nu))$ in jedem Punkte $a \varepsilon A$ konvergent sei.

Die Funktionenfolge $((f_\nu))$ heißt im Punkte $a \varepsilon A^0$ stetig konvergent, wenn für jede Punktfolge $((a_\nu))$ aus A mit $a_\nu \to a$ die Zahlenfolge $((f_\nu(a_\nu)))$ einen Grenzwert (im $\overline{R}_1$) besitzt; in bekannter Weise sieht man, daß dann für alle Folgen $((a_\nu))$ aus A mit $a_\nu \to a$ der Grenzwert der $f_\nu(a_\nu)$ derselbe ist. Ist $a \varepsilon A$ und setzt man $a_\nu = a$, so sieht man: Ist $((f_\nu))$ stetig konvergent im Punkte $a \varepsilon A$, so ist a ein Konvergenzpunkt von $((f_\nu))$, und für jede Folge $((a_\nu))$ aus A mit $a_\nu \to a$ gilt: $\lim_\nu f_\nu(a_\nu) = \lim_\nu f_\nu(a)$. In einem isolierten Punkte a von A ist $((f_\nu))$ dann und nur dann stetig konvergent, wenn a Konvergenzpunkt von $((f_\nu))$ ist.

Machen wir Gebrauch vom Begriff der Hülle einer Funktion (§ 26, 1), so gilt:

28·9·1. *Ist* $((f_\nu))$ *stetig konvergent im Punkte* $a \varepsilon A^0$ *und ist* $b_\nu \varepsilon P^0_{f_\nu}(a)$, *so ist die Folge* $((b_\nu))$ *konvergent im* $\overline{R}_1$, *und zwar gilt für jede Folge* $((a_\nu))$ *aus* A *mit* $a_\nu \to a$: $\lim\limits_\nu b_\nu = \lim\limits_\nu f_\nu(a_\nu)$.

Denn nach **26·1·11** gibt es in $K_{a\frac{1}{\nu}}$ ein $a_\nu \varepsilon A$ mit $\|f_\nu(a_\nu) - b_\nu\| < \frac{1}{\nu}$; dann ist $a_\nu \to a$ und $\lim\limits_\nu b_\nu = \lim\limits_\nu f_\nu(a_\nu)$.

28·9·11. *Ist* $((f_\nu))$ *stetig konvergent im Punkte* $a \varepsilon A$ *und ist* $b_\nu \varepsilon P^0_{f_\nu}(a)$, *so ist* $\lim\limits_\nu b_\nu = \lim\limits_\nu f_\nu(a)$.

Dies folgt aus **28·9·1** für $a_\nu = a$.

28·9·2. *Damit die Folge* $((f_\nu))$ *stetig konvergent sei im Punkte* $a \varepsilon A^0$, *ist notwendig und hinreichend, daß es ein* $b \varepsilon \overline{R}_1$, *und zu jedem* $\delta > 0$ *eine Umgebung* U_a *und ein* ν_δ *gebe, so daß* $\|f_\nu(x) - b\| < \delta$ *für alle* $x \varepsilon A\, U_a$ *und alle* $\nu \geq \nu_\delta$.

Notwendig: Ist $((f_\nu))$ stetig konvergent in a und $b_\nu \varepsilon P^0_{f_\nu}(a)$, so existiert nach **28·9·1** der Grenzwert $b = \lim\limits_\nu b_\nu$. Gäbe es nun nicht zu jedem $\delta > 0$ ein U_a und ein ν_δ, so daß $\|f_\nu(x) - b\| < \delta$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$ und alle $\nu \geq \nu_\delta$, so gäbe es ein $\delta > 0$, eine wachsende Indizesfolge $((\nu_n))$ und ein $a'_n \varepsilon A\, K_{a\frac{1}{n}}$, so daß $\|f_{\nu_n}(a'_n) - b\| \geq \delta$; für eine Folge $((a_\nu))$ aus A mit $a_\nu \to a$, in der $a_{\nu_n} = a'_n$, könnte dann nicht $\lim\limits_\nu f_\nu(a_\nu) = b$ sein, entgegen **28·9·1**. Hinreichend: Ist $((a_\nu))$ eine Folge aus A mit $a_\nu \to a$, so ist $a_\nu \varepsilon A\, U_a$ für fast alle ν, also $\|f_\nu(a_\nu) - b\| < \delta$ für fast alle ν, also $\lim\limits_\nu f_\nu(a_\nu) = b$.

28·9·21. *Ist* a *ein Konvergenzpunkt von* $((f_\nu))$ *und* $\lim\limits_\nu f_\nu(a) = b$, *so ist, damit* $((f_\nu))$ *in* a *stetig konvergent sei, notwendig und hinreichend, daß es zu jedem* $\delta > 0$ *ein* U_a *und ein* ν_δ *gebe, so daß* $\|f_\nu(x) - b\| < \delta$ *für alle* $x \varepsilon A\, U_a$ *und alle* $\nu \geq \nu_\delta$.

Der Beweis ist, unter Berufung auf **28·9·11**, analog dem von **28·9·2**.

Sei $a \varepsilon A^0$; wir bezeichnen mit $\sigma(a)$ das Infimum aller Zahlen z, zu denen es ein U_a und ein ν^* gibt, so daß die Schwankung $\omega_\nu(U_a)$ von f_ν auf $A\, U_a$ (§ 26, 3) $< z$ ist für alle $\nu \geq \nu^*$ (solche Zahlen z gibt es sicher; jedes $z > 2$ ist eine solche Zahl); wir nennen $\sigma(a)$ die Grenzschwankung von $((f_\nu))$ in a. Es ist $0 \leq \sigma(a) \leq 2$; in jedem Punkte $a \varepsilon A_j$ ist $\sigma(a) = 0$. Ist $((f_{\nu_i}))$ Teilfolge von $((f_\nu))$ und ist $\sigma^*(a)$ die Grenzschwankung von $((f_{\nu_i}))$ in a, so ist $\sigma^*(a) \leq \sigma(a)$.

28·9·3. *Damit die Folge* $((f_\nu))$ *stetig konvergent sei im Punkte* $a \varepsilon A^0$, *ist notwendig und, wenn es in jeder Umgebung von* a *einen Konvergenzpunkt von* $((f_\nu))$ *gibt, auch hinreichend, daß* $\sigma(a) = 0$ *sei.*

Notwendig: Sei b die in **28·9·2** auftretende Zahl; dann gibt es zu jedem $z > 0$ ein U_a und ein ν^*, so daß $\|f_\nu(x) - b\| < \frac{z}{3}$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$ und alle $\nu \geq \nu^*$; dann ist $\|f_\nu(x) - f_\nu(x')\| \leq \|f_\nu(x) - b\| + \|b - f_\nu(x')\| < \frac{2}{3} z$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$, $x' \varepsilon A\, U_a$ und alle $\nu \geq \nu^*$; also ist $\omega_\nu(U_a) \leq \frac{2}{3} z < z$ für alle $\nu \geq \nu^*$; da hierin $z > 0$ beliebig war, ist $\sigma(a) = 0$. Hinreichend: Nach Annahme gibt es eine Folge $((a_n))$ von Konvergenzpunkten von $((f_\nu))$ mit $a_n \to a$. Wegen $\sigma(a) = 0$ gibt es eine Umgebung U_a und ein ν^*, so daß $\omega_\nu(U_a) < \delta$ für $\nu \geq \nu^*$. Wegen $a_n \to a$ gibt es ein n^*, so daß $a_n \varepsilon U_a$ für $n \geq n^*$; also ist $\|f_\nu(a_n) - f_\nu(a_{n'})\| < \delta$ für $n \geq n^*$, $n' \geq n^*$ und $\nu \geq \nu^*$; setzen wir $\lim\limits_\nu f_\nu(a_n) = b_n$, so folgt daraus $\|b_n - b_{n'}\| \leq \delta$ für $n \geq n^*$, $n' \geq n^*$, also existiert der Grenzwert $\lim\limits_n b_n = b$. Wir wählen $\bar{n}$ so, daß $a_{\bar{n}} \varepsilon U_a$, $\|b_{\bar{n}} - b\| < \delta$; sodann wählen wir $\bar{\nu} \geq \nu^*$ so, daß $\|f_\nu(a_{\bar{n}}) - b_{\bar{n}}\| < \delta$ für $\nu \geq \bar{\nu}$; wegen $\omega_\nu(U_a) < \delta$ für $\nu \geq \bar{\nu}$ ist dann $\|f_\nu(x) - f_\nu(a_{\bar{n}})\| < \delta$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$; somit ist für alle $x \varepsilon A\, U_a$ und alle $\nu \geq \bar{\nu}$:

$$\|f_\nu(x) - b\| \leq \|f_\nu(x) - f_\nu(a_{\bar{n}})\| + \|f_\nu(a_{\bar{n}}) - b_{\bar{n}}\| + \|b_{\bar{n}} - b\| < 3\delta,$$

also ist $((f_\nu))$ stetig konvergent in a zufolge **28·9·2**.

Bezeichnen wir die Schwankung von f_ν im Punkte a (§ 26, 3) mit $\omega_\nu(a)$, so gilt:

28·9·31. *Damit die Folge $((f_\nu))$ stetig konvergent sei im Punkte $a \varepsilon A^0$, ist notwendig, daß $\lim\limits_\nu \omega_\nu(a) = 0$ sei.*

Nach **28·9·3** ist $\sigma(a) = 0$; also gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein U_a und ein ν^*, so daß $\omega_\nu(U_a) < \delta$ für alle $\nu \geq \nu^*$; aus **26·3·1** folgt $\omega_\nu(a) \leq \omega_\nu(U_a)$; also ist auch $\omega_\nu(a) < \delta$ für alle $\nu \geq \nu^*$, d. h. es gilt $\omega_\nu(a) \to 0$.

28·9·4. *Ist die konvergente Folge $((f_\nu))$ stetig konvergent im Punkte $a \varepsilon A^0$, so ist sie auch gleichmäßig konvergent in a.*

Sei $\lim\limits_\nu f_\nu(x) = f(x)$. Nach **28·9·2** gibt es ein b und zu jedem $\delta > 0$ ein U_a und ein ν_δ, so daß $\|f_\nu(x) - b\| < \delta$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$ und alle $\nu \geq \nu_\delta$; daraus folgt durch $\nu \to \infty$: $\|f(x) - b\| \leq \delta$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$. Also ist $\|f_\nu(x) - f(x)\| \leq \|f_\nu(x) - b\| + \|b - f(x)\| < 2\delta$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$ und alle $\nu \geq \nu_\delta$, d. h. $((f_\nu))$ ist gleichmäßig konvergent in a.

28·9·41. *Ist $((f_\nu))$ eine konvergente Funktionenfolge auf A, und ist $((f_\nu))$ gleichmäßig konvergent im Punkte $a \varepsilon A^0$, so ist, damit $((f_\nu))$ auch stetig konvergent sei in a, notwendig und hinreichend, daß $\underline{\lim}_\nu\, \omega_\nu(a) = 0$ sei.*

Notwendig: Dies folgt aus **28·9·31.** Hinreichend: Sei $\lim\limits_{\nu} f_\nu(x) = f(x)$; nach Annahme gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein ν_δ und ein U_a, so daß $\|f_\nu(x) - f(x)\| < \delta$ für alle $x \,\varepsilon\, A\, U_a$ und alle $\nu \geq \nu_\delta$. Ferner gibt es nach Annahme ein $\nu^* \geq \nu_\delta$, so daß $\omega_{\nu^*}(a) < \delta$; nach **26·3·11** gibt es eine Umgebung U_a^*, so daß $\|f_{\nu^*}(x') - f_{\nu^*}(x'')\| < \delta$ für alle $x' \,\varepsilon\, A\, U_a^*$, $x'' \,\varepsilon\, A\, U_a^*$; dann ist für alle $x' \,\varepsilon\, A\, U_a\, U_a^*$, $x'' \,\varepsilon\, A\, U_a\, U_a^*$: $\|f(x') - f(x'')\| \leq \|f(x') - f_{\nu^*}(x')\| + \|f_{\nu^*}(x') - f_{\nu^*}(x'')\| + \|f_{\nu^*}(x'') - f(x'')\| < 3\,\delta$, und mithin für alle $x' \,\varepsilon\, A\, U_a\, U_a^*$, $x'' \,\varepsilon\, A\, U_a\, U_a^*$ und alle $\nu \geq \nu_\delta$: $\|f_\nu(x') - f_\nu(x'')\| \leq \|f_\nu(x') - f(x')\| + \|f(x') - f(x'')\| + \|f(x'') - f_\nu(x'')\| < 5\,\delta$. Also gilt für die Schwankung $\omega_\nu(U_a\, U_a^*)$ von f_ν auf $A\, U_a\, U_a^*$: $\omega_\nu(U_a\, U_a^*) \leq 5\,\delta$ für $\nu \geq \nu_\delta$. Da hierin $\delta > 0$ beliebig war, ist $\sigma(a) = 0$; also ist $((f_\nu))$ stetig konvergent in a nach **28·9·3.**

28·9·5. *Ist $((f_\nu))$ stetig konvergent im Punkte $a \,\varepsilon\, A$, so sind $\overline{\lim\limits_{\nu}} f_\nu$ und $\underline{\lim\limits_{\nu}} f_\nu$ stetig in a.*

Wir setzen: $\lim\limits_{\nu} f_\nu(a) = b$ und $\overline{\lim\limits_{\nu}} f_\nu = \bar f$; dann ist $\bar f(a) = b$; nach **28·9·21** gibt es ein U_a und ein ν_δ, so daß $\|f_\nu(x) - \bar f(a)\| < \delta$ für alle $x \,\varepsilon\, A\, U_a$ und alle $\nu \geq \nu_\delta$; daraus folgt: $\|\bar f(x) - \bar f(a)\| \leq \delta$ für alle $x \,\varepsilon\, A\, U_a$, d. h. $\bar f$ ist stetig in a.

In **28·9·5** ist enthalten:

28·9·51. *Ist $((f_\nu))$ eine konvergente Funktionenfolge auf A, und ist sie stetig konvergent im Punkte $a \,\varepsilon\, A$, so ist auch $\lim\limits_{\nu} f_\nu$ stetig in a.*

Literatur: C. Carathéodory, Math. Ann. 101 (1929) S. 515.

10. **Der Wertebereich einer Folge stetiger Funktionen.** Sei $((f_\nu))$ eine Folge von Funktionen auf A; die Menge der Zahlenfolgen $\big((f_\nu(a))\big)$ (für alle $a \,\varepsilon\, A$) bezeichnen wir als den Wertebereich der Funktionenfolge $((f_\nu))$.

Seien $((a_\nu))$ und $((b_\nu))$ zwei Zahlenfolgen; wie in § 8, 4 schreiben wir: $((a_\nu)) = ((b_\nu))$, bzw. $((a_\nu)) > ((b_\nu))$, bzw. $((a_\nu)) < ((b_\nu))$, wenn $a_\nu = b_\nu$, bzw. $a_\nu > b_\nu$, bzw. $a_\nu < b_\nu$ für fast alle ν gilt.

Eine Menge M von Zahlenfolgen heißt nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, wenn es eine Folge endlicher Zahlen $((c_\nu))$ gibt, so daß $((a_\nu)) \leq ((c_\nu))$ $\big($bzw. $((a_\nu)) \geq ((c_\nu))\big)$ für alle $((a_\nu)) \,\varepsilon\, M$; sie heißt beschränkt, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Eine Menge M von Zahlenfolgen heißt nach oben (bzw. nach unten) halbbeschränkt, wenn es eine Folge endlicher Zahlen $((c_\nu))$ gibt, so daß für kein $((a_\nu)) \,\varepsilon\, M$ gilt $((a_\nu)) > ((c_\nu))$ $\big($bzw. $((a_\nu)) < ((c_\nu))\big)$; sie heißt halbbeschränkt, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten halbbe-

schränkt ist. Jede beschränkte Menge von Zahlenfolgen ist auch halbbeschränkt, aber nicht umgekehrt.

Wir beweisen nun zwei Sätze, die das Analogon von **25·7·22** für Funktionenfolgen darstellen (man beachte dabei, daß in **25·7·22** die Bedingung, A sei in sich kompakt, zufolge **15·5·11** ersetzt werden kann durch die Bedingung: in jedem Überdeckungssysteme von A gibt es ein endliches, A überdeckendes Teilsystem.)

28·10·1. *Damit für jede Folge* $((f_\nu))$ *stetiger und endlicher Funktionen auf* A *der Wertebereich halbbeschränkt sei, ist hinreichend und, wenn* A *separabel ist, auch notwendig, daß es zu jeder Folge* A *überdeckender Systeme* $((\mathfrak{B}_\nu))$ *eine Auswahlüberdeckung gebe.*

Notwendig: Beim Beweise können wir offenbar A durch eine homöomorphe Menge ersetzen; wir können also zufolge **14·2·1, 14·2·41, 14·3·3** annehmen: $A \subseteqq Q_\omega$. Sei $((\mathfrak{B}_\nu))$ eine Folge A überdeckender Systeme; da jede Menge $B \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_\nu$ offen in A, kann jeder Menge $B \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_\nu$ eine in Q_ω offene Menge G so zugeordnet werden, daß $B = A\,G$; das System der so den Mengen von $\mathfrak{B}_\nu$ zugeordneten Mengen G heiße $\mathfrak{G}_\nu$; die Summe G_ν aller Mengen $G \,\varepsilon\, \mathfrak{G}_\nu$ ist offen in Q_ω, also $F_\nu = Q_\omega - G_\nu$ abgeschlossen in Q_ω. Setzen wir für $x \,\varepsilon\, Q_\omega$: $g_\nu(x) = x\,F_\nu$, falls $F_\nu \supset A$, und $g_\nu(x) = 1$, falls $F_\nu = A$, so ist nach **25·7·1** g_ν eine stetige Funktion auf Q_ω; da $\mathfrak{B}_\nu$ ein Überdeckungssystem von A, ist $A \subseteqq G_\nu$, also $A\,F_\nu = A$, also nach **10·5·62** $g_\nu(x) = x\,F_\nu > 0$ für alle $x \,\varepsilon\, A$; setzen wir $f_\nu(x) = \dfrac{1}{g_\nu(x)}$ für $x \,\varepsilon\, A$, so ist also $((f_\nu))$ eine Folge stetiger, endlicher Funktionen auf A. Nach Annahme ist also der Wertebereich von $((f_\nu))$ halbbeschränkt, d. h. es gibt eine Folge $((c_\nu))$ positiver endlicher Zahlen, so daß in jedem Punkte $x \,\varepsilon\, A$: $f_\nu(x) \leq c_\nu$ für unendlich viele ν; bezeichnet also C_ν die Menge aller $x \,\varepsilon\, Q_\omega$ mit $g_\nu(x) \geq \dfrac{1}{c_\nu}$, so ist $A \subseteqq \underset{\nu}{S}\, C_\nu$, und nach Definition von g_ν ist $C_\nu \subseteqq G_\nu$; nach **25·8·1** ist C_ν abgeschlossen in Q_ω, und da Q_ω nach **20·2·83** in sich kompakt, ist nach **15·2·3** auch C_ν in sich kompakt. Da G_ν die Summe aller $G \,\varepsilon\, \mathfrak{G}_\nu$ war, ist wegen $C_\nu \subseteqq G_\nu$ das System der Mengen $G\,C_\nu$ $(G \,\varepsilon\, \mathfrak{G}_\nu)$ ein Überdeckungssystem von C_ν; es gibt also im Systeme der Mengen $G\,C_\nu$ $(G \,\varepsilon\, \mathfrak{G}_\nu)$ nach **15·5·11** ein endliches C_ν überdeckendes Teilsystem; mithin gibt es in $\mathfrak{B}_\nu$ endlich viele Mengen, deren Summe $B_\nu \supseteqq A\,C_\nu$ ist; und wegen $A \subseteqq \underset{\nu}{S}\, C_\nu$ ist $B_1, B_2, \ldots, B_\nu, \ldots$ eine Auswahlüberdeckung aus $((\mathfrak{B}_\nu))$. Hinreichend: Sei $((f_\nu))$ eine Folge stetiger, endlicher Funktionen auf A, und sei $B_{\nu n}$ die Menge aller $x \,\varepsilon\, A$ mit $f_\nu < n$; nach **25·8·1** ist $B_{\nu n}$ offen in A, und da $A = \underset{n}{S}\, B_{\nu n}$, bilden die Mengen $B_{\nu 1}, B_{\nu 2}, \ldots, B_{\nu n}, \ldots$ ein Überdeckungssystem.

$\mathfrak{B}_\nu$ von A. Nach Annahme gibt es zu jeder Folge von Überdeckungssystemen von A eine Auswahlüberdeckung, also gibt es nach **15·5·21** zur Folge $((\mathfrak{B}_\nu))$ von Überdeckungssystemen von A eine Auswahlüberdeckung $B_1, B_2, \ldots, B_\nu, \ldots$, so daß für jedes $x \varepsilon A$ gilt: $x \varepsilon B_\nu$ für unendlich viele ν. Nun ist B_ν Summe endlich vieler Mengen aus $\mathfrak{B}_\nu$, etwa $B_\nu = B_{\nu n_1} + B_{\nu n_2} + \ldots + B_{\nu n_\nu}$ $(n_1 < n_2 < \ldots < n_\nu)$; nach Definition von $B_{\nu n}$ ist dann $f_\nu(x) < n_\nu$ für alle $x \varepsilon B_\nu$; für jedes $x \varepsilon A$ gilt also $f_\nu(x) < n_\nu$ für unendlich viele ν; für kein $x \varepsilon A$ ist also $\big((f_\nu(x))\big) > ((n_\nu))$, d. h. der Wertebereich von $((f_\nu))$ ist nach oben halbbeschränkt; ebenso zeigt man, daß er nach unten halbbeschränkt.

28·10·2. *Damit für jede Folge $((f_\nu))$ stetiger und endlicher Funktionen auf A der Wertebereich beschränkt sei, ist hinreichend und, wenn A separabel ist, auch notwendig, daß es zu jeder Folge A überdeckender Systeme $((\mathfrak{B}_\nu))$ eine Auswahlüberdeckung $B_1, B_2, \ldots, B_\nu, \ldots$ gebe, so daß für jedes $x \varepsilon A$ gilt: $x \varepsilon B_\nu$ für fast alle ν.*

Notwendig: Der Beweis ist analog wie bei **28·10·1**; nur kann jetzt die Folge $((c_\nu))$ so gewählt werden, daß in jedem Punkte $x \varepsilon A$ gilt: $f_\nu(x) \leqq c_\nu$ für fast alle ν; für jeden Punkt $x \varepsilon A$ gilt also $x \varepsilon C_\nu$ für fast alle ν; und da $A\, C_\nu \subseteqq B_\nu$, gilt auch $x \varepsilon B_\nu$ für fast alle ν. Hinreichend: Der Beweis ist analog wie bei **28·10·1**, nur daß hier für jedes $x \varepsilon A$ gilt: $x \varepsilon B_\nu$ für fast alle ν, und somit auch $f_\nu(x) < n_\nu$ für fast alle ν, d. h. $\big((f_\nu(x))\big) < ((n_\nu))$.

Literatur: Der Inhalt dieser Nummer stammt von W. Hurewicz, Fund. Math. 9 (1927) S. 193.

§ 29. Funktionenmengen.

1. **Grenzschwankung.** Sei A Punktmenge eines metrischen Raumes und $\mathfrak{M}$ eine Menge von Funktionen auf A. In Analogie zum Begriffe der Grenzschwankung einer Funktionenfolge (§ 28, 9) definieren wir: ist $a \varepsilon A^0$, so werde mit $\sigma(a)$ das Infimum aller Zahlen z bezeichnet, zu denen es ein U_a gibt, so daß die Schwankung $\omega_f(U_a)$ von f auf $A\, U_a$ (§ 26, 3) $< z$ ist für alle $f \varepsilon \mathfrak{M}$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen; wir nennen $\sigma(a)$ die Grenzschwankung von $\mathfrak{M}$ in a.

Für jedes $x \varepsilon A$ bezeichnen wir mit $\overline{\lim\limits_{f \varepsilon \mathfrak{M}}} f(x)$ (bzw. mit $\underline{\lim\limits_{f \varepsilon \mathfrak{M}}} f(x)$) das Supremum (bzw. das Infimum) aller z, zu denen es unendlich viele $f \varepsilon \mathfrak{M}$ mit $f(x) \geqq z$ (bzw. mit $f(x) \leqq z$) gibt. Wir setzen abkürzend $\overline{\lim\limits_{f \varepsilon \mathfrak{M}}} f(x) = \bar{f}(x)$, $\underline{\lim\limits_{f \varepsilon \mathfrak{M}}} f(x) = \underline{f}(x)$; dann gilt für die Schwankungsfunktionen (§ 26, 3) $\bar{\omega}(x)$ und $\underline{\omega}(x)$ von $\bar{f}(x)$ bzw. $\underline{f}(x)$:

29·1·1. *In jedem Punkte* $a \varepsilon A^0$ *ist* $\overline{\omega}(a) \leq \sigma(a)$, $\underline{\omega}(a) \leq \sigma(a)$.

Es genügt zu zeigen: aus $y < \overline{\omega}(a)$ folgt $y \leq \sigma(a)$. Ist $y < \overline{\omega}(a)$, so gibt es nach **26·3·11** in jeder Umgebung U_a ein $a' \varepsilon A\, U_a$ und ein $a'' \varepsilon A\, U_a$, so daß $\| \bar{f}(a') - \bar{f}(a'') \| > y$; sei etwa $\bar{f}(a') > \bar{f}(a'')$; dann gibt es Zahlen y', y'', so daß $\bar{f}(a') > y' > y'' > \bar{f}(a'')$ und $\| y' - y'' \| > y$; nach Definition von $\bar{f}(a')$ gibt es unendlich viele $f \varepsilon \mathfrak{M}$ mit $f(a') \geq y'$, und nach Definition von $\bar{f}(a'')$ gibt es höchstens endlich viele $f \varepsilon \mathfrak{M}$ mit $f(a'') \geq y''$; also gibt es unendlich viele $f \varepsilon \mathfrak{M}$ mit $\| f(a') - f(a'') \| \geq \| y' - y'' \| > y$; also gibt es unendlich viele $f \varepsilon \mathfrak{M}$ mit $\omega_f(U_a) > y$, also ist $y \leq \sigma(a)$, w. z. b. w.

Literatur: Der Begriff der Grenzschwankung stammt von C. Carathéodory, Math. Ann. 101 (1929) S. 527.

2. **Gleichgradige Stetigkeit.** Sei wieder $\mathfrak{M}$ eine Menge von Funktionen auf A; dann heißt $\mathfrak{M}$ gleichgradig stetig im Punkte $a \varepsilon A$, wenn es zu jedem $\delta > 0$ ein U_a gibt, so daß $\| f(x) - f(a) \| < \delta$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$ und alle $f \varepsilon \mathfrak{M}$. Die Folge $((f_\nu))$ von Funktionen auf A heißt gleichgradig stetig im Punkte $a \varepsilon A$, wenn es zu jedem $\delta > 0$ ein U_a gibt, so daß $\| f_\nu(x) - f_\nu(a) \| < \delta$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$ und alle ν.

Ist die Funktionenmenge $\mathfrak{M}$ (die Funktionenfolge $((f_\nu))$) gleichgradig stetig in a, so auch jeder Teil von $\mathfrak{M}$ (jede Teilfolge von $((f_\nu))$); fügt man zu einer in a gleichgradig stetigen Funktionenmenge (Funktionenfolge) endlich viele in a stetige Funktionen hinzu, so bleibt sie gleichgradig stetig in a. Ist die Funktionenmenge $\mathfrak{M}$ gleichgradig stetig in a, so auch jede Funktionenfolge $((f_\nu))$ aus $\mathfrak{M}$. Ist die Funktionenmenge $\mathfrak{M}$ (die Funktionenfolge $((f_\nu))$) gleichgradig stetig in a, so ist jedes $f \varepsilon \mathfrak{M}$ (jedes f_ν) stetig in a — aber nicht umgekehrt.

29·2·1. *Damit die Funktionenmenge* $\mathfrak{M}$ *gleichgradig stetig sei im Punkte* $a \varepsilon A$, *ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem* $\delta > 0$ *eine Umgebung* U_a *gebe, so daß* $\omega_f(U_a) < \delta$ *für alle* $f \varepsilon \mathfrak{M}$.

Notwendig: Ist $\mathfrak{M}$ gleichgradig stetig in a, so gibt es ein U_a, so daß $\| f(x) - f(a) \| < \frac{\delta}{3}$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$ und alle $f \varepsilon \mathfrak{M}$; für alle $x \varepsilon A\, U_a$, $x' \varepsilon A\, U_a$ und alle $f \varepsilon \mathfrak{M}$ ist dann $\| f(x) - f(x') \| \leq \| f(x) - f(a) \| + \| f(a) - f(x')) \| < \frac{2\delta}{3}$, also $\omega_f(U_a) \leq \frac{2\delta}{3} < \delta$. Hinreichend: Aus $\omega_f(U_a) < \delta$ folgt $\| f(x) - f(a) \| < \delta$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$.

29·2·2. *Damit die Menge* $\mathfrak{M}$ *(die Folge* $((f_\nu))$*) im Punkte* $a \varepsilon A$ *stetiger Funktionen gleichgradig stetig sei im Punkte* a, *ist notwendig und hinreichend, daß* $\sigma(a) = 0$ *sei.*

Notwendig: Dies folgt unmittelbar aus **29·2·1**. Hinreichend: Ist $\sigma(a) = 0$, so gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein U_a, so daß $\omega_f(U_a) < \delta$ für alle $f \varepsilon \mathfrak{M}$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen; seien $f_1, f_2, \ldots, f_n$ diese Ausnahmen. Da die Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ stetig in a, gibt es eine Umgebung $U_a^* \subseteqq U_a$, so daß $\|f_i(x) - f_i(a)\| < \delta$ für alle $x \varepsilon A\, U_a^*$ und für $i = 1, 2, \ldots, n$: da aus $\omega_f(U_a) < \delta$ folgt: $\|f(x) - f(a)\| < \delta$ für alle $x \varepsilon A\, U_a^*$, so gilt nun $\|f(x) - f(a)\| < \delta$ für alle $x \varepsilon A\, U_a^*$ und alle $f \varepsilon \mathfrak{M}$, d. h. $\mathfrak{M}$ ist gleichgradig stetig in a.

29·2·21. *Ist $((f_\nu))$ eine im Punkte $a \varepsilon A$ konvergente Folge stetiger Funktionen auf A, so ist, damit sie gleichgradig stetig sei in a, notwendig und hinreichend, daß sie stetig konvergent sei in a.*

Dies folgt aus **29·2·2** und **28·9·3**.

29·2·3. *Ist $\mathfrak{M}$ eine im Punkte $a \varepsilon A$ gleichgradig stetige Menge von Funktionen auf A, so sind die beiden Funktionen $\sup\limits_{f \varepsilon \mathfrak{M}} f(x)$ und $\inf\limits_{f \varepsilon \mathfrak{M}} f(x)$ stetig in a.*

Wir setzen $\sup\limits_{f \varepsilon \mathfrak{M}} f(x) = f^*(x)$ und bezeichnen die Schwankungsfunktion (§ 26, 3) von f^* mit $\omega(x)$. Nach **26·3·2** ist zu zeigen: $\omega(a) = 0$. Wäre $\omega(a) > 0$, $0 < \delta < \omega(a)$, so gäbe es in jeder Umgebung U_a ein $a' \varepsilon A\, U_a$ und ein $a'' \varepsilon A\, U_a$, so daß $\|f^*(a') - f^*(a'')\| > \delta$; sei etwa $f^*(a') > f^*(a'')$; dann gibt es Zahlen y', y'', so daß $f^*(a') > y' > y'' > f^*(a'')$ und $\|y' - y''\| > \delta$; nach Definition von $f^*(a')$ gibt es ein $f \varepsilon \mathfrak{M}$ mit $f(a') > y'$, und nach Definition von $f^*(a'')$ ist $f(a'') < y''$; dann aber ist $\omega_f(U_a) > \|y' - y''\| > \delta$; zu jeder Umgebung U_a gäbe es also ein $f \varepsilon \mathfrak{M}$ mit $\omega_f(U_a) > \delta$, im Widerspruche mit **29·2·1**.

Aus **29·2·2** und **29·1·1** folgt:

29·2·4. *Ist $\mathfrak{M}$ eine im Punkte $a \varepsilon A$ gleichgradig stetige Menge von Funktionen auf A, so sind die beiden Funktionen $\varliminf\limits_{f \varepsilon \mathfrak{M}} f(x)$ und $\varlimsup\limits_{f \varepsilon \mathfrak{M}} f(x)$ stetig in a.*

Literatur: Der Begriff der gleichgradigen Stetigkeit stammt von G. Ascoli, Mem. Linc. 18 (1883) S. 545. Satz **29·2·3** stammt von C. Arzelà, Mem. Bol. (5) 5 (1895) S. 225, Satz **29·2·4** von P. Montel, Ann. Éc. Norm. (3) 24 (1907) S. 261.

3. **Der normale Kern.** Sei $\mathfrak{M}$ eine Menge von Funktionen (bzw. sei $((f_\nu))$ eine Folge von Funktionen) auf A; ist $a \varepsilon A^0$ und ist die Grenzschwankung (§ 29, 1; § 28, 9) $\sigma(a) = 0$, so sagt man: $\mathfrak{M}$ (bzw. $((f_\nu))$) ist normal in a; die Menge aller $a \varepsilon A$, in denen $\mathfrak{M}$ (bzw. $((f_\nu))$) normal ist, heißt der (für $\mathfrak{M}$, bzw. für $((f_\nu))$) normale Kern von A.

29·3·1. *Ist $((f_\nu))$ eine Funktionenfolge auf A, ist B der für $((f_\nu))$ normale Kern von A und C eine separable Menge $\subseteqq B$, so gibt es in $((f_\nu))$ eine Teilfolge $((f_{\nu_i}))$, die in jedem Punkte $a \varepsilon C$ stetig konvergent ist.*

Sei $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ ein abzählbarer in C dichter Teil von C. Nach **17·3·531** gibt es, da der $\overline{R}_1$ kompakt ist, in $((f_\nu))$ eine Teilfolge $((f_\nu^1))$, für die $\lim\limits_\nu f_\nu^1(a_1)$ existiert, in $((f_\nu^1))$ gibt es eine Teilfolge, für die $\lim\limits_\nu f_\nu^2(a_2)$ existiert usf.; man erhält so eine Folge von Folgen $((f_\nu^1)), ((f_\nu^2)), \ldots, ((f_\nu^n)), \ldots$, in der $((f_\nu^{n+1}))$ Teilfolge von $((f_\nu^n))$ ist, und es existieren die Grenzwerte: $\lim\limits_\nu f_\nu^n(a_1)$, $\lim\limits_\nu f_\nu^n(a_2), \ldots, \lim\limits_\nu f_\nu^n(a_n)$. Offenbar ist dann $f_1^1, f_2^2, \ldots, f_\nu^\nu, \ldots$ eine Teilfolge von $((f_\nu))$, für die in jedem Punkte a_n der Grenzwert $\lim\limits_\nu f_\nu^\nu(a_n)$ existiert; es ist also jeder Punkt a_n Konvergenzpunkt von $((f_\nu^\nu))$. Sei $a \,\varepsilon\, C$; da $\sigma(a) = 0$, gilt auch für die Grenzschwankung $\sigma^*(a)$ der Teilfolge $((f_\nu^\nu))$ von $((f_\nu))$: $\sigma^*(a) = 0$; weil die Menge der Punkte a_n dicht in C, gibt es in jeder Umgebung U_a einen Punkt a_n; also ist $((f_\nu^\nu))$ stetig konvergent in a nach **28·9·3**.

29·3·11. *Ist $((f_\nu))$ eine Funktionenfolge auf A, ist B der für $((f_\nu))$ normale Kern von A und $a \,\varepsilon\, A - B$, so gibt es in $((f_\nu))$ eine Teilfolge $((f_{\nu_n}))$, die keine im Punkte a stetig konvergente Teilfolge enthält.*

Wegen $a \,\varepsilon\, A - B$ ist $\sigma(a) > 0$; sei $0 < \delta < \sigma(a)$; dann gibt es nach Definition von $\sigma(a)$ eine wachsende Indizesfolge $((\nu_n))$, so daß, wenn $\omega_\nu(M)$ die Schwankung von f_ν auf $A\,M$ bezeichnet: $\omega_{\nu_n}\left(K_{a\frac{1}{n}}\right) \geq \delta$; ist dann U_a eine beliebige Umgebung von a, so gilt für fast alle Funktionen der Folge $((f_{\nu_n}))$: $\omega_{\nu_n}(U_a) \geq \delta$, also kann für keine Teilfolge von $((f_{\nu_n}))$ die Grenzschwankung in a einen Wert $< \delta$ haben, also kann nach **28·9·3** keine Teilfolge von $((f_{\nu_n}))$ stetig konvergent in a sein.

29·3·2. *Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge von Funktionen auf A, ist B der für $\mathfrak{M}$ normale Kern von A und C eine separable Menge $\subseteqq B$, so gibt es in jedem unendlichen Teile $\mathfrak{M}'$ von $\mathfrak{M}$ eine aus zu je zweien verschiedenen Funktionen bestehende Folge $((f_\nu))$, die in jedem Punkte $a \,\varepsilon\, C$ stetig konvergent ist.*

Seien $f^1, f^2, \ldots, f^n, \ldots$ unendlich viele verschiedene Funktionen aus $\mathfrak{M}'$ und sei B^* der normale Kern von $((f^n))$; dann ist offenbar $B \subseteqq B^*$; nach **29·3·1** gibt es in $((f^n))$ eine Teilfolge $((f^{n_\nu}))$, die in jedem Punkte $a \,\varepsilon\, C$ stetig konvergent ist. Setzen wir $f^{n_\nu} = f_\nu$, so leistet $((f_\nu))$ das Verlangte.

29·3·21. *Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge von Funktionen auf A, ist B der für $\mathfrak{M}$ normale Kern von A und $a \,\varepsilon\, A - B$, so gibt es in $\mathfrak{M}$ eine aus zu je zweien verschiedenen Funktionen bestehende Folge $((f_\nu))$, die keine im Punkte a stetig konvergente Teilfolge enthält.*

Sei f_1 eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{M}$; wir nehmen an, die ersten n Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ der gesuchten Folge $((f_\nu))$ seien bekannt, und setzen $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M} - \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$. Nach Annahme ist $\sigma(a) > 0$; sei $0 < \delta < \sigma(a)$; nach Definition von $\sigma(a)$ gibt es eine Funktion $f_{n+1} \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$, für deren Schwan-

kung $\omega_{n-1}(K_{a\frac{1}{n}})$ auf $A K_{a\frac{1}{n}}$ gilt: $\omega_{n+1}(K_{a\frac{1}{n}}) \geq \delta$. Wie bei **29·3·11** sieht man, daß keine Teilfolge der so definierten Folge $((f_\nu))$ in a stetig konvergent sein kann.

Literatur: C. Carathéodory, Math. Ann. 101 (1929) S. 515.

4. **Kompakte Funktionenmengen.** Sei $\mathfrak{A}$ die Menge aller Funktionen auf A; wir machen $\mathfrak{A}$ zu einem metrischen Raum, indem wir den Abstand $\overline{fg}$ zweier Funktionen aus $\mathfrak{A}$ definieren durch: $\overline{fg} = \sup_{x \varepsilon A} \| f(x) - g(x) \|$; die metrischen Axiome 1_m), 2_m) (§ 9, 2) sind dann offenbar erfüllt. Jede Funktion auf A ist nun ein Punkt des metrischen Raumes $\mathfrak{A}$, und die Aussage: „die Punktfolge $((f_\nu))$ aus $\mathfrak{A}$ konvergiert gegen den Punkt $f \varepsilon \mathfrak{A}$" ist gleichbedeutend mit: „die Funktionenfolge $((f_\nu))$ auf A konvergiert gleichmäßig gegen die Funktion f". Ist $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}$, so ist also zufolge **17·3·531** die Aussage „$\mathfrak{M}$ ist kompakt" gleichbedeutend mit: „in jeder Folge $((f_\nu))$ aus $\mathfrak{M}$ gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge".

29·4·1. *Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge stetiger Funktionen auf A, so ist, damit $\mathfrak{M}$ kompakt sei, notwendig und, wenn A in sich kompakt ist, auch hinreichend, daß $\mathfrak{M}$ gleichgradig stetig sei in jedem Punkte $a \varepsilon A$.*

Notwendig: Ist $\mathfrak{M}$ nicht gleichgradig stetig im Punkte $a \varepsilon A$, dann ist nach **29·2·2** $\sigma(a) > 0$, d. h. a gehört nicht zu dem für $\mathfrak{M}$ normalen Kern von A; nach **29·3·21** gibt es also in $\mathfrak{M}$ eine Folge $((f_\nu))$, die keine in a stetig konvergente Teilfolge enthält; da f_ν stetig, gilt nach **26·3·2**, wenn ω_ν die Schwankungsfunktion von f_ν bedeutet: $\omega_\nu(a) = 0$; also kann nach **28·9·41** auch keine Teilfolge von $((f_\nu))$ gleichmäßig in a konvergieren; nach **28·4·2** gibt es also in $((f_\nu))$ keine gleichmäßig konvergente Teilfolge, also ist $\mathfrak{M}$ nicht kompakt. Hinreichend: Sei $((f_\nu))$ eine Funktionenfolge aus $\mathfrak{M}$; wir haben zu zeigen: $((f_\nu))$ enthält eine gleichmäßig konvergente Teilfolge. Da $((f_\nu))$ gleichgradig stetig in jedem Punkte $a \varepsilon A$, gilt für die Grenzschwankung $\sigma(a)$ von $((f_\nu))$ nach **29·2·2**: $\sigma(a) = 0$ für alle $a \varepsilon A$, d. h. der für $((f_\nu))$ normale Kern von A fällt mit A zusammen. Da A nach **15·1·41** separabel ist, gibt es in $((f_\nu))$ zufolge **29·3·1** eine Teilfolge $((f_{\nu_i}))$, die in jedem Punkte $a \varepsilon A$ stetig konvergiert; nach **28·9·4** konvergiert dann $((f_{\nu_i}))$ auch gleichmäßig in jedem Punkte $a \varepsilon A$, und mithin ist $((f_{\nu_i}))$ nach **28·4·2** gleichmäßig konvergent.

Literatur: Der Inhalt dieser Nummer geht im wesentlichen zurück auf C. Arzelà.

Viertes Kapitel.

Borelsche Mengen und Bairesche Funktionen.

§ 30. Die Urbildmengen einer Funktion.

1. **Urbildmengen.** Sei E eine ganz beliebige Menge[1]), die wir als den zugrunde gelegten Bereich bezeichnen, und sei f eine reelle Funktion auf E (§ 25, 4). Für jedes $y \,\varepsilon\, \overline{R}_1$ betrachten wir die in § 25, 8 eingeführten Urbildmengen $[f(\mathfrak{x}) > y]$, $[f(\mathfrak{x}) < y]$, $[f(\mathfrak{x}) \geq y]$, $[f(\mathfrak{x}) \leq y]$. Die Mengen $[f(\mathfrak{x}) > y]$ und $[f(\mathfrak{x}) \leq y]$ sind Komplemente voneinander, ebenso die Mengen $[f(\mathfrak{x}) < y]$ und $[f(\mathfrak{x}) \geq y]$. Es ist $[f(\mathfrak{x}) > +\infty] = \Lambda$, $[f(\mathfrak{x}) < -\infty] = \Lambda$; $[f(\mathfrak{x}) \leq +\infty] = E$, $[f(\mathfrak{x}) \geq -\infty] = E$. Offenbar gelten die Sätze:

30·1·1. *Für $y < z$ ist:*

$$[f(\mathfrak{x}) \geq y] \supseteqq [f(\mathfrak{x}) > y] \supseteqq [f(\mathfrak{x}) \geq z] \supseteqq [f(\mathfrak{x}) > z]$$
$$[f(\mathfrak{x}) < y] \subseteqq [f(\mathfrak{x}) \leq y] \subseteqq [f(\mathfrak{x}) < z] \subseteqq [f(\mathfrak{x}) \leq z]$$

30·1·2. *Ist $M \subseteqq \overline{R}_1$ und* $\inf M = y$, $y \sim\varepsilon M$, *so ist:*

$$[f(\mathfrak{x}) > y] = \underset{z \varepsilon M}{S} [f(\mathfrak{x}) > z] = \underset{z \varepsilon M}{S} [f(\mathfrak{x}) \geq z];$$
$$[f(\mathfrak{x}) \leq y] = \underset{z \varepsilon M}{D} [f(\mathfrak{x}) < z] = \underset{z \varepsilon M}{D} [f(\mathfrak{x}) \leq z].$$

30·1·21. *Ist $M \subseteqq \overline{R}_1$ und* $\sup M = y$, $y \sim\varepsilon M$, *so ist:*

$$[f(\mathfrak{x}) < y] = \underset{z \varepsilon M}{S} [f(\mathfrak{x}) < z] = \underset{z \varepsilon M}{S} [f(\mathfrak{x}) \leq z];$$
$$[f(\mathfrak{x}) \geq y] = \underset{z \varepsilon M}{D} [f(\mathfrak{x}) > z] = \underset{z \varepsilon M}{D} [f(\mathfrak{x}) \geq z].$$

Ist auch g eine Funktion auf E, so gilt offenbar:

30·1·3. *Damit $f = g$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß für alle $y \,\varepsilon\, \overline{R}_1$ gelte:* $[f(\mathfrak{x}) > y] = [g(\mathfrak{x}) > y]$ (*oder* $[f(\mathfrak{x}) \geq y] = [g(\mathfrak{x}) \geq y]$, *oder* $[f(\mathfrak{x}) < y] = [g(\mathfrak{x}) < y]$, *oder* $[f(\mathfrak{x}) \leq y] = [g(\mathfrak{x}) \leq y]$).

---

[1]) Die Menge E braucht nicht Punktmenge eines (topologischen oder metrischen) Raumes zu sein.

Wegen **30·1·2** und **30·1·21** folgt daraus sofort:

30·1·31. *Ist $M \subseteqq \overline{R}_1$ und dicht im $\overline{R}_1$ und gilt für alle $z \varepsilon M$: $[f(\hat{x}) > z] = [g(\hat{x}) > z]$ (oder $[f(\hat{x}) \geq z] = [g(\hat{x}) \geq z]$, oder $[f(\hat{x}) < z] = [g(\hat{x}) < z]$, oder $[f(\hat{x}) \leq z] = [g(\hat{x}) \leq z]$), so ist $f = g$.*

30·1·4. *Sei jedem $y \varepsilon \overline{R}_1$ eine Menge $G_y \subseteqq E$ zugeordnet; damit es eine Funktion f auf E gebe, so daß $[f(\hat{x}) > y] = G_y$ (bzw. $[f(\hat{x}) < y] = G_y$) für alle y, ist notwendig und hinreichend, daß: $G_y = \underset{z>y}{S}\, G_z$ (bzw. $G_y = \underset{z<y}{S}\, G_z$).*

N o t w e n d i g: Dies folgt aus **30·1·2.** H i n r e i c h e n d: Wir setzen $H_y = \underset{z<y}{D}\, G_z - G_y$ (wobei $\underset{z<-\infty}{D}\, G_z = E$ zu setzen ist). Dann ist $H_y H_{y'} = \Lambda$ für $y \neq y'$; denn ist etwa $y' < y$, so ist $H_y \subseteqq G_{y'}$ und $H_{y'} G_{y'} = \Lambda$. Ferner ist $\underset{y}{S}\, H_y = E$; denn ist $x \varepsilon E$, so gibt es (da nach Voraussetzung $G_{y'} \supseteqq G_{y''}$ für $y' < y''$) genau ein y, so daß $x \varepsilon G_z$ für $z < y$ und $x \sim\varepsilon G_z$ für $z > y$; wegen $G_y = \underset{z>y}{S}\, G_z$ ist dann auch $x \sim\varepsilon G_y$ und somit $x \varepsilon H_y$. — Wir definieren nun eine Funktion f auf E durch: $f(x) = y$ für $x \varepsilon H_y$ und behaupten: es ist $[f(\hat{x}) > y] = G_y$. Ist in der Tat $f(x) = v > y$, so ist $x \varepsilon H_v$, somit nach Definition von H_v auch $x \varepsilon G_y$; ist umgekehrt $x \varepsilon G_y$, also auch $x \varepsilon G_u$ für $u \leq y$, so ist $x \sim\varepsilon H_u$ für $u \leq y$, somit $f(x) > y$.

30·1·41. *Ist M eine im $\overline{R}_1$ dichte Menge endlicher Zahlen, und ist jedem $y \varepsilon M$ eine Menge $G_y \subseteqq E$ so zugeordnet, daß $G_y = \underset{z>y,\, z \varepsilon M}{S}\, G_z$ für alle $y \varepsilon M$, so gibt es genau eine Funktion f auf E, so daß $[f(\hat{x}) > y] = G_y$ für alle $y \varepsilon M$.*

Setzen wir $G_y = \underset{z>y,\, z \varepsilon M}{S}\, G_z$ für $y \varepsilon \overline{R}_1 - M$, so ist nun G_y für alle $y \varepsilon \overline{R}_1$ definiert und die G_y genügen der Bedingung von **30·1·4**; also gibt es nach **30·1·4** ein f, so daß $[f(\hat{x}) > y] = G_y$ für alle $y \varepsilon \overline{R}_1$, insbesondere also auch für alle $y \varepsilon M$, und nach **30·1·31** kann es nur ein solches f geben.

Seien f_1 und f_2 Funktionen auf E; wir untersuchen die Menge $[f_1(\hat{x}) + f_2(\hat{x}) > y]$ aller $x \varepsilon E$, in denen $f_1(x) + f_2(x)$ definiert und $> y$ ist. Sei zunächst y e n d l i c h; dann ist $f_1(x) + f_2(x) > y$ gleichbedeutend mit: $f_1(x) > y - f_2(x)$, und das ist gleichbedeutend mit der Existenz eines r a t i o n a l e n r, so daß $f_1(x) > r > y - f_2(x)$; also ist:

$$(1) \qquad [f_1(\hat{x}) + f_2(\hat{x}) > y] = \underset{r}{S}\, [f_1(\hat{x}) > r] \cdot [f_2(\hat{x}) > y - r],$$

wo r alle rationalen Zahlen durchläuft; diese zunächst für endliches y bewiesene Formel gilt offenbar auch für $y = +\infty$, $y = -\infty$. Für $[f_1(\hat{x}) + f_2(\hat{x}) < y]$ gilt eine analoge Formel.

Ganz analog findet man, daß, wenn $f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, y > 0$, die Ungleichung $f_1(x) f_2(x) > y$ gleichbedeutend ist mit der Existenz eines p o s i t i v e n

rationalen p, so daß $f_1(x) > p > \dfrac{y}{f_2(x)}$, und man erhält (wenn $f_1 \geq 0$, $f_2 \geq 0$, $y > 0$):

$$(1\cdot1) \qquad [f_1(\hat{x}) f_2(\hat{x}) > y] = \underset{p}{S}\, [f_1(\hat{x}) > p] \cdot \left[f_2(\hat{x}) > \frac{y}{p}\right],$$

wo p alle positiven rationalen Zahlen durchläuft. Für $[f_1(\hat{x}) f_2(\hat{x}) < y]$ gilt eine analoge Formel.

Setzen wir:

$$\bar{f}(x) = \max\left(f_1(x), f_2(x)\right), \qquad \underline{f}(x) = \min\left(f_1(x), f_2(x)\right),$$

so gelten die Formeln:

$$(1\cdot2) \qquad \begin{aligned} [\bar{f}(\hat{x}) > y] &= [f_1(\hat{x}) > y] + [f_2(\hat{x}) > y], \\ [\bar{f}(\hat{x}) < y] &= [f_1(\hat{x}) < y] \cdot [f_2(\hat{x}) < y], \end{aligned}$$

$$(1\cdot21) \qquad \begin{aligned} [\underline{f}(\hat{x}) < y] &= [f_1(\hat{x}) < y] + [f_2(\hat{x}) < y], \\ [\underline{f}(\hat{x}) > y] &= [f_1(\hat{x}) > y] \cdot [f_2(\hat{x}) > y], \end{aligned}$$

sowie die analogen Formeln mit den Zeichen $\geq$ bzw. $\leq$. Ferner gilt:

$$(1\cdot3) \quad [\sup_n f_n(\hat{x}) > y] = \underset{n}{S}\, [f_n(\hat{x}) > y]; \quad [\sup_n f_n(\hat{x}) \leq y] = \underset{n}{D}\, [f_n(\hat{x}) \leq y];$$

$$(1\cdot31) \quad [\inf_n f_n(\hat{x}) < y] = \underset{n}{S}\, [f_n(\hat{x}) < y]; \quad [\inf_n f_n(\hat{x}) \geq y] = \underset{n}{D}\, [f_n(\hat{x}) \geq y].$$

2. **Urbildmengen und Funktionensysteme.** Sei nun $\mathfrak{S}$ irgendein (nicht leeres) System von Funktionen auf E. Das System der Mengen $[f(\hat{x}) > y]$ (für alle $y \varepsilon R_1$ und alle $f \varepsilon \mathfrak{S}$) bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$, die Systeme der Mengen $[f(\hat{x}) < y]$, $[f(\hat{x}) \geq y]$, $[f(\hat{x}) \leq y]$ mit $\mathfrak{G}(\mathfrak{S})$, $\mathfrak{F}(\mathfrak{S})$, $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})$. Dann besteht $\mathfrak{F}(\mathfrak{S})$ aus den Komplementen der Mengen $\mathfrak{G}(\mathfrak{S})$ und $\mathfrak{F}(\mathfrak{S})$ aus den Komplementen der Mengen $\mathfrak{G}(\mathfrak{S})$.

30·2·1. *Es gelten die Formeln:*

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{S}) \subseteqq \mathfrak{F}(\mathfrak{S})_\sigma, \quad \mathfrak{G}(\mathfrak{S}) \subseteqq \mathfrak{F}(\mathfrak{S})_\sigma, \quad \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}) \subseteqq \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})_\delta, \quad \mathfrak{F}(\mathfrak{S}) \subseteqq \underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})_\delta.$$

Denn ist $y_n > y$, $y_n \to y$, so ist nach **30·1·2**:

$$[f(\hat{x}) > y] = \underset{n}{S}\, [f(\hat{x}) \geq y_n], \qquad [f(\hat{x}) \leq y] = \underset{n}{D}\, [f(\hat{x}) < y_n],$$

woraus die erste und letzte Formel folgen; ebenso folgt die zweite und dritte aus **30·1·21**.

Setzt man $y = +\infty$ bzw. $= -\infty$, so sieht man, daß

$$(2) \qquad \Lambda \varepsilon \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}), \quad \Lambda \varepsilon \underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}), \quad E \varepsilon \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}), \quad E \varepsilon \underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}).$$

30·2·2. *Ist $\mathfrak{M}$ ein System von Teilen von E und $\Lambda \varepsilon \mathfrak{M}$, so gibt es ein System $\mathfrak{S}$ von Funktionen auf E, so daß $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}$ (bzw. $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}$).*

Man bilde zu jedem $M \varepsilon \mathfrak{M}$ die Funktion, die $= 1$ ist auf M und $= -\infty$ (bzw. $= +\infty$) auf $E - M$. Das System aller dieser Funktionen leistet das Verlangte.

Bilden wir die Summe aller möglichen Funktionensysteme $\mathfrak{S}$ auf E, für die $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}$ ist, so erhalten wir das umfassendste derartige Funktionensystem; wir bezeichnen es mit $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$; ebenso bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}(*, \mathfrak{M})$ das umfassendste Funktionensystem $\mathfrak{S}$ auf E, für das $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}$ ist. Das System $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ ist charakterisiert durch folgende Eigenschaften: Ist $f \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$, so gilt für jedes y: $[f(\hat{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{M}$; gilt umgekehrt $[f(\hat{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{M}$ für jedes y, so ist $f \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$; zu jedem $M \varepsilon \mathfrak{M}$ gibt es ein $f \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ und ein y, so daß $[f(\hat{x}) > y] = M$. Wegen (2) und **30·2·2** existiert zu einem (nicht leeren) Mengensystem $\mathfrak{M}$ das Funktionensystem $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ (bzw. $\mathfrak{S}(*, \mathfrak{M})$) dann und nur dann, wenn $\Lambda \varepsilon \mathfrak{M}$. — Aus der Definition von $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ folgt unmittelbar:

30·2·21. *Ist c eine endliche Konstante, so folgt aus $f \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ auch $f + c \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$; ist S die Schränkungstransformation, so folgt aus $S(f) \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ auch $f \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$, und wenn $E \varepsilon \mathfrak{M}$, folgt aus $f \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ auch $S(f) \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$.*

Seien nun $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ Systeme von Teilen von E und sei $\Lambda \varepsilon \mathfrak{M}$, $\Lambda \varepsilon \mathfrak{N}$; das System der Komplemente der Mengen von $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$ zu E bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}'$ bzw. $\mathfrak{N}'$. Im allgemeinen wird es kein Funktionensystem $\mathfrak{S}$ auf E geben, für das $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{N}$ wäre; nach **30·2·1** ist, damit es ein solches Funktionensystem gebe, jedenfalls notwendig, daß

$$\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{N}'_\sigma, \quad \mathfrak{N}' \subseteqq \mathfrak{M}_\delta \tag{2·1}$$

sei (woraus durch Komplementbildung von selbst $\mathfrak{M}' \subseteqq \mathfrak{N}_\delta$, $\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{M}'_\sigma$ folgt); doch ist das Bestehen von (2·1) keineswegs hinreichend für die Existenz eines solchen Funktionensystems[1]). Wenn es aber ein solches Funktionensystem gibt, so ist die Summe aller möglichen solchen Funktionensysteme das umfassendste derartige Funktionensystem; wir bezeichnen dieses umfassendste Funktionensystem $\mathfrak{S}$ auf E, für das $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{N}$ ist, mit $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ und sehen:

[1]) Beispiel: Sei E der R_1, $\mathfrak{M}$ das System aller offenen Mengen des R_1 und $\mathfrak{N}$ das System der Komplemente der abgeschlossenen Intervalle, also $\mathfrak{N}'$ das System der abgeschlossenen Intervalle; dann ist (2·1) erfüllt, und man erkennt leicht, daß es kein System $\mathfrak{S}$ mit $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{N}$ gibt; denn der Beweis von **30·2·1** zeigt, daß jede Menge aus $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$ Summe einer monoton wachsenden Mengenfolge aus $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})$ ist; es ist aber keineswegs jede offene Menge des R_1 Summe einer monoton wachsenden Folge abgeschlossener Intervalle.

30·2·22. *Das System* $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ *existiert dann und nur dann, wenn es überhaupt ein Funktionensystem* $\mathfrak{S}$ *auf* E *mit* $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{N}$ *gibt.*

Das System $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ ist charakterisiert durch folgende Eigenschaften: Ist $f \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, so gilt für jedes y: $[f(\hat{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{M}$, $[f(\hat{x}) < y] \varepsilon \mathfrak{N}$; gilt umgekehrt $[f(\hat{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{M}$, $[f(\hat{x}) < y] \varepsilon \mathfrak{N}$ für jedes y, so ist $f \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$; zu jedem $M \varepsilon \mathfrak{M}$, bzw. zu jedem $N \varepsilon \mathfrak{N}$, gibt es ein $f \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ und ein y, so daß $[f(\hat{x}) > y] = M$, bzw. $[f(\hat{x}) < y] = N$. Ist z. B. E ein metrischer Raum und $\mathfrak{O}$ das System der in E offenen Mengen, so ist, wie aus **25·8·1**, **25·8·11**, **25·8·14** folgt, $\mathfrak{S}(\mathfrak{O}, \mathfrak{O})$ das System der stetigen Funktionen auf E.

30·2·3. *Ist* $\mathfrak{M}$ *ein Ring und* $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ (*bzw.* $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}(*, \mathfrak{M})$), *so ist* $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}_\delta$ (*bzw.* $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}_\delta$).

Sei $A \varepsilon \mathfrak{M}_\delta$; nach **3·5·2** ist $A = \underset{n}{D}\, A_n$ mit $A_n \varepsilon \mathfrak{M}$ und $A_{n+1} \subseteqq A_n$. Wir definieren eine Funktion f auf E durch: $f(x) = \frac{n}{n+1}$ für $x \varepsilon A_n - A_{n+1}$, $f(x) = 1$ für $x \varepsilon A$, $f(x) = -\infty$ für $x \varepsilon E - A_1$; für jedes $y \varepsilon R_1$ ist dann $[f(\hat{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{M}$, somit ist $f \varepsilon \mathfrak{T}$, und da $[f(\hat{x}) \geq 1] = A$, ist $A \varepsilon \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T})$. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{M}_\delta \subseteqq \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T})$; nach **30·2·1** ist aber auch $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) \subseteqq \mathfrak{M}_\delta$.

30·2·31. *Ist* $\mathfrak{M}$ *ein Ring,* $A \varepsilon \mathfrak{M}$, *und* $\mathfrak{M}'$ *das System der Komplemente der Mengen von* $\mathfrak{M}$, *so ist* $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *) = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_\sigma)$; $\mathfrak{S}(*, \mathfrak{M}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}'_\sigma, \mathfrak{M})$.

Denn setzen wir $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *) = \mathfrak{T}$, so ist nach **30·2·3** $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}_\delta$, also durch Komplementbildung $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}'_\sigma$.

3. Autarke Funktionensysteme. Ein Funktionensystem $\mathfrak{S}$ auf E heißt a u t a r k, wenn es folgende Eigenschaften hat:

1a) Alle Konstanten kommen in $\mathfrak{S}$ vor.

2a) Ist $f \varepsilon \mathfrak{S}$ und c eine endliche Konstante, so ist auch $f + c \varepsilon \mathfrak{S}$, und wenn $c > 0$, auch $c f \varepsilon \mathfrak{S}$.

3a) Ist $f \varepsilon \mathfrak{S}$ und bedeutet S die Schränkungstransformation, so ist auch $S(f) \varepsilon \mathfrak{S}$, und wenn $|f| \leq 1$, auch $S^{-1}(f) \varepsilon \mathfrak{S}$.

4a) Ist $f_1 \varepsilon \mathfrak{S}$, $f_2 \varepsilon \mathfrak{S}$, so ist auch $\max(f_1, f_2) \varepsilon \mathfrak{S}$, $\min(f_1, f_2) \varepsilon \mathfrak{S}$.

Das System aller Funktionen auf E ist autark; ist E ein metrischer Raum, so ist das System aller stetigen Funktionen auf E autark. —

Ist a eine Konstante, so setzen wir:

$$f^a(x) = \min\big(f(x), a\big), \; f_a(x) = \max\big(f(x), a\big); \tag{3}$$

ist auch b eine Konstante und $b \geq a$, so setzen wir:

$$f_a^b(x) = \min\big(f_a(x), b\big) = \max\big(f^b(x), a\big) = \big(f_a(x)\big)^b = \big(f^b(x)\big)_a. \tag{3·1}$$

Aus 1a) und 4a) folgt:

30·3·1. *Ist $\mathfrak{S}$ autark und $f \varepsilon \mathfrak{S}$, so ist auch $f^a \varepsilon \mathfrak{S}$, $f_a \varepsilon \mathfrak{S}$, $f_a^b \varepsilon \mathfrak{S}$.*

30·3·2. *Ist $\mathfrak{S}$ autark, so erhält man das ganze Mengensystem $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$, indem man für ein beliebiges, festes $y < +\infty$ und alle $f \varepsilon \mathfrak{S}$ die Menge $[f(\hat{x}) > y]$ bildet. Analoges gilt für $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$, $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})$, $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})$.*

Sei zunächst y endlich; da neben f auch $S(f)$ in $\mathfrak{S}$ vorkommt, erhält man das ganze Mengensystem $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$, indem man für jedes $z \varepsilon [-1, 1]$ und jedes $f \varepsilon \mathfrak{S}$ die Menge $[f(\hat{x}) > z]$ bildet; ist also $A \varepsilon \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$, so gibt es ein $z^* \varepsilon [-1, 1]$ und ein $f^* \varepsilon \mathfrak{S}$, so daß $A = [f^*(\hat{x}) > z^*]$; setzen wir $f = f^* + y - z^*$, so ist nach 2a) auch $f \varepsilon \mathfrak{S}$, und es ist $A = [f(\hat{x}) > y]$. Sei sodann $y = -\infty$; wie eben gezeigt, gibt es, wenn $A \varepsilon \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$, ein $\bar{f} \varepsilon \mathfrak{S}$, so daß $A = [\bar{f}(\hat{x}) > -1]$; bilden wir nach (3·1): $\bar{\bar{f}} = \bar{f}^1_{-1}$, so ist auch $A = [\bar{\bar{f}}(\hat{x}) > -1]$; setzen wir $f = S^{-1}(\bar{\bar{f}})$, so ist nach 3a) auch $f \varepsilon \mathfrak{S}$, und es ist $A = [f(\hat{x}) > -\infty]$.

30·3·3. *Ist $\mathfrak{S}$ autark, so ist jedes der Mengensysteme $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$, $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})$, $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})$ ein die Mengen A und E enthaltender Ring.*

Nach (2) gilt $A \varepsilon \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$, aus 1a) folgt: $E \varepsilon \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$. Sei $A \varepsilon \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$, $B \varepsilon \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$; nach **30·3·2** gibt es ein $f_1 \varepsilon \mathfrak{S}$ und ein $f_2 \varepsilon \mathfrak{S}$, so daß $A = [f_1(\hat{x}) > 0]$, $B = [f_2(\hat{x}) > 0]$; setzen wir $\bar{f}(x) = \max\,(f_1(x), f_2(x))$, $\underline{f}(x) = \min\,(f_1(x), f_2(x))$, so ist nach 4a) $\bar{f} \varepsilon \mathfrak{S}$, $\underline{f} \varepsilon \mathfrak{S}$, und nach (1·2), (1·21) ist: $A + B = [\bar{f}(x) > 0]$, $A\,B = [\underline{f}(x) > 0]$; also ist $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$ ein Ring.

30·3·4. *Damit $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ autark sei, ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{M}$ ein Ring und $A \varepsilon \mathfrak{M}$, $E \varepsilon \mathfrak{M}$ sei.*

Notwendig: Dies folgt aus **30·3·3.** Hinreichend: 1a) ist erfüllt wegen $A \varepsilon \mathfrak{M}$, $E \varepsilon \mathfrak{M}$; 2a) wird von jedem System $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ erfüllt, ebenso 3a) (wenn $E \varepsilon \mathfrak{M}$); daß 4a) erfüllt ist, folgt, wenn $\mathfrak{M}$ ein Ring ist, aus (1·2), (1·21).

30·3·41. *Existiert das System $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, so ist, damit es autark sei, notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ ein Ring und $A \varepsilon \mathfrak{M}\,\mathfrak{N}$, $E \varepsilon \mathfrak{M}\,\mathfrak{N}$ sei.*

Der Beweis ist derselbe wie für **30·3·4.**

Da das System aller Funktionen auf E autark ist, gibt es zu jedem Funktionensystem $\mathfrak{S}$ auf E ein autarkes Funktionensystem $\mathfrak{T} \supseteqq \mathfrak{S}$; und da der Durchschnitt aller $\mathfrak{S}$ umfassenden autarken Systeme von Funktionen auf E wieder autark ist, so ist er das kleinste autarke System über $\mathfrak{S}$; wir bezeichnen es mit $\mathfrak{S}_a$; es kann ganz ähnlich gebildet werden, wie in **3·1·1** die Menge $\overline{\mathfrak{M}}$.

Sei $\mathfrak{M}$ ein beliebiges System von Teilen von E; nach § 3, 2 gibt es einen kleinsten Ring über $\mathfrak{M} + \{\Lambda, E\}$; wir bezeichnen ihn mit $\mathfrak{M}_R$; ist $\mathfrak{M}_r$ der kleinste Ring über $\mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{M}_R = \mathfrak{M}_r + \{\Lambda, E\}$.

30·3·5. *Es ist* $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}_a) = \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})_R$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}_a) = \underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})_R$.

Zufolge von **30·3·3** ist $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}_a)$ ein Ring über $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) + \{\Lambda, E\}$; also ist $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})_R \subseteqq \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}_a)$; bleibt zu beweisen, daß auch $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}_a) \subseteqq \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})_R$. Wir setzen $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})_R = \mathfrak{M}$; dann ist nach **30·3·4** $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ autark; und da $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *) \supseteqq \mathfrak{S}$, ist $\mathfrak{S}_a \subseteqq \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$, also $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}_a) \subseteqq \mathfrak{M}$, d. h. $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}_a) \subseteqq \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})_R$, w. z. b. w.

4. **Völlig autarke Funktionensysteme.** Wir nennen ein Funktionensystem $\mathfrak{S}$ auf E geschlossen, wenn zu jeder gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge $((f_n))$ aus $\mathfrak{S}$ auch $\lim\limits_n f_n$ in $\mathfrak{S}$ vorkommt; wir nennen $\mathfrak{S}$ additiv, wenn neben f_1 und f_2 auch die Funktion $f_1 + f_2$ in $\mathfrak{S}$ vorkommt, vorausgesetzt, daß sie auf ganz E definiert ist; ein autarkes, geschlossenes und additives Funktionensystem nennen wir völlig autark. Ist E ein metrischer Raum, so ist das System aller stetigen Funktionen auf E völlig autark.

Da das System aller Funktionen auf E geschlossen, additiv, völlig autark ist, und da der Durchschnitt aller ein gegebenes Funktionensystem $\mathfrak{S}$ umfassenden geschlossenen (bzw. additiven, völlig autarken) Funktionensysteme wieder geschlossen (bzw. additiv, völlig autark) ist, gibt es zu jedem Funktionensystem $\mathfrak{S}$ auf E ein kleinstes geschlossenes (bzw. additives, völlig autarkes) Funktionensystem über $\mathfrak{S}$. Auf die Bildung des kleinsten völlig autarken Funktionensystemes über $\mathfrak{S}$ kommen wir in **31·3·22** zurück.

30·4·1. *Ist* $\mathfrak{S}$ *autark und geschlossen, so sind* $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$ *σ-Ringe,* $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})$, $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})$ *δ-Ringe.*

Wir zeigen etwa, daß $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$ ein σ-Ring ist; daraus folgt dann durch Übergang zu den Komplementen, daß $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})$ ein δ-Ring ist. Da nach **30·3·3** $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$ ein Ring ist, bleibt nur zu zeigen: ist $A_n \varepsilon \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$, so ist auch $\underset{n}{S} A_n \varepsilon \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$. Nach **30·3·2** gibt es ein $f_n \varepsilon \mathfrak{S}$, so daß $A_n = [f_n(x) > 0]$; indem wir gemäß (3·1) f_n ersetzen durch $(f_n)_0^{\frac{1}{n}}$, können wir zufolge **30·3·1** von vornherein annehmen $0 \leq f_n \leq \frac{1}{n}$. Wir setzen $g_n = \max(f_1, f_2, \ldots, f_n)$; dann ist, da $\mathfrak{S}$ autark, auch $g_n \varepsilon \mathfrak{S}$, und $((g_n))$ konvergiert gleichmäßig

gegen eine Grenzfunktion g. Weil $\mathfrak{S}$ geschlossen, ist $g \varepsilon \mathfrak{S}$; und weil $[g(\hat{x}) > 0] = \underset{n}{S} A_n$, ist $\underset{n}{S} A_n \varepsilon \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$, w. z. b. w.

30·4·2. *Ist $\mathfrak{M}$ ein σ-Ring und $A \varepsilon \mathfrak{M}$, so sind $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ und $\mathfrak{S}(*, \mathfrak{M})$ additiv. Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ σ-Ringe und existiert das System $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, so ist es additiv.*

Dies folgt unmittelbar aus (1).

30·4·21. *Ist eines der Funktionensysteme $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$, $\mathfrak{S}(*, \mathfrak{M})$, $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ autark und geschlossen, so ist es völlig autark.*

Dies folgt aus **30·4·1**, **30·4·2**.

30·4·3. *Damit $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ (oder $\mathfrak{S}(*, \mathfrak{M})$) völlig autark sei, ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{M}$ ein σ-Ring und $A \varepsilon \mathfrak{M}$, $E \varepsilon \mathfrak{M}$ sei.*

Notwendig: Dies folgt aus **30·3·4** und **30·4·1**. Hinreichend: Nach **30·3·4** ist $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ autark; zufolge **30·4·21** ist also nur mehr zu zeigen: $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ ist geschlossen. Sei $((f_n))$ eine gleichmäßig konvergente Folge aus $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ und $f = \lim\limits_{n} f_n$; setzen wir $\sup\limits_{x \varepsilon E} \|f_n(x) - f(x)\| = k_n$, so gilt also $k_n \to 0$. Aus $\|f_n - f\| \leq k_n$ folgt aber, wenn S die Schränkungstransformation bezeichnet: $S(f_n) - k_n \leq S(f)$, und mithin wegen $S(f_n) \to S(f)$ und $k_n \to 0$:

$$S(f) = \sup_n \left(S(f_n) - k_n\right). \tag{4}$$

Nach **30·2·21** ist $S(f_n) - k_n \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$; wegen (4) und (1·3) ist also auch $S(f) \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ und somit auch $f \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$; also ist $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ geschlossen, w. z. b. w.

Analog beweist man:

30·4·31. *Existiert das System $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, so ist, damit es völlig autark sei, notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ ein σ-Ring und $A \varepsilon \mathfrak{M}\mathfrak{N}$, $E \varepsilon \mathfrak{M}\mathfrak{N}$ sei.*

5. **Symmetrische Funktionensysteme.** Wir nennen ein Funktionensystem symmetrisch, wenn neben $f \varepsilon \mathfrak{S}$ auch $-f \varepsilon \mathfrak{S}$ gilt. Da $[f(\hat{x}) < y] = [-f(\hat{x}) > -y]$, sind bei symmetrischem $\mathfrak{S}$ die Mengensysteme $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$ identisch, ebenso $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})$, $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})$.

30·5·1. *Ist $\mathfrak{S}$ autark und symmetrisch, so gilt neben $f \varepsilon \mathfrak{S}$ auch $|f| \varepsilon \mathfrak{S}$, und wenn c eine endliche Konstante bedeutet, auch $c f \varepsilon \mathfrak{S}$.*

Dies folgt wegen $|f| = \max(f, -f)$ und $c f = \pm |c| f$ aus Eigenschaft 4a) und 2a) (§ 30, 3) der autarken Systeme.

30·5·2. *Ist $\mathfrak{S}$ symmetrisch, so auch das kleinste autarke System $\mathfrak{S}_a$ über $\mathfrak{S}$.*

Sei $\mathfrak{S}'_a$ das System, das aus $\mathfrak{S}_a$ entsteht, indem man jedes $f \varepsilon \mathfrak{S}_a$ durch $-f$ ersetzt; offenbar ist auch $\mathfrak{S}'_a$ autark. Da $\mathfrak{S}$ symmetrisch, ist $\mathfrak{S} \subseteqq \mathfrak{S}'_a$,

d. h. $\mathfrak{S}'_a$ ist ein autarkes System über $\mathfrak{S}$; also ist $\mathfrak{S}_a \subseteqq \mathfrak{S}'_a$. Sei nun $f \varepsilon \mathfrak{S}_a$; dann ist auch $f \varepsilon \mathfrak{S}'_a$, also $-f \varepsilon \mathfrak{S}_a$, d. h. $\mathfrak{S}_a$ ist symmetrisch.

30·5·21. *Ist $\mathfrak{S}$ symmetrisch, so auch das kleinste völlig autarke System über $\mathfrak{S}$.* Der Beweis ist analog dem von **30·5·2.**

30·5·3. *Existiert das System $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$, so ist es symmetrisch.*

Sei $f \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$; dann ist für alle $y \varepsilon R_1$: $[f(\hat{x}) > -y] \varepsilon \mathfrak{M}$, $[f(\hat{x}) < -y] \varepsilon \mathfrak{M}$; wegen $[-f(\hat{x}) > y] = [f(\hat{x}) < -y]$, $[-f(\hat{x}) < y] = [f(\hat{x}) > -y]$ ist also auch $[-f(\hat{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{M}$, $[-f(\hat{x}) < y] \varepsilon \mathfrak{M}$, also $-f \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$.

30·5·4. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, $f \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ und $f \neq 0$ auf E, so ist auch $\frac{1}{f} \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$.*

Denn es ist: $\left[\frac{1}{f(\hat{x})} > y\right] = \left[f(\hat{x}) < \frac{1}{y}\right] \cdot [f(\hat{x}) > 0]$, wenn $y > 0$, $\left[\frac{1}{f(\hat{x})} > y\right] = \left[f(\hat{x}) < \frac{1}{y}\right] + [f(\hat{x}) > 0]$, wenn $y < 0$, und $\left[\frac{1}{f(\hat{x})} > 0\right] = [f(\hat{x}) > 0] \cdot [f(\hat{x}) < +\infty]$, und analoge Formeln gelten für $\left[\frac{1}{f(\hat{x})} < y\right]$.

30·5·5. *Ist $\mathfrak{M}$ ein σ-Ring, $A \varepsilon \mathfrak{M}$, $E \varepsilon \mathfrak{M}$, $f_1 \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$, $f_2 \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$, und ist $f_1 f_2$ (bzw. $f_1 : f_2$) definiert auf E, so ist auch $f_1 f_2 \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ (bzw. $f_1 : f_2 \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$).*

Wegen **30·5·4** genügt es, die Behauptung für $f_1 f_2$ nachzuweisen. Sei zunächst $f_1 \geq 0$, $f_2 \geq 0$; es gilt $[f_1(\hat{x}) f_2(\hat{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{M}$ nach (1·1), wenn $y > 0$; da $[f_1(\hat{x}) f_2(\hat{x}) > y] = E$ für $y < 0$, gilt dies auch für $y < 0$, und wegen $[f_1(\hat{x}) f_2(\hat{x}) > 0] = [f_1(\hat{x}) > 0] \cdot [f_2(\hat{x}) > 0]$ gilt dies auch für $y = 0$; es ist also $[f_1(\hat{x}) f_2(\hat{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{M}$ für alle y; analog zeigt man, daß $[f_1(\hat{x}) f_2(\hat{x}) < y] \varepsilon \mathfrak{M}$ für alle y; also ist $f_1 f_2 \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$. — Haben f_1, f_2 beliebiges Zeichen, so folgt zunächst aus **30·3·41**, daß $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ autark, sodann aus **30·5·3**, **30·5·1**, daß $|f_1| \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$, $|f_2| \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$; wie eben bewiesen, ist dann auch $|f_1| |f_2| \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$; wegen

$$[f_1(\hat{x}) f_2(\hat{x}) > 0] = [f_1(\hat{x}) > 0] \cdot [f_2(\hat{x}) > 0] + [f_1(\hat{x}) < 0] \cdot [f_2(\hat{x}) < 0]$$

ist $[f_1(\hat{x}) f_2(\hat{x}) > 0] \varepsilon \mathfrak{M}$; da für $y > 0$:

$$[f_1(\hat{x}) f_2(\hat{x}) > y] = [|f_1(\hat{x})| \, |f_2(\hat{x})| > y] \cdot [f_1(\hat{x}) f_2(\hat{x}) > 0],$$

und für $y < 0$:

$$[f_1(\hat{x}) f_2(\hat{x}) > y] = [|f_1(\hat{x})| \, |f_2(\hat{x})| < |y|] + [f_1(\hat{x}) f_2(\hat{x}) > 0],$$

ist also $[f_1(\hat{x}) f_2(\hat{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{M}$ für alle y; ebenso zeigt man, daß $[f_1(\hat{x}) f_2(\hat{x}) < y] \varepsilon \mathfrak{M}$; also ist $f_1 f_2 \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$.

Literatur zu § 30. Der Gedanke der Charakterisierung von Funktionenklassen durch Urbildmengen stammt von H. Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 139. Systematische Darstellung zuerst bei F. Hausdorff, Math. Zeitschr. 5 (1919) S. 292; Mengenlehre § 41.

§ 31. Erweiterung von Mengen- und Funktionensystemen.

1. **Die Mengensysteme $\mathfrak{M}^1$ und $\mathfrak{M}_1$.** Sei wieder E eine ganz beliebige Menge, $\mathfrak{M}$ ein System von Teilen von E. Das (in § 3, 4 mit $\mathfrak{M}_\sigma$ bezeichnete) kleinste σ-System über $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir nun mit $\mathfrak{M}^1$, das (in § 3, 4 mit $\mathfrak{M}_\delta$ bezeichnete) kleinste δ-System über $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M}_1$. Satz **3·4·11** spricht sich dann so aus:

31·1·1. *Damit $\mathfrak{M}^1 = \mathfrak{M}$ (bzw. $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$) sei, ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{M}$ ein σ-System (bzw. ein δ-System) sei.*

Und § 3 (4) ergibt:

31·1·2. *Bei beliebigem $\mathfrak{M}$ ist $(\mathfrak{M}^1)^1 = \mathfrak{M}^1$, $(\mathfrak{M}_1)_1 = \mathfrak{M}_1$.*

31·1·3. *Ist $\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{M}^1$ (bzw. $\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{M}_1$), so ist $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^1 = \mathfrak{M}^1$ (bzw. $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})_1 = \mathfrak{M}_1$).*

Da jedenfalls $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^1 \supseteqq \mathfrak{M}^1$, ist nur zu zeigen: $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^1 \subseteqq \mathfrak{M}^1$. Wegen $\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{M}^1$ ist $\mathfrak{M} + \mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{M}^1$, also $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^1 \subseteqq (\mathfrak{M}^1)^1$, also nach **31·1·2** $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^1 \subseteqq \mathfrak{M}^1$, w. z. b. w.

Da $\mathfrak{M}^1 \subseteqq (\mathfrak{M}_1)^1$, $\mathfrak{M}_1 \subseteqq (\mathfrak{M}^1)_1$, folgt aus **31·1·3** insbesondere:

(1) $$(\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1)^1 = (\mathfrak{M}_1)^1; \quad (\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1)_1 = (\mathfrak{M}^1)_1 .$$

31·1·4. *Ist $\mathfrak{N}$ das System der Komplemente der Mengen aus $\mathfrak{M}$ zu E, so ist $\mathfrak{N}_1$ das System der Komplemente der Mengen aus $\mathfrak{M}^1$ zu E.*

Dies folgt leicht aus **3·4·2.**

2. **Die Funktionensysteme $\mathfrak{S}^1$ und $\mathfrak{S}_1$.** Sei $\mathfrak{S}$ ein Funktionensystem auf E. Fügen wir zu $\mathfrak{S}$ die Grenzfunktionen aller monoton wachsenden (bzw. abnehmenden) Funktionenfolgen aus $\mathfrak{S}$ hinzu, so entstehe das System $\mathfrak{S}^1$ (bzw. $\mathfrak{S}_1$). Aus der Definition der autarken Systeme folgt ohne weiteres:

31·2·1. *Bei autarkem $\mathfrak{S}$ sind $\mathfrak{S}^1$ und $\mathfrak{S}_1$ autark.*

31·2·2. *Aus $f_n \varepsilon \mathfrak{S}$ folgt, wenn $\mathfrak{S}$ autark:* $\sup\limits_n f_n \varepsilon \mathfrak{S}^1$, $\inf\limits_n f_n \varepsilon \mathfrak{S}_1$.

Setzen wir: $\bar{f}_n = \max(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, so ist $\bar{f}_n \varepsilon \mathfrak{S}$, die Folge $((\bar{f}_n))$ ist monoton wachsend und $\lim\limits_n \bar{f}_n = \sup\limits_n f_n$, also ist $\sup\limits_n f_n \varepsilon \mathfrak{S}^1$.

31·2·21. *Bei autarkem $\mathfrak{S}$ ist $(\mathfrak{S}^1)^1 = \mathfrak{S}^1$, $(\mathfrak{S}_1)_1 = \mathfrak{S}_1$.*

Sei $f \varepsilon (\mathfrak{S}^1)^1$, d. h. $f = \lim\limits_n f_n$, wo $f_n \varepsilon \mathfrak{S}^1$, $f_n \leqq f_{n+1}$. Wegen $f_n \varepsilon \mathfrak{S}^1$, ist $f_n = \lim\limits_i f_{ni}$, wo $f_{ni} \varepsilon \mathfrak{S}$, $f_{ni} \leqq f_{ni+1}$; daraus folgt $f = \sup\limits_{n,i} f_{ni}$; also ist nach **31·2·2** $f \varepsilon \mathfrak{S}^1$.

31·2·3. *Ist $\mathfrak{S}$ autark und $\mathfrak{T} \subseteqq \mathfrak{S}^1$ (bzw. $\mathfrak{T} \subseteqq \mathfrak{S}_1$), so ist $(\mathfrak{S} + \mathfrak{T})^1 = \mathfrak{S}^1$ (bzw. $(\mathfrak{S} + \mathfrak{T})_1 = \mathfrak{S}_1$).*

Der Beweis ist analog dem von **31·1·3.**

So wie (1) erkennt man nun, daß bei autarkem $\mathfrak{S}$:

(2) $$(\mathfrak{S}^1 + \mathfrak{S}_1)^1 = (\mathfrak{S}_1)^1; \quad (\mathfrak{S}^1 + \mathfrak{S}_1)_1 = (\mathfrak{S}^1)_1.$$

31·2·4. *Ist $\mathfrak{S}$ autark und $((f_n))$ eine gleichmäßig konvergente Folge aus $\mathfrak{S}$, so ist $\lim\limits_n f_n \,\varepsilon\, \mathfrak{S}^1\,\mathfrak{S}_1$.*

Sei $f = \lim\limits_n f_n$; dann ist nach § 30 (4): $S(f) = \sup\limits_n \bigl(S(f_n) - k_n\bigr)$; aus $f_n \,\varepsilon\, \mathfrak{S}$ folgt $S(f_n) - k_n \,\varepsilon\, \mathfrak{S}$, also nach **31·2·2** $S(f) \,\varepsilon\, \mathfrak{S}^1$, und weil nach **31·2·1** $\mathfrak{S}^1$ autark: $f \,\varepsilon\, \mathfrak{S}^1$. Ebenso zeigt man $f \,\varepsilon\, \mathfrak{S}_1$.

31·2·41. *Bei autarkem $\mathfrak{S}$ sind $\mathfrak{S}^1$ und $\mathfrak{S}_1$ geschlossen.*

Sei $((f_n))$ eine gleichmäßig konvergente Folge aus $\mathfrak{S}^1$ und $f = \lim\limits_n f_n$; nach **31·2·4** ist $f \,\varepsilon\, (\mathfrak{S}^1)^1$, also nach **31·2·21**: $f \,\varepsilon\, \mathfrak{S}^1$.

31·2·5. *Ist $\mathfrak{T}$ ein autarkes Funktionensystem auf E, so ist:*

$$\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^1) = \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})^1; \quad \underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}_1) = \underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})^1.$$

Sei $f \,\varepsilon\, \mathfrak{T}^1$, d. h. $f = \lim\limits_n f_n$, wo $f_n \,\varepsilon\, \mathfrak{T}$, $f_n \leq f_{n+1}$; dann ist auch $f = \sup\limits_n f_n$, also nach § 30 (1·3): $[f(\mathfrak{x}) > y] \,\varepsilon\, \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})^1$; damit ist gezeigt: $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^1) \subseteqq \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})^1$. Nun ist noch zu zeigen: $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})^1 \subseteqq \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^1)$. Sei also $A \,\varepsilon\, \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})^1$, d. h. $A = \underset{n}{S} A_n$ mit $A_n \,\varepsilon\, \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})$; nach **30·3·2** gibt es also ein $f_n \,\varepsilon\, \mathfrak{T}$, so daß $A_n = [f_n(\mathfrak{x}) > 0]$; setzen wir $f = \sup\limits_n f_n$, so ist $A = [f(\mathfrak{x}) > 0]$; nach **31·2·2** ist aber $f \,\varepsilon\, \mathfrak{T}^1$, also ist $A \,\varepsilon\, \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^1)$; aus $A \,\varepsilon\, \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})^1$ folgt also $A \,\varepsilon\, \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^1)$, d. h. es ist $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})^1 \subseteqq \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^1)$, w. z. b. w.

Nun verschärfen wir noch **31·2·5** weiter zu:

31·2·51. *Ist $\mathfrak{T}$ autark und $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}$ $\bigl($bzw. $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{N}\bigr)$, so ist $\mathfrak{T}^1 = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}^1, *)$ $\bigl($bzw. $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{S}(*, \mathfrak{N}^1)\bigr)$.*

Wegen **31·2·5** ist nur mehr zu zeigen: ist $[f(\mathfrak{x}) > y] \,\varepsilon\, \mathfrak{M}^1$ für alle $y \,\varepsilon\, \overline{R}_1$, so ist $f \,\varepsilon\, \mathfrak{T}^1$. — Sei zunächst f eine Funktion, die nur die Werte 0, 1 annimmt; setzen wir $A = [f(\mathfrak{x}) = 1] = [f(\mathfrak{x}) > 0]$, so ist nach Annahme $A \,\varepsilon\, \mathfrak{M}^1$; nach **31·2·5**, **31·2·1**, **30·3·2** gibt es also ein $g \,\varepsilon\, \mathfrak{T}^1$, so daß $A = [g(\mathfrak{x}) > 0]$; setzen wir $g'(x) = \max\bigl(g(x), 0\bigr)$, $g_n(x) = \min\bigl(n\,g'(x), 1\bigr)$, so ist $g_n \leq g_{n+1}$ und $f = \lim\limits_n g_n$; da aber $\mathfrak{T}^1$ nach **31·2·1** autark, ist $g_n \,\varepsilon\, \mathfrak{T}^1$, also $f \,\varepsilon\, (\mathfrak{T}^1)^1$, also nach **31·2·21**: $f \,\varepsilon\, \mathfrak{T}^1$. — Sei sodann f eine Funktion, die nur zwei verschiedene, endliche Werte $a > b$ annimmt; setzen wir $[f(\mathfrak{x}) = a] = A$, und bezeichnen mit f^* die Funktion, die $= 1$ ist auf A und $= 0$ auf $E - A$, so ist, wie eben gezeigt: $f^* \,\varepsilon\, \mathfrak{T}^1$; und da $f = b + (a - b) f^*$, so ist, weil $\mathfrak{T}^1$ autark, auch $f \,\varepsilon\, \mathfrak{T}^1$. — Sei sodann f eine Funktion, die nur endlich viele verschiedene, durchweg endliche Werte $a_0 < a_1 < \ldots < a_m$ annimmt;

setzen wir $[f(\mathfrak{x}) = a_\iota] = A_\iota$, so ist für $a_{i-1} \leq y < a_\iota$: $[f(\mathfrak{x}) > y] = A_\iota + \ldots + A_m$, also ist nach Annahme $A_\iota + \ldots + A_m \,\varepsilon\, \mathfrak{M}^1$; bezeichnen wir mit f_ι die Funktion, die $= a_\iota$ ist auf $A_\iota + \ldots + A_m$ und $= a_0$ auf $E - (A_i + \ldots + A_m)$, so ist, wie eben gezeigt, $f_\iota \,\varepsilon\, \mathfrak{T}^1$, und da $f = \max(f_1, f_2, \ldots, f_m)$, so ist, weil $\mathfrak{T}^1$ autark, auch $f \,\varepsilon\, \mathfrak{T}^1$. — Unterliegt schließlich f keiner weiteren Einschränkung, so setzen wir $y_{ni} = \dfrac{i - n^2}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots, 2n^2)$ und bezeichnen mit f_n die Funktion, die $= y_{n0}$ $(= -n)$ ist auf $[f(\mathfrak{x}) \leq y_{n0}]$, $= y_{ni}$ auf $[y_{ni-1} < f(\mathfrak{x}) \leq y_{ni}]$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n^2)$, und $= y_{n2n^2}$ $(= n)$ auf $[f(\mathfrak{x}) > y_{n2n^2}]$; da für jedes y die Menge $[f_n(\mathfrak{x}) > y]$ entweder mit einer Menge $[f(\mathfrak{x}) > z]$ übereinstimmt, oder $= \Lambda$, oder $= E$ ist, und da nach Annahme $[f(\mathfrak{x}) > z] \,\varepsilon\, \mathfrak{M}^1$, und nach **30·3·3** $\Lambda \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$, $E \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$, also auch $\Lambda \,\varepsilon\, \mathfrak{M}^1$, $E \,\varepsilon\, \mathfrak{M}^1$ ist, gilt $[f_n(\mathfrak{x}) > y] \,\varepsilon\, \mathfrak{M}^1$ für alle y; und da f_n nur endlich viele verschiedene, durchweg endliche Werte annimmt, ist, wie eben bewiesen, $f_n \,\varepsilon\, \mathfrak{T}^1$; da $((f_n))$ gleichmäßig gegen f konvergiert, ist also nach **31·2·41** auch $f \,\varepsilon\, \mathfrak{T}^1$.

31·2·511. *Ist* $\mathfrak{T}$ *völlig autark und* $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{N}$, *so ist* $\mathfrak{T}^1 = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$, $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{S}(*, \mathfrak{N})$.

Nach **31·2·51** ist $\mathfrak{T}^1 = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}^1, *)$; nach **30·4·1** ist $\mathfrak{M}$ ein σ-System, also nach **31·1·1**: $\mathfrak{M}^1 = \mathfrak{M}$.

31·2·512. *Ist* $\mathfrak{T}$ *autark und* $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^1$ *(bzw.* $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1$*) und* $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}$ *(bzw.* $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{N}$*), so ist* $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ *(bzw.* $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}(*, \mathfrak{N})$*)*.

Nach **31·2·5** ist $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^1) = \mathfrak{M}^1$, also $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}^1$, d. h. $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1$, und nach **31·2·51** ist $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^1 = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}^1, *) = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$.

31·2·52. *Ist* $\mathfrak{M}$ *ein die Mengen* Λ *und* E *enthaltender Ring, so ist*: $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)^1 = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}^1, *)$, $\mathfrak{S}(*, \mathfrak{M})_1 = \mathfrak{S}(*, \mathfrak{M}^1)$.

Nach **30·3·4** ist $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ autark; die Behauptung folgt also aus **31·2·51**.

31·2·521. *Ist* $\mathfrak{M}$ *ein die Mengen* Λ *und* E *enthaltender Ring, so ist, damit* $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)^1 = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ *(bzw.* $\mathfrak{S}(*, \mathfrak{M})_1 = \mathfrak{S}(*, \mathfrak{M})$*) sei, notwendig und hinreichend, daß* $\mathfrak{M}$ *ein* σ*-System sei.*

Dies folgt aus **31·2·52** und **31·1·1**.

31·2·6. *Bei autarkem* $\mathfrak{S}$ *sind* $\mathfrak{S}^1$ *und* $\mathfrak{S}_1$ *völlig autark.*

Dies folgt aus **31·2·51** nach **31·2·1**, **31·2·41**, **30·4·21**.

31·2·7. *Ist* $\mathfrak{S}$ *symmetrisch, so ist* $f \,\varepsilon\, \mathfrak{S}^1$ *gleichbedeutend mit* $-f \,\varepsilon\, \mathfrak{S}_1$.

Die Aussage $f \,\varepsilon\, \mathfrak{S}^1$ bedeutet: $f = \lim\limits_n f_n$ mit $f_n \leq f_{n+1}$ und $f_n \,\varepsilon\, \mathfrak{S}$; das kann auch so geschrieben werden: $-f = \lim\limits_n (-f_n)$, $-f_n \geq -f_{n+1}$, $-f_n \,\varepsilon\, \mathfrak{S}$; das aber besagt: $-f \,\varepsilon\, \mathfrak{S}_1$.

3. Das Funktionensystem $\mathfrak{S}_1^1$. Wir setzen nun $\mathfrak{S}_1^1 = \mathfrak{S}^1 . \mathfrak{S}_1$. Dann kann **31·2·4** so ausgesprochen werden:

31·3·1. *Ist $\mathfrak{S}$ autark und $((f_n))$ eine gleichmäßig konvergente Folge aus $\mathfrak{S}$, so ist $\lim\limits_n f_n \varepsilon \mathfrak{S}_1^1$.*

31·3·2. *Bei autarkem $\mathfrak{S}$ ist $\mathfrak{S}_1^1$ völlig autark.*

Dies folgt aus **31·2·6.**

Wir werden nun zeigen, daß $\mathfrak{S}_1^1$ bei autarkem $\mathfrak{S}$ das kleinste völlig autarke System über $\mathfrak{S}$ ist; zu dem Zwecke beweisen wir zunächst zwei Hilfssätze, wobei wir vorübergehend das kleinste völlig autarke System über $\mathfrak{S}$ mit $\tilde{\mathfrak{S}}$ bezeichnen.

31·3·21. *Ist $A \varepsilon \overline{\mathfrak{G}} (\mathfrak{S})^1$ (bzw. $A \varepsilon \underline{\mathfrak{G}} (\mathfrak{S})^1$), so gibt es ein $f \varepsilon \tilde{\mathfrak{S}}$, so daß $f(x) < +\infty$ für alle $x \varepsilon E$ und $[f(\mathfrak{x}) > -\infty] = A$ (bzw. $f(x) > -\infty$ für alle $x \varepsilon E$ und $[f(\mathfrak{x}) < +\infty] = A$).*

Sei $A \varepsilon \overline{\mathfrak{G}} (\mathfrak{S})^1$; wegen $\mathfrak{S} \subseteqq \tilde{\mathfrak{S}}$ ist $\overline{\mathfrak{G}} (\mathfrak{S}) \subseteqq \overline{\mathfrak{G}} (\tilde{\mathfrak{S}})$, also auch $\overline{\mathfrak{G}} (\mathfrak{S})^1 \subseteqq \overline{\mathfrak{G}} (\tilde{\mathfrak{S}})^1$, und da nach **30·4·1, 31·1·1** $\overline{\mathfrak{G}} (\tilde{\mathfrak{S}})^1 = \overline{\mathfrak{G}} (\tilde{\mathfrak{S}})$ ist, gilt auch $\overline{\mathfrak{G}} (\mathfrak{S})^1 \subseteqq \overline{\mathfrak{G}} (\tilde{\mathfrak{S}})$; also ist $A \varepsilon \overline{\mathfrak{G}} (\tilde{\mathfrak{S}})$. Nach **30·3·2** gibt es also ein $f \varepsilon \tilde{\mathfrak{S}}$, so daß $[f(\mathfrak{x}) > -\infty] = A$, und nach **30·3·1** kann $f < +\infty$ angenommen werden.

31·3·211. *Ist $\mathfrak{S}$ autark und $f \varepsilon \mathfrak{S}_1^1$, so gibt es zu je zwei Zahlen $a < b$ ein $\tilde{f} \varepsilon \tilde{\mathfrak{S}}$, so daß $\tilde{f} = 0$ auf $[f(\mathfrak{x}) \leq a]$, $\tilde{f} = 1$ auf $[f(\mathfrak{x}) \geq b]$ und $0 < \tilde{f} < 1$ auf $[a < f(\mathfrak{x}) < b]$.*

Nach **31·2·5** ist $[f(\mathfrak{x}) > a] \varepsilon \overline{\mathfrak{G}} (\mathfrak{S})^1$, $[f(\mathfrak{x}) < b] \varepsilon \underline{\mathfrak{G}} (\mathfrak{S})^1$; also gibt es nach **31·3·21** ein $f_1 \varepsilon \tilde{\mathfrak{S}}$ und ein $f_2 \varepsilon \tilde{\mathfrak{S}}$, so daß $f_1(x) < +\infty$, $f_2(x) > -\infty$ für alle $x \varepsilon E$, und $[f_1(\mathfrak{x}) > -\infty] = [f(\mathfrak{x}) > a]$, $[f_2(\mathfrak{x}) < +\infty] = [f(\mathfrak{x}) < b]$. Also ist $[f_1(\mathfrak{x}) = -\infty] = [f(\mathfrak{x}) \leq a]$, $[f_2(\mathfrak{x}) = +\infty] = [f(\mathfrak{x}) \geq b]$, also $f_1 + f_2 = -\infty$ auf $[f(\mathfrak{x}) \leq a]$, $f_1 + f_2 = +\infty$ auf $[f(\mathfrak{x}) \geq b]$, $-\infty < f_1 + f_2 < +\infty$ auf $[a < f(\mathfrak{x}) < b]$. Die Funktion $\tilde{f} = \frac{1}{2}(S(f_1 + f_2) + 1)$ leistet das Verlangte.

31·3·22. *Bei autarkem $\mathfrak{S}$ ist $\mathfrak{S}_1^1$ das kleinste völlig autarke System über $\mathfrak{S}$.*

Sei wieder $\tilde{\mathfrak{S}}$ das kleinste völlig autarke System über $\mathfrak{S}$. Nach **31·3·2** ist $\tilde{\mathfrak{S}} \subseteqq \mathfrak{S}_1^1$; bleibt zu zeigen: $\mathfrak{S}_1^1 \subseteqq \tilde{\mathfrak{S}}$. Sei $f \varepsilon \mathfrak{S}_1^1$; wir haben zu zeigen: $f \varepsilon \tilde{\mathfrak{S}}$. Wegen Eigenschaft 3a) der autarken Systeme (§ 30, 3) genügt es zu zeigen, daß $S(f) \varepsilon \tilde{\mathfrak{S}}$; wir können also von vornherein f als beschränkt annehmen, und wegen Eigenschaft 2a) der autarken Systeme können wir weiter annehmen $0 \leq f \leq 1$. Nach **31·3·211** gibt es nun für jedes n und für

$i = 1, 2, \ldots, n$ eine Funktion $f_{n i} \varepsilon \tilde{\mathfrak{S}}$, so daß $f_{n i} = 0$ auf $\left[f(x) \leq \frac{i-1}{n}\right]$, $f_{n i} = 1$ auf $\left[f(x) \geq \frac{i}{n}\right]$, $0 < f_{n i} < 1$ auf $\left[\frac{i-1}{n} < f(x) < \frac{i}{n}\right]$. Setzen wir $f_n = \frac{1}{n}(f_{n1} + f_{n2} + \cdots + f_{nn})$, so ist auch $f_n \varepsilon \tilde{\mathfrak{S}}$, und weil $((f_n))$ gleichmäßig gegen f konvergiert, ist auch $f \varepsilon \tilde{\mathfrak{S}}$, w. z. b. w.

31·3·23. *Damit das autarke System $\mathfrak{S}$ völlig autark sei, ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{S}_1^1 = \mathfrak{S}$.*

Dies ist enthalten in **31·3·22.**

31·3·3. *Bei autarkem $\mathfrak{S}$ ist $(\mathfrak{S}_1^1)^1 = \mathfrak{S}^1$, $(\mathfrak{S}_1^1)_1 = \mathfrak{S}_1$.*

Wegen $\mathfrak{S} \subseteqq \mathfrak{S}_1^1$ ist $\mathfrak{S}^1 \subseteqq (\mathfrak{S}_1^1)^1$; wegen $\mathfrak{S}_1^1 \subseteqq \mathfrak{S}^1$ ist $(\mathfrak{S}_1^1)^1 \subseteqq (\mathfrak{S}^1)^1$, also nach **31·2·21** auch $(\mathfrak{S}_1^1)^1 \subseteqq \mathfrak{S}^1$.

31·3·31. *Bei autarkem $\mathfrak{S}$ ist $(\mathfrak{S}_1^1)_1^1 = \mathfrak{S}_1^1$.*

Dies folgt aus **31·3·2** und **31·3·23**, oder aus **31·3·3.**

31·3·4. *Für jedes autarke Funktionensystem $\mathfrak{T}$ auf E ist $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}_1^1) = \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})^1$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}_1^1) = \underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})^1$.*

Wir beweisen etwa die erste dieser beiden Gleichungen. Nach **31·2·5** ist $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}_1^1) \subseteqq \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})^1$. Ist umgekehrt $A \varepsilon \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})^1$, so gibt es nach **31·3·21** und **31·3·22** ein $f \varepsilon \mathfrak{T}_1^1 (= \tilde{\mathfrak{T}})$, so daß $[f(x) > -\infty] = A$; also ist $A \varepsilon \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}_1^1)$, und mithin ist auch $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})^1 \subseteqq \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}_1^1)$.

Nun verschärfen wir noch **31·3·4** weiter zu:

31·3·41. *Ist $\mathfrak{T}$ autark und $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{N}$, so ist $\mathfrak{T}_1^1 = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}^1, \mathfrak{N}^1)$.*

Nach **31·3·4** ist nur mehr zu zeigen: ist $[f(x) > y] \varepsilon \mathfrak{M}^1$, $[f(x) < y] \varepsilon \mathfrak{N}^1$ für alle $y \varepsilon \overline{R}_1$, so ist $f \varepsilon \mathfrak{T}_1^1$; das aber folgt aus **31·2·51.**

31·3·411. *Ist $\mathfrak{T}$ völlig autark und $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{N}$, so ist $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.*

Dies folgt, da nach **31·3·23** $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1^1$ ist, aus **31·3·41** und **30·4·1.**

31·3·42. *Existiert das System $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, und sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ die Mengen A und E enthaltende Ringe, so ist $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})_1^1 = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}^1, \mathfrak{N}^1)$.*

Nach **30·3·41** ist $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ autark, die Behauptung folgt also aus **31·3·41.**

31·3·421. *Existiert $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ und sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ die Mengen A und E enthaltende Ringe, so ist, damit $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})_1^1 = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ sei, notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ σ-Systeme seien.*

Dies folgt aus **31·3·42** und **31·1·1.**

31·3·5. *Ist $\mathfrak{T}$ symmetrisch und völlig autark, ist $f_1 \varepsilon \mathfrak{T}$, $f_2 \varepsilon \mathfrak{T}$, und ist $f_1 f_2$ (bzw. $f_1 : f_2$) definiert auf E, so ist auch $f_1 f_2 \varepsilon \mathfrak{T}$ (bzw. $f_1 : f_2 \varepsilon \mathfrak{T}$).*

Setzen wir $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}$, so ist, weil $\mathfrak{T}$ symmetrisch, auch $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}$, und nach **31·3·411** ist $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$; nach **30·4·31** ist $\mathfrak{M}$ ein $\overline{\sigma}$-Ring und $A \varepsilon \mathfrak{M}$, $E \varepsilon \mathfrak{M}$; die Behauptung folgt also aus **30·5·5.**

31·3·6. *Ist $\mathfrak{T}$ symmetrisch und autark, ist $\varphi(z)$ eine stetige Funktion im Intervall $[a, b]$ des $\overline{R}_1$ und f eine der Ungleichung $a \leq f \leq b$ genügende Funktion aus $\mathfrak{T}$, so ist $\varphi(f) \varepsilon \mathfrak{T}_1^1$.*

Indem wir $\varphi(z) = \varphi(a)$ für $z \leq a$, $\varphi(z) = \varphi(b)$ für $z \geq b$ setzen, können wir annehmen, φ sei stetig im $\overline{R}_1$. Nach **25·8·1** ist die Menge $[\varphi(\hat{z}) > y]$ eine offene Menge des $\overline{R}_1$, also, wie aus **16·5·4** folgt, Summe abzählbar vieler Intervalle (a_ν, b_ν) und höchstens zweier offener Halbgeraden $z > a'$ und $z < b'$ des $\overline{R}_1$; demnach ist $[\varphi(f(\hat{x})) > y]$ Summe abzählbar vieler Mengen $[a_\nu < f(\hat{x}) < b_\nu]$ und höchstens zweier Mengen $[f(\hat{x}) > a']$, $[f(\hat{x}) < b']$. Setzen wir $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}$, so ist $[f(\hat{x}) > a'] \varepsilon \mathfrak{M}$, $[f(\hat{x}) < b'] \varepsilon \mathfrak{M}$; und wegen $[a_\nu < f(\hat{x}) < b_\nu] = [f(\hat{x}) > a_\nu] \cdot [f(\hat{x}) < b_\nu]$ ist, da $\mathfrak{M}$ nach **30·3·3** ein Ring, auch $[a_\nu < f(\hat{x}) < b_\nu] \varepsilon \mathfrak{M}$. Mithin ist $[\varphi(f(\hat{x})) > y] \varepsilon \mathfrak{M}^1$; ebenso ist $[\varphi(f(\hat{x})) < y] \varepsilon \mathfrak{M}^1$; also ist, da nach **31·3·41** $\mathfrak{T}_1^1 = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}^1, \mathfrak{M}^1)$ ist: $\varphi(f) \varepsilon \mathfrak{T}_1^1$.

31·3·7. *Ist $\mathfrak{S}$ symmetrisch, so ist auch $\mathfrak{S}_1^1$ symmetrisch.*

Dies folgt aus **31·2·7.**

4. Das Funktionensystem $\mathfrak{S}^*$. Sei wieder $\mathfrak{S}$ ein Funktionensystem auf E; wir fügen zu $\mathfrak{S}$ die Grenzfunktionen aller konvergenten Funktionenfolgen aus $\mathfrak{S}$ hinzu; das so entstehende Funktionensystem bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}^*$. Es ist $\mathfrak{S}^1 + \mathfrak{S}_1 \subseteqq \mathfrak{S}^*$.

31·4·1. *Ist $\mathfrak{S}$ autark, so ist $\mathfrak{S}^*$ autark und geschlossen.*

Da $\mathfrak{S}^*$ offenbar autark, bleibt nur zu zeigen, daß $\mathfrak{S}^*$ geschlossen ist. Sei $((f_n))$ eine gleichmäßig konvergente Folge aus $\mathfrak{S}^*$ und $f = \lim\limits_n f_n$; wir haben zu zeigen: $f \varepsilon \mathfrak{S}^*$. Indem wir zu einer Teilfolge übergehen, können wir annehmen: $\|f_n - f\| < \frac{1}{2^{n+1}}$; dann ist

$$\|f_{n+1} - f_n\| \leq \|f_{n+1} - f\| + \|f - f_n\| < \frac{1}{2^n}. \tag{4}$$

Da $f_n \varepsilon \mathfrak{S}^*$, gibt es in $\mathfrak{S}$ eine Folge $f_{n1}, f_{n2}, \ldots, f_{n\nu}, \ldots$ mit $\lim\limits_\nu f_{n\nu} = f_n$. Wir bestimmen $f'_{2\nu}$ und $f''_{2\nu}$ aus $S(f'_{2\nu}) = \min\left(S(f_{2\nu}), S(f_{1\nu}) + \frac{1}{2}\right)$, $S(f''_{2\nu}) = \max\left(S(f'_{2\nu}), S(f_{1\nu}) - \frac{1}{2}\right)$; dann ist $\|f''_{2\nu} - f_{1\nu}\| \leq \frac{1}{2}$; und da nach (4):

$\|f_2 - f_1\| < \frac{1}{2}$, ist für jedes einzelne x: $\|f_{2\nu}(x) - f_{1\nu}(x)\| < \frac{1}{2}$ für fast alle ν; somit $f''_{2\nu}(x) = f_{2\nu}(x)$ für fast alle ν, also auch $\lim\limits_{\nu} f''_{2\nu} = f_2$; da $f''_{2\nu} \varepsilon \mathfrak{S}$, können wir die Folge $((f_{2\nu}))$ ersetzen durch $((f''_{2\nu}))$; wir können also von vornherein annehmen: $\|f_{2\nu} - f_{1\nu}\| \leq \frac{1}{2}$. Ganz ebenso können wir annehmen: $\|f_{3\nu} - f_{2\nu}\| \leq \frac{1}{2^2}$, und allgemein: $\|f_{n+1\nu} - f_{n\nu}\| \leq \frac{1}{2^n}$. Dann ist:

$$\|f_{n+k\nu} - f_{n\nu}\| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+k-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{4·1}$$

Nun zeigen wir, daß $f = \lim\limits_{\nu} f_{\nu\nu}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben; wir wählen n gemäß $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{3}$. Wegen (4·1) und weil $\|f_n - f\| < \frac{1}{2^{n-1}}$ war, gilt für $\nu > n$:

$$\begin{aligned}\|f_{\nu\nu} - f\| &\leq \|f_{\nu\nu} - f_{n\nu}\| + \|f_{n\nu} - f_n\| + \|f_n - f\| \\ &< \frac{1}{2^{n-1}} + \|f_{n\nu} - f_n\| + \frac{1}{2^{n-1}} < \|f_{n\nu} - f_n\| + \frac{2\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Da $\lim\limits_{\nu} f_{n\nu} = f_n$, gibt es zu jedem x ein $\nu_x > n$, so daß $\|f_{n\nu}(x) - f_n(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ für $\nu \geq \nu_x$; also ist $\|f_{\nu\nu}(x) - f(x)\| < \varepsilon$ für $\nu \geq \nu_x$, d. h. es ist $\lim\limits_{\nu} f_{\nu\nu} = f$, wie behauptet. Da $f_{\nu\nu} \varepsilon \mathfrak{S}$ war, ist also $f \varepsilon \mathfrak{S}^*$, w. z. b. w.

31·4·11. *Ist $\mathfrak{S}$ autark und additiv, so ist $\mathfrak{S}^*$ völlig autark.*

Ist $\mathfrak{S}$ autark und additiv, so ist offenbar auch $\mathfrak{S}^*$ additiv; die Behauptung folgt also aus **31·4·1.**

Wir führen nun folgende abkürzende Bezeichnungsweise ein (auf die wir in §§ 33, 34 zurückkommen): ist $\mathfrak{M}$ ein System von Teilen von E, $\mathfrak{S}$ ein System von Funktionen auf E, so setzen wir:

$$(\mathfrak{M}^1)_1 = \mathfrak{M}_2, \; (\mathfrak{M}_1)^1 = \mathfrak{M}^2; \; (\mathfrak{S}^1)_1 = \mathfrak{S}_2, \; (\mathfrak{S}_1)^1 = \mathfrak{S}^2.$$

31·4·2. *Bei autarkem $\mathfrak{S}$ ist $\mathfrak{S}^* \subseteqq \mathfrak{S}_2 \, \mathfrak{S}^2$.*

Sei $f \varepsilon \mathfrak{S}^*$, d. h. $f = \lim\limits_{n} f_n$, $f_n \varepsilon \mathfrak{S}$. Wir setzen $g_n = \inf\limits_{\nu \geq n} f_\nu$; nach **31·2·2** ist $g_n \varepsilon \mathfrak{S}_1$; nun ist $f = \lim\limits_{n} g_n$, $g_n \leq g_{n+1}$, also $f \varepsilon (\mathfrak{S}_1)^1$, d. h. $f \varepsilon \mathfrak{S}^2$. Ebenso zeigt man: $f \varepsilon \mathfrak{S}_2$.

31·4·21. *Ist $\mathfrak{T}$ autark, so ist $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^2) = \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T})^2$, $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}_2) = \underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T})^2$.*

Nach **31·2·51** ist, wenn $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{N}$ gesetzt wird: $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{S}(*, \mathfrak{N}^1)$, und da nach **30·3·3** $\mathfrak{N}$ ein Ring, also nach **3·5·1** auch $\mathfrak{N}^1$ ein Ring, ist nach **30·2·3**:

$$\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}_1) = (\mathfrak{N}^1)_1 = \mathfrak{N}_2. \tag{4·2}$$

Setzen wir $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{P}$, so besteht $\mathfrak{P}$ aus den Komplementen der Mengen von $\mathfrak{N}$, und aus (4·2) folgt durch Übergang zu den Komplementen:

$$\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}_1) = (\mathfrak{P}_1)^1 = \mathfrak{P}^2. \tag{4·21}$$

Nach **31·2·1** ist $\mathfrak{T}_1$ autark, wegen $\mathfrak{T}^2 = (\mathfrak{T}_1)^1$ ist also nach **31·2·5** $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^2) = (\mathfrak{P}^2)^1$, und somit nach **31·1·2**: $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^2) = \mathfrak{P}^2$.

31·4·22. *Ist $\mathfrak{T}$ völlig autark, so ist $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^2) = \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T})^1$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}_2) = \underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T})^1$.*

Nach **30·4·1** ist $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{P}$ ein δ-Ring, also $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}$, also $\mathfrak{P}^2 = (\mathfrak{P}_1)^1 = \mathfrak{P}^1$; die Behauptung folgt also aus **31·4·21.**

31·4·3. *Ist $\mathfrak{T}$ autark und additiv, und ist $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{P}$, $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{Q}$, so ist $\mathfrak{T}^* = \mathfrak{S}(\mathfrak{P}^2, \mathfrak{Q}^2)$.*

Wegen **31·4·11, 31·3·411** genügt es zu zeigen: $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^*) = \mathfrak{P}^2$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^*) = \mathfrak{Q}^2$. Wir beweisen etwa die erste dieser Gleichungen. Nach **31·4·2** ist $\mathfrak{T}^* \subseteqq \mathfrak{T}^2$, also $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^*) \subseteqq \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^2)$, also nach **31·4·21** $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^*) \subseteqq \mathfrak{P}^2$. Wegen $\mathfrak{T}^* \supseteqq \mathfrak{T}_1$ ist umgekehrt $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^*) \supseteqq \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}_1)$, d. h. nach (4·21): $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^*) \supseteqq \mathfrak{P}^2$. Also ist $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^*) = \mathfrak{P}^2$, w. z. b. w.

31·4·31. *Ist $\mathfrak{T}$ völlig autark und $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{P}$, $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{Q}$, so ist $\mathfrak{T}^* = \mathfrak{S}(\mathfrak{P}^1, \mathfrak{Q}^1)$.*

Nach **30·4·1** ist $\mathfrak{P}$ ein δ-Ring, also $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}^2 = (\mathfrak{P}_1)^1 = \mathfrak{P}^1$; ebenso ist $\mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{Q}^1$; die Behauptung folgt also aus **31·4·3.**

31·4·4. *Bei autarkem, additivem $\mathfrak{T}$ ist $\mathfrak{T}^* = \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}^2$.*

Nach **31·4·2** ist nur mehr zu zeigen $\mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}^2 \subseteqq \mathfrak{T}^*$. Dies folgt unmittelbar aus **31·4·21, 31·4·3.**

31·4·41. *Bei autarkem, additivem $\mathfrak{T}$ ist $\mathfrak{T}^* = (\mathfrak{T}^1 + \mathfrak{T}_1)^1_1$.*

Nach (2) ist $(\mathfrak{T}^1 + \mathfrak{T}_1)^1 = \mathfrak{T}^2$, $(\mathfrak{T}^1 + \mathfrak{T}_1)_1 = \mathfrak{T}_2$, also $(\mathfrak{T}^1 + \mathfrak{T}_1)^1_1 = \mathfrak{T}^2 \mathfrak{T}_2$, und die Behauptung folgt aus **31·4·4.**

31·4·5. *Bei autarkem, additivem $\mathfrak{T}$ ist $(\mathfrak{T}^1_1)^* = \mathfrak{T}^*$.*

Setzen wir $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{N}$, $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{P}$, $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{Q}$, so ist nach **31·3·4** $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^1_1) = \mathfrak{M}^1$, also nach **31·1·4**: $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}^1_1) = \mathfrak{Q}_1$, ebenso $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}^1_1) = \mathfrak{P}_1$. Nach **31·3·2** ist $\mathfrak{T}^1_1$ völlig autark, also ist nach **31·4·31** $(\mathfrak{T}^1_1)^* = \mathfrak{S}(\mathfrak{P}^2, \mathfrak{Q}^2)$, somit nach **31·4·3** $(\mathfrak{T}^1_1)^* = \mathfrak{T}^*$.

31·4·6. *Damit $\mathfrak{T}^* = \mathfrak{T}$ sei, ist notwendig und bei autarkem $\mathfrak{T}$ hinreichend, daß $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^1 = \mathfrak{T}_1$ sei.*

Notwendig: Dies folgt aus $\mathfrak{T} \subseteqq \mathfrak{T}^1 \subseteqq \mathfrak{T}^*$, $\mathfrak{T} \subseteqq \mathfrak{T}_1 \subseteqq \mathfrak{T}^*$. Hinreichend: Ist $\mathfrak{T}^1 = \mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}$, so auch $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^2 = \mathfrak{T}$; also ist nach **31·4·2** $\mathfrak{T}^* \subseteqq \mathfrak{T}$, und da gewiß $\mathfrak{T} \subseteqq \mathfrak{T}^*$, ist $\mathfrak{T}^* = \mathfrak{T}$.

31·4·61. *Ist $\mathfrak{T}$ autark und additiv und $\mathfrak{T}^* = \mathfrak{T}$, so ist $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T})^1$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T})^1$, $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})_1$, $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})_1$.*

Nach **31·4·11** ist $\mathfrak{T}^*$, also auch $\mathfrak{T}$ völlig autark, also ist nach **31·4·31** $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^* = \mathfrak{S}(\mathfrak{P}^1, \mathfrak{Q}^1)$, also $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{P}^1 = \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T})^1$, und durch Übergang zu den Komplementen folgt: $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})_1$.

31·4·62. *Ist $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ autark und additiv, so ist, damit $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})^* = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ sei, notwendig und hinreichend, daß sowohl $\mathfrak{M}$ als $\mathfrak{N}$ ein die Mengen Λ und E enthaltender σ- und δ-Ring sei.*

Notwendig: Nach **31·4·11** ist $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ völlig autark, also ist nach **30·4·31** $\mathfrak{M}$ ein die Mengen Λ und E enthaltender σ-Ring. Bleibt zu beweisen, daß $\mathfrak{M}$ ein δ-System ist. Setzen wir $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \mathfrak{T}$, $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{P}$, $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{Q}$, so ist nach **31·4·61** $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}^1$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}_1$, also $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^2$; wegen $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{M}_1 \subseteqq \mathfrak{M}^2$ ist also $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$, also $\mathfrak{M}$ ein δ-System, w. z. b. w. Hinreichend: Ist $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ ein die Mengen E und Λ enthaltender σ- und δ-Ring, so durch Übergang zu den Komplementen auch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$. Wegen $\mathfrak{P}^1 = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$ folgt aus **30·2·1** $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P} \subseteqq \mathfrak{M}$, also $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}$, und weil $\mathfrak{M}$, also auch $\mathfrak{P}$ ein δ- und σ-System: $\mathfrak{M} = \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}^2$, und ebenso $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q}^2$; also ist $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{P}^2, \mathfrak{Q}^2)$ und nach **31·4·3** $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})^*$.

31·4·7. *Ist $\mathfrak{T}$ symmetrisch, so ist auch $\mathfrak{T}^*$ symmetrisch.*

Denn ist $f = \lim\limits_n f_n$, $f_n \varepsilon \mathfrak{T}$, so $-f = \lim\limits_n (-f_n)$, $-f_n \varepsilon \mathfrak{T}$.

5. **Das Mengensystem $\mathfrak{M}_1^1$.** In Analogie zur Definition des Funktionensystemes $\mathfrak{S}_1^1$ setzen wir, wenn $\mathfrak{M}$ ein System von Teilen von E bedeutet: $\mathfrak{M}_1^1 = \mathfrak{M}^1 \,.\, \mathfrak{M}_1$. Aus **3·5·1** folgt:

31·5·1. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, so ist auch $\mathfrak{M}_1^1$ ein Ring.*

31·5·11. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Körper, so ist auch $\mathfrak{M}_1^1$ ein Körper.*

Da $\mathfrak{M}_1^1$ nach **31·5·1** ein Ring, ist nur zu zeigen: aus $A \varepsilon \mathfrak{M}_1^1$, $B \varepsilon \mathfrak{M}_1^1$ folgt $A - B \varepsilon \mathfrak{M}_1^1$. Ist $A \varepsilon \mathfrak{M}_1^1$, so ist $A \varepsilon \mathfrak{M}^1$ und $A \varepsilon \mathfrak{M}_1$, also $A = \underset{m}{S} A'_m = \underset{m}{D} A''_m$ mit $A'_m \varepsilon \mathfrak{M}$, $A''_m \varepsilon \mathfrak{M}$; ebenso $B = \underset{n}{D} B'_n = \underset{n}{S} B''_n$ mit $B'_n \varepsilon \mathfrak{M}$, $B''_n \varepsilon \mathfrak{M}$; mithin ist $A - B = \underset{m}{S} A'_m - \underset{n}{D} B'_n = \underset{m,n}{S} (A'_m - B'_n)$, und auch $A - B = \underset{m}{D} A''_m - \underset{n}{S} B''_n = \underset{m,n}{D} (A''_m - B''_n)$; da $\mathfrak{M}$ ein Körper, ist $A'_m - B'_n \varepsilon \mathfrak{M}$, $A''_m - B''_n \varepsilon \mathfrak{M}$, also $A - B \varepsilon \mathfrak{M}^1$ und $A - B \varepsilon \mathfrak{M}_1$, d. h. $A - B \varepsilon \mathfrak{M}_1^1$, w. z. b. w.

Wir bezeichnen nun ein Mengensystem $\mathfrak{M}$, für das $\mathfrak{M}_1^1 = \mathfrak{M}$ ist, als ein μ-System.

31·5·2. *Der Durchschnitt zweier μ-Systeme $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ist ein μ-System.*

Es ist $(\mathfrak{M}\,\mathfrak{N})_1^1 \subseteqq \mathfrak{M}_1^1 = \mathfrak{M}$, ebenso $(\mathfrak{M}\,\mathfrak{N})_1^1 \subseteqq \mathfrak{N}$, also $(\mathfrak{M}\,\mathfrak{N})_1^1 \subseteqq \mathfrak{M}\,\mathfrak{N}$; und da auch $\mathfrak{M}\,\mathfrak{N} \subseteqq (\mathfrak{M}\,\mathfrak{N})_1^1$, ist $\mathfrak{M}\,\mathfrak{N} = (\mathfrak{M}\,\mathfrak{N})_1^1$.

31·5·3. *Bei beliebigem $\mathfrak{M}$ sind $\mathfrak{M}^1$ und $\mathfrak{M}_1$ μ-Systeme.*

Nach **31·1·2** ist $(\mathfrak{M}^1)^1 = \mathfrak{M}^1$; wegen $(\mathfrak{M}^1)_1 \supseteqq \mathfrak{M}^1$ ist also $(\mathfrak{M}^1)_1^1 = (\mathfrak{M}^1)^1 (\mathfrak{M}^1)_1 = \mathfrak{M}^1$.

31·5·4. *$\mathfrak{M}_1^1$ ist das kleinste μ-System über $\mathfrak{M}$.*

Nach **31·5·2** und **31·5·3** ist $\mathfrak{M}_1^1$ ein μ-System. Sei $\mathfrak{N}$ ein μ-System über $\mathfrak{M}$, d. h. $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1^1$; aus $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{N}$ folgt $\mathfrak{M}_1^1 \subseteqq \mathfrak{N}_1^1$, also $\mathfrak{M}_1^1 \subseteqq \mathfrak{N}$.

31·5·5. *Bei beliebigem $\mathfrak{M}$ ist $(\mathfrak{M}_1^1)^1 = \mathfrak{M}^1$, $(\mathfrak{M}_1^1)_1 = \mathfrak{M}_1$.*

Der Beweis ist derselbe wie für **31·3·3.**

31·5·51. *Bei beliebigem $\mathfrak{M}$ ist $(\mathfrak{M}_1^1)_1^1 = \mathfrak{M}_1^1$.*

Dies folgt aus **31·5·4** oder aus **31·5·5.**

6. **Das Mengensystem $\mathfrak{M}^*$.** Wir fügen zu $\mathfrak{M}$ alle in der Form $M = \operatorname*{Lim}_n M_n$ $(M_n \,\varepsilon\, \mathfrak{M})$ darstellbaren Mengen hinzu; das so entstehende Mengensystem bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}^*$. Nach **3·5·2**, **3·7·3** ist, wenn $\mathfrak{M}$ ein Ring: $\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1 \subseteqq \mathfrak{M}^*$.

31·6·1. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, so ist $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}_2\, \mathfrak{M}^2$.*

Aus **3·7·4** folgt: $\mathfrak{M}^* \subseteqq \mathfrak{M}_2\, \mathfrak{M}^2$. Bleibt zu zeigen: $\mathfrak{M}_2\, \mathfrak{M}^2 \subseteqq \mathfrak{M}^*$, d. h.: ist $A \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_2\, \mathfrak{M}^2$, so ist auch $A \,\varepsilon\, \mathfrak{M}^*$. Dies ist richtig, wenn $A = \Lambda$; denn wegen $A \,\varepsilon\, \mathfrak{M}^2$ ist $A = \mathop{\mathsf{S}}_n B_n$ mit $B_n \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_1$; wegen $A = \Lambda$ ist aber auch $B_n = \Lambda$, also $\Lambda \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_1$, und somit $\Lambda \,\varepsilon\, \mathfrak{M}^*$, wie behauptet. Analog beweist man die Behauptung, wenn $A = E$. Sei also $\Lambda \subset A \subset E$. Wir setzen $\tilde{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} + \{\Lambda, E\}$ und bezeichnen mit $\tilde{\mathfrak{N}}$ das System der Komplemente der Mengen von $\tilde{\mathfrak{M}}$ bzgl. E; nach **31·1·4** ist dann $\tilde{\mathfrak{N}}^2$ bzw. $\tilde{\mathfrak{N}}_2$ das System der Komplemente der Mengen von $\tilde{\mathfrak{M}}_2$, bzw. $\tilde{\mathfrak{M}}^2$. Sei $\mathfrak{T}$ das System aller Funktionen, die nur endlich viele verschiedene Werte annehmen, und für die jede Menge $[f(\dot{x}) \geq y] \,\varepsilon\, \tilde{\mathfrak{M}}$ ist; dann ist $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \tilde{\mathfrak{M}}$, und da die Funktionen aus $\mathfrak{T}$ nur endlich viele Werte annehmen: $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{G}(\mathfrak{T}) = \tilde{\mathfrak{N}}$; und weil $\tilde{\mathfrak{M}}$ ein die Mengen Λ und E enthaltender Ring, ist offenbar $\mathfrak{T}$ autark und additiv. Sei nun $A \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_2\, \mathfrak{M}^2$; dann ist auch $A \,\varepsilon\, \tilde{\mathfrak{M}}_2\, \tilde{\mathfrak{M}}^2$, also $E - A \,\varepsilon\, \tilde{\mathfrak{N}}_2\, \tilde{\mathfrak{N}}^2$; und sei $g = 1$ auf A, $g = 0$ auf $E - A$; dann ist $[g(\dot{x}) > y] \,\varepsilon\, \tilde{\mathfrak{M}}^2$, $[g(\dot{x}) < y] \,\varepsilon\, \tilde{\mathfrak{N}}^2$ für alle $y \,\varepsilon\, \overline{R}_1$, also ist nach **31·4·3** $g \,\varepsilon\, \mathfrak{T}^*$, d. h. es gibt in $\mathfrak{T}$ eine Folge $((f_n))$ mit $\lim_n f_n = g$. Da g nur die Werte 0, 1 annimmt, ist $[g(\dot{x}) = 1] = \operatorname*{Lim}_n \left[f_n(\dot{x}) \geq \frac{1}{2}\right]$, d. h. wenn $\left[f_n(\dot{x}) \geq \frac{1}{2}\right] = A_n$ gesetzt wird: $A = \operatorname*{Lim}_n A_n$, und wegen $f_n \,\varepsilon\, \mathfrak{T}$ ist $A_n \,\varepsilon\, \tilde{\mathfrak{M}}$. Da $\Lambda \subset A \subset E$, ist auch $\Lambda \subset A_n \subset E$ für fast alle n, und unter Weglassung endlich vieler A_n können wir annehmen, dies gelte für alle n; dann aber folgt aus $A_n \,\varepsilon\, \tilde{\mathfrak{M}}$ auch $A_n \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$, und somit $A \,\varepsilon\, \mathfrak{M}^*$, w. z. b. w.

31·6·11. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, so ist* $\mathfrak{M}^* = (\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1)_1^1$.

Nach (1) ist $(\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1)^1 = \mathfrak{M}^2$, $(\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1)_1 = \mathfrak{M}_2$, und die Behauptung folgt aus **31·6·1**.

31·6·12. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring und $\mathfrak{R}$ der kleinste Ring über $\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1$, so ist* $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{R}_1^1$.

Da $\mathfrak{M}^2$ nach **3·5·1** ein Ring, folgt aus $\mathfrak{M}^2 \supseteqq \mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1$ auch $\mathfrak{M}^2 \supseteqq \mathfrak{R}$, und da nach **31·1·2** $(\mathfrak{M}^2)^1 = \mathfrak{M}^2$ ist, folgt daraus $\mathfrak{M}^2 \supseteqq \mathfrak{R}^1$; andererseits ist wegen (1): $\mathfrak{R}^1 \supseteqq (\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1)^1 = \mathfrak{M}^2$; also ist $\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{R}^1$. Ebenso zeigt man $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{R}_1$. Die Behauptung folgt also aus **31·6·1**.

31·6·2. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, so ist $\mathfrak{M}^*$ ein μ-System.*

Dies folgt aus **31·6·11**, **31·5·4**.

31·6·21. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, so ist auch $\mathfrak{M}^*$ ein Ring; ist $\mathfrak{M}$ ein Körper, so ist auch $\mathfrak{M}^*$ ein Körper.*

Sei $A \varepsilon \mathfrak{M}^*$, $B \varepsilon \mathfrak{M}^*$, also $A = \operatorname*{Lim}_n A_n$, $B = \operatorname*{Lim}_n B_n$ mit $A_n \varepsilon \mathfrak{M}$, $B_n \varepsilon \mathfrak{M}$. Nach § 3 (7·7) ist dann $A + B = \operatorname*{Lim}_n (A_n + B_n)$, $A\,B = \operatorname*{Lim}_n A_n B_n$, $A - B = \operatorname*{Lim}_n (A_n - B_n)$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

31·6·3. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, so ist* $(\mathfrak{M}_1^1)^* = \mathfrak{M}^*$.

Da $(\mathfrak{M}_1^1)^* \supseteqq \mathfrak{M}^*$, ist nur zu zeigen $(\mathfrak{M}_1^1)^* \subseteqq \mathfrak{M}^*$. Setzen wir $\mathfrak{M}_1^1 = \mathfrak{N}$, so ist $\mathfrak{N}^1 \subseteqq (\mathfrak{M}^1)^1 = \mathfrak{M}^1$, also $\mathfrak{N}_2 \subseteqq \mathfrak{M}_2$, ebenso $\mathfrak{N}^2 \subseteqq \mathfrak{M}^2$, also $\mathfrak{N}_2\,\mathfrak{N}^2 \subseteqq \mathfrak{M}_2\,\mathfrak{M}^2$, d. h. nach **31·5·1** und **31·6·1** $\mathfrak{N}^* \subseteqq \mathfrak{M}^*$, w. z. b. w.

Ein System $\mathfrak{M}$, für das $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}$ ist, haben wir in § 3, 8 als λ-System bezeichnet.

31·6·4. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, so ist, damit $\mathfrak{M}$ ein λ-System sei, notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 = \mathfrak{M}_1$ sei.*

Der Beweis ist analog dem von **31·4·6**.

Literatur zu § 31: F. Hausdorff, Mengenlehre § 41; W. Sierpiński, Fund. math. 18 (1932) S. 1.

§ 32. Einschiebungs- und Erweiterungssätze.

1. Einschiebungssatz für Mengen. Sei wieder E eine ganz beliebige Menge, $\mathfrak{M}$ ein System von Teilen von E.

32·1·1. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, $B \varepsilon \mathfrak{M}_1$, $C \varepsilon \mathfrak{M}^1$ und $B \subseteqq C$, so gibt es ein $A \varepsilon \mathfrak{M}_1^1$, so daß $B \subseteqq A \subseteqq C$.*

Nach **3·5·2** ist $B = \underset{n}{\mathfrak{D}}\, B_n$, $C = \underset{n}{\mathfrak{S}}\, C_n$, wo $B_n \varepsilon \mathfrak{M}$, $C_n \varepsilon \mathfrak{M}$, $B_n \supseteqq B_{n+1}$, $C_n \subseteqq C_{n+1}$. Wir definieren zwei Mengenfolgen $((P_n))$, $((Q_n))$ aus $\mathfrak{M}$ durch:

(1) $\quad P_1 = B_1,\ Q_1 = B_1\, C_1; \quad P_{n+1} = Q_n + B_{n+1},\ Q_{n+1} = P_{n+1}\, C_{n+1}$.

Dann ist:

(1·1) $$P_n \supseteq B_n, \ Q_n \subseteq C_n; \quad P_{n+1} \supseteq Q_n, \quad Q_n \subseteq P_n.$$

Aus (1·1) folgt $Q_n \subseteq P_n$, $B_{n+1} \subseteq B_n \subseteq P_n$; $Q_n \subseteq P_{n+1}$, $Q_n \subseteq C_n \subseteq C_{n+1}$; also folgt aus (1):

(1·2) $$P_{n+1} \subseteq P_n, \quad Q_n \subseteq Q_{n-1}.$$

Wir setzen nun $\underset{n}{D}\, P_n = P$, $\underset{n}{S}\, Q_n = Q$; dann ist $P \varepsilon \mathfrak{M}_1$, $Q \varepsilon \mathfrak{M}^1$, und wegen (1·1) ist $P \supseteq B$, $Q \subseteq C$. Wir werden nun zeigen, daß $P = Q$, womit dann **32·1·1** bewiesen sein wird. — Da nach (1·1) $Q_n \subseteq P_n$, und nach (1·2) und **3·7·3** $\underset{n}{\mathrm{Lim}}\, P_n = P$, $\underset{n}{\mathrm{Lim}}\, Q_n = Q$, ist nach **3·7·1** $Q \subseteq P$. Es bleibt also nur zu zeigen: $Q \supseteq P$, d. h. $P - Q = \Lambda$. Gäbe es ein $a \varepsilon P - Q$, so wäre $a \varepsilon P_n - Q_n$ und $a \varepsilon P_{n+1} - Q_n$ für alle n; nach (1) ist aber $P_n - Q_n \subseteq E - C_n$, $P_{n+1} - Q_n \subseteq B_{n+1} \subseteq B_n$; es wäre also $a \sim\varepsilon C_n$, $a \varepsilon B_n$ für alle n, mithin $a \sim\varepsilon C$, $a \varepsilon B$, entgegen der Annahme $B \subseteq C$; es gibt also kein $a \varepsilon P - Q$, d. h. $P - Q = \Lambda$, w. z. b. w.

32·1·11. *Ist der Ring $\mathfrak{M}$ ein μ-System, $B \varepsilon \mathfrak{M}_1$, $C \varepsilon \mathfrak{M}^1$ und $B \subseteq C$, so gibt es ein $A \varepsilon \mathfrak{M}$, so daß $B \subseteq A \subseteq C$.*

Dies folgt nach Definition der μ-Systeme (§ 31, 5) unmittelbar aus **32·1·1.**

Literatur: W. Sierpiński, Fund. math. 6 (1924) S. 1.

2. Einschiebungssatz für Funktionen. Sei nun $\mathfrak{S}$ irgendein System von Funktionen auf E.

32·2·1. *Ist $\mathfrak{S}$ autark, $g \varepsilon \mathfrak{S}_1$, $h \varepsilon \mathfrak{S}^1$ und $g \leq h$, so gibt es ein $f \varepsilon \mathfrak{S}_1^1$, so daß $g \leq f \leq h$.*

Nach § 31, 2 ist $g = \underset{n}{\lim}\, g_n$, $h = \underset{n}{\lim}\, h_n$, wo $g_n \varepsilon \mathfrak{S}$, $h_n \varepsilon \mathfrak{S}$, $g_n \geq g_{n+1}$, $h_n \leq h_{n+1}$. Wir definieren zwei Funktionenfolgen $((\varphi_n))$, $((\psi_n))$ aus $\mathfrak{S}$ durch:

(2) $\varphi_1 = g_1$, $\psi_1 = \min(g_1, h_1)$; $\varphi_{n+1} = \max(\psi_n, g_{n+1})$, $\psi_{n+1} = \min(\varphi_{n+1}, h_{n+1})$.

Dann ist:

(2·1) $$\varphi_n \geq g_n, \ \psi_n \leq h_n; \quad \varphi_{n+1} \geq \psi_n, \ \psi_n \leq \varphi_n.$$

Aus (2·1) folgt $\psi_n \leq \varphi_n$, $g_{n+1} \leq g_n \leq \varphi_n$; $\psi_n \leq \varphi_{n+1}$, $\psi_n \leq h_n \leq h_{n+1}$; also folgt aus (2):

(2·2) $$\varphi_{n+1} \leq \varphi_n, \quad \psi_n \leq \psi_{n+1}.$$

Wir setzen nun $\underset{n}{\lim}\, \varphi_n = \varphi$, $\underset{n}{\lim}\, \psi_n = \psi$; da $\mathfrak{S}$ autark, ist $\varphi_n \varepsilon \mathfrak{S}$, $\psi_n \varepsilon \mathfrak{S}$, also $\varphi \varepsilon \mathfrak{S}_1$, $\psi \varepsilon \mathfrak{S}^1$, und wegen (2·1) ist $\varphi \geq g$, $\psi \leq h$. Wir werden nun zeigen, daß $\varphi = \psi$, womit dann **32·2·1** bewiesen sein wird. — Da nach (2·1) $\psi_n \leq \varphi_n$, ist auch $\psi \leq \varphi$. Es bleibt also nur zu zeigen: $\psi \geq \varphi$. Gäbe es ein $x \varepsilon E$ mit $\psi(x) < \varphi(x)$, so wäre auch $\psi_n(x) < \varphi_n(x)$, $\psi_n(x) < \varphi_{n+1}(x)$

für alle n; dann aber wäre nach (2): $\psi_n(x) = h_n(x)$, $\varphi_{n+1}(x) = g_{n+1}(x)$ für alle n, also $\psi(x) = h(x)$, $\varphi(x) = g(x)$, also $h(x) < g(x)$ entgegen der Voraussetzung $g \leq h$; es gibt also kein x mit $\psi(x) < \varphi(x)$, d. h. es ist $\varphi \leq \psi$, w. z. b. w.

32·2·11. *Ist $\mathfrak{S}$ völlig autark, $g \varepsilon \mathfrak{S}_1$, $h \varepsilon \mathfrak{S}^1$ und $g \leq h$, so gibt es ein $f \varepsilon \mathfrak{S}$, so daß $g \leq f \leq h$.*

Nach **31·3·23** ist $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1^1$, die Behauptung folgt also aus **32·2·1.**

Literatur: H. Hahn, Wien. Ber. 126 (1917) S. 103; F. Hausdorff, Math. Zeitschr. 5 (1919) S. 292; Mengenlehre S. 243.

3. **Erweiterungssätze für Mengen.** Sei wieder $\mathfrak{M}$ ein System von Teilen von E und sei $E' \subseteqq E$; das System der Durchschnitte $E'M$ für alle $M \varepsilon \mathfrak{M}$ bezeichnen wir mit $E' \mathbin{1} \mathfrak{M}$; ebenso bedeutet $E' \mathbin{1} \mathfrak{M}^1$ das System der Mengen $E'M$ für alle $M \varepsilon \mathfrak{M}^1$ usf. Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, so auch $E' \mathbin{1} \mathfrak{M}$. Bedeutet $\mathfrak{N}_r$ den kleinsten Ring über dem Mengensystem $\mathfrak{N}$, so gilt:

32·3·1. *Bei beliebigem $\mathfrak{M}$ ist $(E' \mathbin{1} \mathfrak{M})_r = E' \mathbin{1} \mathfrak{M}_r$.*

Nach § 3, 2 besteht $\mathfrak{M}_r$ aus allen Mengen der Gestalt: $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, wo $A_i = A_{i1} A_{i2} \ldots A_{ik_i}$ und $A_{ij} \varepsilon \mathfrak{M}$; setzen wir $E' A_i = A_i'$, $E' A_{ij} = A_{ij}'$, so besteht also $E' \mathbin{1} \mathfrak{M}_r$ aus allen Mengen der Gestalt $A_1' + A_2' + \ldots + A_n'$, wo $A_i' = A_{i1}' A_{i2}' \ldots A_{ik_i}'$ und $A_{ij}' \varepsilon E' \mathbin{1} \mathfrak{M}$; also ist nach § 3, 2 $E' \mathbin{1} \mathfrak{M}_r$ der kleinste Ring über $E' \mathbin{1} \mathfrak{M}$, d. h. $E' \mathbin{1} \mathfrak{M}_r = (E' \mathbin{1} \mathfrak{M})_r$.

32·3·2. *Bei beliebigem $E' \subseteqq E$ ist $(E' \mathbin{1} \mathfrak{M})^1 = E' \mathbin{1} \mathfrak{M}^1$, $(E' \mathbin{1} \mathfrak{M})_1 = E' \mathbin{1} \mathfrak{M}_1$.*

$\mathfrak{M}^1$ besteht aus allen Mengen der Gestalt $\underset{n}{S} A_n$, wo $A_n \varepsilon \mathfrak{M}$; setzen wir $E'A_n = A_n'$, so besteht also $E' \mathbin{1} \mathfrak{M}^1$ aus allen Mengen der Gestalt $\underset{n}{S} A_n'$, wo $A_n' \varepsilon E' \mathbin{1} \mathfrak{M}$, also ist $E' \mathbin{1} \mathfrak{M}^1 = (E' \mathbin{1} \mathfrak{M})^1$.

32·3·3. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, $E' \varepsilon \mathfrak{M}_1$, so ist $(E' \mathbin{1} \mathfrak{M})_1^1 = E' \mathbin{1} \mathfrak{M}_1^1$.*

Nach **32·3·2** ist $(E' \mathbin{1} \mathfrak{M})_1^1 = (E' \mathbin{1} \mathfrak{M})^1 . (E' \mathbin{1} \mathfrak{M})_1 = E' \mathbin{1} \mathfrak{M}^1 . E' \mathbin{1} \mathfrak{M}_1$; und da $\mathfrak{M}_1^1 \subseteqq \mathfrak{M}^1$, $\mathfrak{M}_1^1 \subseteqq \mathfrak{M}_1$, also $E' \mathbin{1} \mathfrak{M}_1^1 \subseteqq E' \mathbin{1} \mathfrak{M}^1 . E' \mathbin{1} \mathfrak{M}_1$, ist $E' \mathbin{1} \mathfrak{M}_1^1 \subseteqq (E' \mathbin{1} \mathfrak{M})_1^1$. Bleibt zu zeigen: $(E' \mathbin{1} \mathfrak{M})_1^1 \subseteqq E' \mathbin{1} \mathfrak{M}_1^1$, d. h. aus $A \varepsilon (E' \mathbin{1} \mathfrak{M})_1^1$ folgt $A \varepsilon E' \mathbin{1} \mathfrak{M}_1^1$. Sei also $A \varepsilon (E' \mathbin{1} \mathfrak{M})_1^1$; dann ist $A \varepsilon (E' \mathbin{1} \mathfrak{M})^1$ und $A \varepsilon (E' \mathbin{1} \mathfrak{M})_1$, also nach **32·3·2**: $A \varepsilon E' \mathbin{1} \mathfrak{M}^1$ und $A \varepsilon E' \mathbin{1} \mathfrak{M}_1$; es ist also: $A = E'P = E'Q$, wo $P \varepsilon \mathfrak{M}^1$, $Q \varepsilon \mathfrak{M}_1$; da nach **3·5·1** $\mathfrak{M}_1$ ein Ring, folgt aus $E' \varepsilon \mathfrak{M}_1$, $Q \varepsilon \mathfrak{M}_1$ auch $E'Q \varepsilon \mathfrak{M}_1$, d. h. $A \varepsilon \mathfrak{M}_1$; wegen $A = E'P$ ist $A \subseteqq P$; da $A \varepsilon \mathfrak{M}_1$, $P \varepsilon \mathfrak{M}^1$, gibt es nach **32·1·1** ein $B \varepsilon \mathfrak{M}_1^1$, so daß $A \subseteqq B \subseteqq P$; dann ist auch $A = E'A \subseteqq E'B \subseteqq E'P = A$, also $A = E'B$, d. h. $A \varepsilon E' \mathbin{1} \mathfrak{M}_1^1$, w. z. b. w.

32·3·4. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, $E' \varepsilon \mathfrak{M}_2$, so ist $(E' \mathbin{1} \mathfrak{M})^* = E' \mathbin{1} \mathfrak{M}^*$.*

Wir setzen, wenn wieder $\mathfrak{N}_r$ den kleinsten Ring über $\mathfrak{N}$ bedeutet: $(\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1)_r = \mathfrak{N}$, $\left((E' \mathbin{1} \mathfrak{M})^1 + (E' \mathbin{1} \mathfrak{M})_1\right)_r = \mathfrak{N}'$. Da nach **32·3·2**: $(E' \mathbin{1} \mathfrak{M})^1$

$+(E' 1\, \mathfrak{M})_1 = E' 1\, \mathfrak{M}^1 + E' 1\, \mathfrak{M}_1 = E' 1\, (\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1)$, ist $\mathfrak{N}' = \big(E' 1\, (\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1)\big)_r$, also nach **32·3·1**: $\mathfrak{N}' = E' 1\, \mathfrak{N}$. Nach **31·6·12** ist daher $(E' 1\, \mathfrak{M})^* = \mathfrak{N}'^1_1 = (E' 1\, \mathfrak{N})^1_1$; da nach § 31 (1): $\mathfrak{M}_2 = (\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1)_1$, ist $\mathfrak{M}_2 \subseteqq \mathfrak{N}_1$; wegen $E' \varepsilon\, \mathfrak{M}_2$ ist also $E' \varepsilon\, \mathfrak{N}_1$; also ist nach **32·3·3**: $(E' 1\, \mathfrak{M})^* = E' 1\, \mathfrak{N}^1_1$, also nach **31·6·12**: $(E' 1\, \mathfrak{M})^* = E' 1\, \mathfrak{M}^*$.

Wir haben die Sätze dieser Nummer als „Erweiterungssätze" bezeichnet, weil z. B. in **32·3·2** die Aussage enthalten ist: Ist $A\, \varepsilon\, (E' 1\, \mathfrak{M})^1$, so ist $A = E' P$ mit $P\, \varepsilon\, \mathfrak{M}^1$, d. h. A kann durch Hinzufügung nicht zu E' gehöriger Elemente zu einer Menge aus $\mathfrak{M}^1$ erweitert werden.

4. **Erweiterungssätze für Funktionen.** Sei $\mathfrak{S}$ ein System von Funktionen auf E und $E' \subseteqq E$. Das System der auf E' eingeschränkten (§ 25, 4) Funktionen $E' 1 f$ ($f\, \varepsilon\, \mathfrak{S}$) bezeichnen wir mit $E' 1\, \mathfrak{S}$. Ist $\mathfrak{S}$ autark, so auch $E' 1\, \mathfrak{S}$. Offenbar gilt:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\overline{\mathfrak{G}}\,(E' 1\, \mathfrak{S}) = E' 1\, \overline{\mathfrak{G}}\,(\mathfrak{S}), \quad \underline{\mathfrak{G}}\,(E' 1\, \mathfrak{S}) = E' 1\, \underline{\mathfrak{G}}\,(\mathfrak{S}), \\ &\overline{\mathfrak{F}}\,(E' 1\, \mathfrak{S}) = E' 1\, \overline{\mathfrak{F}}\,(\mathfrak{S}), \quad \underline{\mathfrak{F}}\,(E' 1\, \mathfrak{S}) = E' 1\, \underline{\mathfrak{F}}\,(\mathfrak{S}). \end{aligned}$$

32·4·1. *Ist* $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}\,(\mathfrak{M}, *)$ (*bzw.* $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}\,(*, \mathfrak{M})$, *bzw.* $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}\,(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$), *so ist* $E' 1\, \mathfrak{T} \subseteqq \mathfrak{S}\,(E' 1\, \mathfrak{M}, *)$ (*bzw.* $E' 1\, \mathfrak{T} \subseteqq \mathfrak{S}\,(*, E' 1\, \mathfrak{M})$, *bzw.* $E' 1\, \mathfrak{T} \subseteqq \mathfrak{S}\,(E' 1\, \mathfrak{M}, E' 1\, \mathfrak{N})$).

Dies folgt ohne weiteres aus (4); man beachte dabei, daß im Falle $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}\,(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ wegen $\overline{\mathfrak{G}}\,(E' 1\, \mathfrak{T}) = E' 1\, \mathfrak{M}$, $\underline{\mathfrak{G}}\,(E' 1\, \mathfrak{T}) = E' 1\, \mathfrak{N}$ die Existenz des Systems $\mathfrak{S}\,(E' 1\, \mathfrak{M}, E' 1\, \mathfrak{N})$ aus **30·2·22** folgt.

32·4·11. *Ist* $\mathfrak{M}$ *ein* σ-*System und* $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}\,(\mathfrak{M}, *)$ (*bzw.* $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}\,(*, \mathfrak{M})$), *so ist* $E' 1\, \mathfrak{T} = \mathfrak{S}\,(E' 1\, \mathfrak{M}, *)$ (*bzw.* $E' 1\, \mathfrak{T} = \mathfrak{S}\,(*, E' 1\, \mathfrak{M})$).

Wegen **32·4·1** ist nur zu zeigen: $\mathfrak{S}\,(E' 1\, \mathfrak{M}, *) \subseteqq E' 1\, \mathfrak{T}$, d. h.: ist $\varphi\, \varepsilon\, \mathfrak{S}\,(E' 1\, \mathfrak{M}, *)$, so ist auch $\varphi\, \varepsilon\, E' 1\, \mathfrak{T}$. Sei also $\varphi\, \varepsilon\, \mathfrak{S}\,(E' 1\, \mathfrak{M}, *)$; für jedes $y\, \varepsilon\, \overline{R}_1$ ist dann $[\varphi\,(\mathfrak{x}) > y]\, \varepsilon\, E' 1\, \mathfrak{M}$, also $[\varphi\,(\mathfrak{x}) > y] = E' M_y$, wo $M_y\, \varepsilon\, \mathfrak{M}$. Wir setzen nun $G_y = \underset{r>y}{S} M_r$, wo r alle rationalen Zahlen $> y$ durchläuft; dann gibt es nach **30·1·4** eine Funktion f auf E, so daß $[f\,(\mathfrak{x}) > y] = G_y$; da $M_r\, \varepsilon\, \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}$ ein σ-System, ist auch $G_y\, \varepsilon\, \mathfrak{M}$, also $f\, \varepsilon\, \mathfrak{S}\,(\mathfrak{M}, *) = \mathfrak{T}$. Setzen wir $E' 1 f = \psi$, so ist $[\psi\,(\mathfrak{x}) > y] = E' [f\,(\mathfrak{x}) > y] = E' G_y = \underset{r>y}{S} E' M_r = \underset{r>y}{S} [\varphi\,(\mathfrak{x}) > r]$, also nach **30·1·2**: $[\psi\,(\mathfrak{x}) > y] = [\varphi\,(\mathfrak{x}) > y]$; nach **30·1·3** ist somit $\varphi = \psi = E' 1 f$, und da $f\, \varepsilon\, \mathfrak{T}$ war, ist $\varphi\, \varepsilon\, E' 1\, \mathfrak{T}$, w. z. b. w.

32·4·12. *Ist das System* $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}\,(\mathfrak{M}, *)$ (*bzw.* $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}\,(*, \mathfrak{M})$) *autark, und ist* $E - E'\, \varepsilon\, \mathfrak{M}$, *so ist* $E' 1\, \mathfrak{T} = \mathfrak{S}\,(E' 1\, \mathfrak{M}, *)$ (*bzw.* $E' 1\, \mathfrak{T} = \mathfrak{S}\,(*, E' 1\, \mathfrak{M})$).

Wegen **32·4·1** ist auch hier nur zu zeigen: ist $\varphi\, \varepsilon\, \mathfrak{S}\,(E' 1\, \mathfrak{M}, *)$, so ist auch $\varphi\, \varepsilon\, E' 1\, \mathfrak{T}$. Sei also $\varphi\, \varepsilon\, \mathfrak{S}\,(E' 1\, \mathfrak{M}, *)$. Sei $\mathfrak{M}'$ das System der

Komplemente der Mengen von $\mathfrak{M}$ bzgl. E; da $\mathfrak{M}$ nach **30·3·4** ein Ring, ist auch $\mathfrak{M}'$ ein Ring, und wegen $E - E' \varepsilon \mathfrak{M}$ ist $E' \varepsilon \mathfrak{M}'$. Wir definieren eine Funktion h auf E durch:

(4·1) $$h = \varphi \text{ auf } E', \quad h = +\infty \text{ auf } E - E';$$

für jedes $y < +\infty$ ist dann $[h(\mathfrak{x}) \leq y] = [\varphi(\mathfrak{x}) \leq y]$; wegen $\varphi \varepsilon \mathfrak{S}(E' 1 \mathfrak{M}, *)$ ist $[\varphi(\mathfrak{x}) > y] \varepsilon E' 1 \mathfrak{M}$, also $[\varphi(\mathfrak{x}) \leq y] \varepsilon E' 1 \mathfrak{M}'$, also auch $[h(\mathfrak{x}) \leq y] \varepsilon E' 1 \mathfrak{M}'$, und mithin, da $E' \varepsilon \mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}'$ ein Ring: $[h(\mathfrak{x}) \leq y] \varepsilon \mathfrak{M}'$, also $[h(\mathfrak{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{M}$; da nach **30·3·4** auch $h[(\mathfrak{x}) > +\infty] = \Lambda \varepsilon \mathfrak{M}$, ist $h \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *) = \mathfrak{T}$, und da $\varphi = E' 1 h$, ist $\varphi \varepsilon E' 1 \mathfrak{T}$, w. z. b. w.

32·4·13. *Ist das System $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ völlig autark, und ist $E - E' \varepsilon \mathfrak{M}\mathfrak{N}$, so ist $E' 1 \mathfrak{T} = \mathfrak{S}(E' 1 \mathfrak{M}, E' 1 \mathfrak{N})$.*

Wegen **32·4·1** ist auch hier nur zu zeigen: ist $\varphi \varepsilon \mathfrak{S}(E' 1 \mathfrak{M}, E' 1 \mathfrak{N})$, so ist auch $\varphi \varepsilon E' 1 \mathfrak{T}$. Wir definieren wieder h durch (4·1) und g durch: $g = \varphi$ auf E', $g = -\infty$ auf $E - E'$. Wie beim Beweise von **32·4·12** gezeigt, ist $h \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$, und analog zeigt man: $g \varepsilon \mathfrak{S}(*, \mathfrak{N})$; nach **31·2·511** ist also $g \varepsilon \mathfrak{T}_1$, $h \varepsilon \mathfrak{T}^1$, und da $g \leq h$, gibt es nach **32·2·11** ein $f \varepsilon \mathfrak{T}$, so daß $g \leq f \leq h$. Da auf E': $g = h = \varphi$, ist nun $\varphi = E' 1 f$, also $\varphi \varepsilon E' 1 \mathfrak{T}$, w. z. b. w.

Sei speziell E ein metrischer Raum, und sei $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ das System der in E offenen Mengen; dann ist (§ 30, 2) $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ das System der stetigen Funktionen auf E und $E' 1 \mathfrak{M} = E' 1 \mathfrak{N}$ das System der in E' offenen Mengen, also $\mathfrak{S}(E' 1 \mathfrak{M}, E' 1 \mathfrak{N})$ das System der stetigen Funktionen auf E', und die Voraussetzung $E - E' \varepsilon \mathfrak{M}\mathfrak{N}$ besagt: E' ist abgeschlossen in E. Während nun die Formel $E' 1 \mathfrak{T} \subseteqq \mathfrak{S}(E' 1 \mathfrak{M}, E' 1 \mathfrak{N})$ von **32·4·1** nur die triviale Tatsache ausdrückt, daß, wenn f stetig auf E, die Funktion $E' 1 f$ stetig auf E' ist, so entnehmen wir aus **32·4·13**:

32·4·131. *Ist E ein metrischer Raum und E' abgeschlossen in E, so gibt es zu jeder stetigen Funktion φ auf E' eine stetige Funktion f auf E, so daß $\varphi = E' 1 f$.*

Für ein beliebiges Funktionensystem $\mathfrak{T}$ auf E gelten die Sätze:

32·4·2. *Ist $\mathfrak{T}$ autark und $E' \subseteqq E$, so ist $(E' 1 \mathfrak{T})^1 = E' 1 \mathfrak{T}^1$, $(E' 1 \mathfrak{T})_1 = E' 1 \mathfrak{T}_1$.*

Setzen wir $\overline{\mathfrak{S}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}$, so ist nach **31·2·51** $\mathfrak{T}^1 = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}^1, *)$; nach **3·4·1** ist $\mathfrak{M}^1$ ein σ-System, also nach **32·4·11** $E' 1 \mathfrak{T}^1 = \mathfrak{S}(E' 1 \mathfrak{M}^1, *)$; und somit nach **32·3·2** $E' 1 \mathfrak{T}^1 = \mathfrak{S}((E' 1 \mathfrak{M})^1, *)$; nun ist nach (4): $\overline{\mathfrak{S}}(E' 1 \mathfrak{T}) = E' 1 \mathfrak{M}$, also nach **31·2·51** $\mathfrak{S}((E' 1 \mathfrak{M})^1, *) = (E' 1 \mathfrak{T})^1$, d. h. $E' 1 \mathfrak{T}^1 = (E' 1 \mathfrak{T})^1$.

32·4·21. *Ist $E' \subseteqq E$, so ist $E' 1 \mathfrak{T}_1^1 \subseteqq (E' 1 \mathfrak{T})_1^1$.*

Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen.

32·4·211. *Ist* $\mathfrak{T}$ *autark,* $E' \varepsilon \underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T})_1 \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T})_1$, *so ist* $E' 1 \mathfrak{T}_1^1 = (E' 1 \mathfrak{T})_1^1$.

Nach **31·3·41** ist, wenn $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{N}$ gesetzt wird: $\mathfrak{T}_1^1 = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}^1, \mathfrak{N}^1)$; nach **31·3·2** ist $\mathfrak{T}_1^1$ völlig autark; aus $E' \varepsilon \underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T})_1 \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T})_1$ folgt nach **31·1·4** $E - E' \varepsilon \mathfrak{M}^1 \mathfrak{N}^1$; nach **32·4·13** ist also $E' 1 \mathfrak{T}_1^1 = \mathfrak{S}(E' 1 \mathfrak{M}^1, E' 1 \mathfrak{N}^1)$, somit nach **32·3·2**: $E' 1 \mathfrak{T}_1^1 = \mathfrak{S}\left((E' 1 \mathfrak{M})^1, (E' 1 \mathfrak{N})^1\right)$; da aber nach (4): $\overline{\mathfrak{G}}(E' 1 \mathfrak{T}) = E' 1 \mathfrak{M}$, $\underline{\mathfrak{G}}(E' 1 \mathfrak{T}) = E' 1 \mathfrak{N}$, ist nach **31·3·41** $\mathfrak{S}\left((E' 1 \mathfrak{M})^1, (E' 1 \mathfrak{N})^1\right) = (E' 1 \mathfrak{T})_1^1$, und wir haben: $E' 1 \mathfrak{T}_1^1 = (E' 1 \mathfrak{T})_1^1$.

32·4·22. *Ist* $E' \subseteqq E$, *so ist* $E' 1 \mathfrak{T}^* \subseteqq (E' 1 \mathfrak{T})^*$.

Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen.

32·4·221. *Ist* $\mathfrak{T}$ *autark, sind* $\mathfrak{T}$ *und* $E' 1 \mathfrak{T}$ *additiv, und ist* $E' \varepsilon \underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})_2 \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})_2$, *so ist* $E' 1 \mathfrak{T}^* = (E' 1 \mathfrak{T})^*$.

Nach **31·4·3** haben wir, wenn $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{P}$, $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{Q}$ gesetzt wird: $\mathfrak{T}^* = \mathfrak{S}(\mathfrak{P}^2, \mathfrak{Q}^2)$; nach **31·4·11** ist $\mathfrak{T}^*$ völlig autark; aus $E' \varepsilon \underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})_2 \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T})_2$ folgt nach **31·1·4** $E - E' \varepsilon \mathfrak{P}^2 \mathfrak{Q}^2$; nach **32·4·13** ist also $E' 1 \mathfrak{T}^* = \mathfrak{S}(E' 1 \mathfrak{P}^2, E' 1 \mathfrak{Q}^2)$; durch zweimalige Anwendung von **32·3·2** erhält man: $E' 1 \mathfrak{P}^2 = (E' 1 \mathfrak{P})^2$, $E' 1 \mathfrak{Q}^2 = (E' 1 \mathfrak{Q})^2$, also $E' 1 \mathfrak{T}^* = \mathfrak{S}\left((E' 1 \mathfrak{P})^2, (E' 1 \mathfrak{Q})^2\right)$; nach (4) ist $E' 1 \mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{F}}(E' 1 \mathfrak{T})$, $E' 1 \mathfrak{Q} = \underline{\mathfrak{F}}(E' 1 \mathfrak{T})$, also nach **31·4·3**: $\mathfrak{S}\left((E' 1 \mathfrak{P})^2, (E' 1 \mathfrak{Q})^2\right) = (E' 1 \mathfrak{T})^*$, und wir haben $E' 1 \mathfrak{T}^* = (E' 1 \mathfrak{T})^*$.

Literatur: F. Hausdorff, Mengenlehre S. 244. Satz **32·4·131** wurde zuerst bewiesen von H. Tietze, J. f. Math. 145 (1914) S. 9.

5. **Treppenfunktionen.** Als Treppenfunktion bezeichnen wir eine Funktion auf E, die nur endlich viele verschiedene, durchweg endliche Werte annimmt.

32·5·1. *Ist* $\Lambda \varepsilon \mathfrak{M}$, $E \varepsilon \mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ (*oder* $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}(*, \mathfrak{M})$) *so gibt es in* $\mathfrak{T}$ *zu jedem* $f \varepsilon \mathfrak{T}$ *eine gleichmäßig gegen* f *konvergierende Folge von Treppenfunktionen.*

Sei $f_n = -n$ auf $[f(\mathfrak{x}) \leq -n]$, $f_n = n$ auf $[f(\mathfrak{x}) > n]$, $f_n = \frac{i}{n}$ auf $\left[\frac{i-1}{n} < f(\mathfrak{x}) \leq \frac{i}{n}\right]$ für $-n^2 < i \leq n^2$. Dann ist f_n eine Treppenfunktion und $((f_n))$ konvergiert gleichmäßig gegen f. Bleibt zu zeigen, daß $f_n \varepsilon \mathfrak{T}$, d. h. daß $[f_n(\mathfrak{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{M}$ für alle $y \varepsilon \overline{R}_1$. Für $y < -n$ ist $[f_n(\mathfrak{x}) > y] = E$, also $[f_n(\mathfrak{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{M}$ nach Voraussetzung; für $y \geq n$ ist $[f_n(\mathfrak{x}) > y] = \Lambda$, also wieder $[f_n(\mathfrak{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{M}$ nach Voraussetzung; für $\frac{i-1}{n} \leq y < \frac{i}{n}$ $(-n^2 < i \leq n^2)$ ist $[f_n(\mathfrak{x}) > y] = \left[f(\mathfrak{x}) > \frac{i-1}{n}\right]$, also wieder $[f_n(\mathfrak{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{M}$.

Für ein beliebiges Funktionensystem $\mathfrak{T}$ auf E gelten die Sätze:

32·5·2. *Ist $\mathfrak{T}$ autark, so gibt es in $\mathfrak{T}^1$ (bzw. in $\mathfrak{T}_1$) zu jedem $f \varepsilon \mathfrak{T}^1$ (bzw. zu jedem $f \varepsilon \mathfrak{T}_1$) eine gleichmäßig gegen f konvergierende Folge von Treppenfunktionen.*

Ist $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}$, so ist nach **31·2·51** $\mathfrak{T}^1 = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}^1, *)$, und nach **30·3·3** ist $\Lambda \varepsilon \mathfrak{M}$, $E \varepsilon \mathfrak{M}$, also auch $\Lambda \varepsilon \mathfrak{M}^1$, $E \varepsilon \mathfrak{M}^1$. Die Behauptung folgt also aus **32·5·1.**

32·5·3. *Ist $\mathfrak{T}$ völlig autark, und gibt es ein Mengensystem $\mathfrak{M}$, so daß $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}^1$, $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}_1$, so gibt es in $\mathfrak{T}$ zu jedem $f \varepsilon \mathfrak{T}$ eine gleichmäßig gegen f konvergierende Folge von Treppenfunktionen.*

Sei $\mathfrak{R}$ der kleinste Ring über $\mathfrak{M}$; da nach **30·3·3** $\mathfrak{M}^1$ ein Ring, ist $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{R} \subseteqq \mathfrak{M}^1$, also $\mathfrak{M}^1 \subseteqq \mathfrak{R}^1 \subseteqq (\mathfrak{M}^1)^1$, also wegen **31·1·2** $\mathfrak{M}^1 = \mathfrak{R}^1$; ebenso ist $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{R}_1$, also auch $\mathfrak{M}_1^1 = \mathfrak{R}_1^1$. Ist $a < b$, so ist $[f(\hat{x}) > a] \supseteqq [f(\hat{x}) \geq b]$; und da $[f(\hat{x}) > a] \varepsilon \mathfrak{M}^1 (= \mathfrak{R}^1)$, $[f(x) \geq b] \varepsilon \mathfrak{M}_1 (= \mathfrak{R}_1)$, gibt es nach **32·1·1** ein $A \varepsilon \mathfrak{M}_1^1 \ (= \mathfrak{R}_1^1)$, so daß $[f(\hat{x}) \geq b] \subseteqq A \subseteqq [f(\hat{x}) > a]$. Es gibt also ein $A_i \varepsilon \mathfrak{M}_1^1$, so daß $\left[f(\hat{x}) \geq \frac{i}{n}\right] \subseteqq A_i \subseteqq \left[f(\hat{x}) > \frac{i-1}{n}\right]$; offenbar ist $A_{i+1} \subseteqq A_i$. Sei $f_n = \frac{i}{n}$ auf $A_i - A_{i+1}$ für $-n^2 < i < n^2$, $f_n = -n$ auf $E - A_{-n^2+1}$, $f_n = n$ auf A_{n^2}; dann ist f_n eine Treppenfunktion und $((f_n))$ konvergiert gleichmäßig gegen f. Bleibt nur zu zeigen, daß $f_n \varepsilon \mathfrak{T}$. Aus $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}_1$ folgt, wenn $\mathfrak{N}$ das System der Komplemente der Mengen von $\mathfrak{M}$ bedeutet, durch Komplementbildung: $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{N}^1$; nach **31·3·411** ist also $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}^1, \mathfrak{N}^1)$; um zu zeigen, daß $f_n \varepsilon \mathfrak{T}$, genügt es also, zu zeigen: für jedes $y \varepsilon \overline{R}_1$ ist $[f_n(\hat{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{M}^1$, $[f_n(\hat{x}) < y] \varepsilon \mathfrak{N}^1$. Nun ist jede Menge $[f_n(\hat{x}) > y]$ und jede Menge $[f_n(\hat{x}) \geq y]$ eine der Mengen A_i, oder $= \Lambda$, oder $= E$, gehört also (bei Beachtung von **30·3·3**) zu $\mathfrak{M}_1^1$; wegen $\mathfrak{M}_1^1 \subseteqq \mathfrak{M}^1$, $\mathfrak{M}_1^1 \subseteqq \mathfrak{M}_1$ ist also $[f_n(\hat{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{M}^1$, $[f_n(\hat{x}) \geq y] \varepsilon \mathfrak{M}_1$, und durch Komplementbildung: $[f_n(\hat{x}) < y] \varepsilon \mathfrak{N}^1$.

32·5·31. *Ist $\mathfrak{T}$ autark und additiv, so gibt es in $\mathfrak{T}^*$ zu jedem $f \varepsilon \mathfrak{T}^*$ eine gleichmäßig gegen f konvergierende Folge von Treppenfunktionen.*

Wir setzen $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{P}$, $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{Q}$, $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}$. Nach **31·4·3** ist $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^*) = \mathfrak{P}^2 = (\mathfrak{P}_1)^1$; da nach **30·2·1** $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{P}^1$, also nach **31·1·2** $\mathfrak{M}^1 \subseteqq (\mathfrak{P}^1)^1 = \mathfrak{P}^1 \subseteqq (\mathfrak{P}_1)^1$, ist hierin nach **31·1·3** $\mathfrak{P}^2 = (\mathfrak{P}_1)^1 = (\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{P}_1)^1$, und wir haben:

$$\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^*) = (\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{P}_1)^1 . \tag{5}$$

Nach **31·4·3** ist auch $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^*) = \mathfrak{Q}^2 = (\mathfrak{Q}_1)^1$, also durch Übergang zu den Komplementen $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}^*) = (\mathfrak{M}^1)_1$; da nach **30·2·1** $\mathfrak{P} \subseteqq \mathfrak{M}_1$, also $\mathfrak{P}_1 \subseteqq (\mathfrak{M}_1)_1$

$= \mathfrak{M}_1 \subseteqq (\mathfrak{M}^1)_1$, ist hierin nach **31·1·3** $(\mathfrak{M}^1)_1 = (\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{P}_1)_1$, und wir haben:

$$\overline{\mathfrak{F}}\,(\mathfrak{T}^*) = (\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{P}_1)_1 . \tag{5·1}$$

Da nach **31·4·11** $\mathfrak{T}^*$ völlig autark ist, folgt wegen (5), (5·1) die Behauptung aus **32·5·3.**

32·5·4. *Ist $\mathfrak{T}$ autark, additiv und symmetrisch, so gibt es zu jeder Treppenfunktion $f \varepsilon \mathfrak{T}^*$ ein $g \varepsilon \mathfrak{T}^1$ und ein $h \varepsilon \mathfrak{T}_1$, so daß $f = g + h$.*

Wir setzen $\overline{\mathfrak{G}}\,(\mathfrak{T}) = \underline{\mathfrak{G}}\,(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}$, $\overline{\mathfrak{F}}\,(\mathfrak{T}) = \underline{\mathfrak{F}}\,(\mathfrak{T}) = \mathfrak{P}$. Seien $c_1, c_2, \ldots, c_m$ die endlich vielen Werte, die f annimmt, und sei $A_\iota = [f(\mathfrak{x}) = c_\iota]$. Ist dann $y' < c_\iota < y''$ und sind y', y'' hinlänglich wenig verschieden von c_ι, so ist $A_\iota = [f(\mathfrak{x}) > y'] \cdot [f(\mathfrak{x}) < y'']$; nach **31·4·3** ist $[f(\mathfrak{x}) > y'] \,\varepsilon\, \mathfrak{P}^2$, $[f(\mathfrak{x}) < y''] \,\varepsilon\, \mathfrak{P}^2$, und da nach **30·3·3** und **3·5·1** $\mathfrak{P}^2$ ein Ring, ist $A_\iota \,\varepsilon\, \mathfrak{P}^2$, also $A_\iota = \underset{n}{S}\, A_{\iota n}$ mit $A_{\iota n} \,\varepsilon\, \mathfrak{P}_1$; und da $\mathfrak{P}_1$ nach **30·3·3** und **3·5·1** ein Ring, kann nach **3·5·2** angenommen werden $A_{\iota\, n-1} \subseteqq A_{\iota n}$. Wir definieren nun g und h durch: $g = c_\iota + n$, $h = -n$ auf $A_{\iota n} - A_{\iota\, n-1}$ (wo $A_{\iota 0} = \Lambda$). Dann ist $g + h = f$. Jede Menge $[g(\mathfrak{x}) \leq y]$ ist Summe endlich vieler $A_{\iota n}$, also $[g(\mathfrak{x}) \leq y] \,\varepsilon\, \mathfrak{P}_1$, und durch Übergang zu den Komplementen $[g(\mathfrak{x}) > y] \,\varepsilon\, \mathfrak{M}^1$; also ist $g \,\varepsilon\, \mathfrak{T}^1$ nach **31·2·51.** Ebenso ist jede Menge $[h(\mathfrak{x}) \geq y]$ Summe endlich vieler $A_{\iota n}$, also $[h(\mathfrak{x}) \geq y] \,\varepsilon\, \mathfrak{P}_1$, also $[h(\mathfrak{x}) < y] \,\varepsilon\, \mathfrak{M}^1$ und somit $h \,\varepsilon\, \mathfrak{T}_1$.

Literatur zu Satz **32·5·31:** Ch. J. de la Vallée-Poussin, Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensembles, classes de Baire, Paris 1916, S. 118; zu Satz **32·5·4:** W. Sierpiński, Fund. math. 2 (1921) S. 37.

§ 33. Die Borelschen Mengen.

1. Die Borelschen Mengen über $\mathfrak{M}$. Wir legen wieder als Bereich eine beliebige Menge E zugrunde und bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ ein System von Teilen von E. Wir haben in § 31, 1 mit $\mathfrak{M}^1$ bzw. $\mathfrak{M}_1$ die Mengensysteme $\mathfrak{M}_\sigma$ bzw. $\mathfrak{M}_\delta$ bezeichnet, und definieren nun für jede Ordinalzahl $\xi > 1$ durch Induktion die Mengensysteme $\mathfrak{M}^\xi$ und $\mathfrak{M}_\xi$ vermöge der Formeln:

$$\mathfrak{M}^\xi = (\underset{\eta<\xi}{S}\,(\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta))^1, \quad \mathfrak{M}_\xi = (\underset{\eta<\xi}{S}\,(\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta))_1 . \tag{1}$$

Die Mengen aus $\mathfrak{M}^\xi + \mathfrak{M}_\xi$ heißen die Borelschen Mengen ξ-ter Ordnung über $\mathfrak{M}$. Die Definition (1) besagt also: Ist $\mathfrak{N}$ das System der Borelschen Mengen über $\mathfrak{M}$ von kleinerer als ξ-ter Ordnung ($\xi > 1$), so ist $\mathfrak{M}^\xi = \mathfrak{N}^1$, $\mathfrak{M}_\xi = \mathfrak{N}_1$.

33·1·1. *Für $\xi < \xi'$ ist $\mathfrak{M}^\xi \subseteqq \mathfrak{M}^{\xi'}$, $\mathfrak{M}^\xi \subseteqq \mathfrak{M}_{\xi'}$, $\mathfrak{M}_\xi \subseteqq \mathfrak{M}^{\xi'}$, $\mathfrak{M}_\xi \subseteqq \mathfrak{M}_{\xi'}$.*
Dies folgt unmittelbar aus (1).

33·1·11. *Ist ξ eine isolierte Zahl > 1, so ist:*

(1·1) $$\underset{\eta<\xi}{S}(\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta) = \mathfrak{M}^{\xi-1} + \mathfrak{M}_{\xi-1};$$

ist ξ eine Grenzzahl, so ist:

(1·11) $$\underset{\eta<\xi}{S}(\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta) = \underset{\eta<\xi}{S}\mathfrak{M}^\eta = \underset{\eta<\xi}{S}\mathfrak{M}_\eta.$$

Dies folgt unmittelbar aus **33·1·1.**

33·1·2. *Für jedes $\xi \geq 1$ ist $(\mathfrak{M}^\xi)^1 = \mathfrak{M}^\xi$, $(\mathfrak{M}_\xi)_1 = \mathfrak{M}_\xi$.*

Dies folgt aus (1) wegen **31·1·2.**

33·1·21. *Für jedes $\xi \geq 1$ ist*[1]*):*

$$\mathfrak{M}^{\xi+1} = (\mathfrak{M}^\xi + \mathfrak{M}_\xi)^1 = (\mathfrak{M}_\xi)^1;\ \mathfrak{M}_{\xi+1} = (\mathfrak{M}^\xi + \mathfrak{M}_\xi)_1 = (\mathfrak{M}^\xi)_1.$$

Wegen (1) und (1·1) ist $\mathfrak{M}^{\xi+1} = (\mathfrak{M}^\xi + \mathfrak{M}_\xi)^1$; hierin ist nach (1) und **33·1·1**: $\mathfrak{M}^\xi = (\underset{\eta<\xi}{S}(\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta))^1 \subseteq (\mathfrak{M}_\xi)^1$, also ist nach **31·1·3**: $(\mathfrak{M}^\xi + \mathfrak{M}_\xi)^1 = (\mathfrak{M}_\xi)^1$.

33·1·22. *Für jedes $\xi > 1$ ist:*

$$\mathfrak{M}^\xi = (\underset{\eta<\xi}{S}\mathfrak{M}_\eta)^1, \qquad \mathfrak{M}_\xi = (\underset{\eta<\xi}{S}\mathfrak{M}^\eta)_1.$$

Dies folgt aus **33·1·1**, **33·1·11** und **33·1·21.**

33·1·3. *Für jedes $\xi \geq 1$ ist sowohl $\mathfrak{M}^\xi$ als $\mathfrak{M}_\xi$ ein μ-System.*

Dies folgt aus (1) und **31·5·3.**

33·1·4. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, so ist für jedes $\xi \geq 1$ auch $\mathfrak{M}^\xi$ und $\mathfrak{M}_\xi$ ein Ring.*

Wir beweisen dies durch transfinite Induktion nach **7·4·12.** Für $\xi = 1$ ist die Behauptung richtig nach **3·5·1.** Angenommen die Behauptung sei richtig für alle $\eta < \xi$. Ist dann ξ isoliert, so sind nach Annahme $\mathfrak{M}^{\xi-1}$ und $\mathfrak{M}_{\xi-1}$ Ringe, also nach **33·1·21** und **3·5·1** auch $\mathfrak{M}^\xi$ und $\mathfrak{M}_\xi$. Sei sodann ξ Grenzzahl; wegen (1) und **3·5·1** genügt es nachzuweisen, daß dann das System $\mathfrak{N} = \underset{\eta<\xi}{S}(\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta)$ ein Ring ist. Sei also $A \,\varepsilon\, \mathfrak{N}$, $B \,\varepsilon\, \mathfrak{N}$; wir haben zu zeigen, daß dann auch $A + B \,\varepsilon\, \mathfrak{N}$, $A\,B \,\varepsilon\, \mathfrak{N}$. Wegen $A \,\varepsilon\, \mathfrak{N}$, $B \,\varepsilon\, \mathfrak{N}$ gibt es ein $\eta' < \xi$ und ein $\eta'' < \xi$, so daß $A \,\varepsilon\, \mathfrak{M}^{\eta'} + \mathfrak{M}_{\eta'}$, $B \,\varepsilon\, \mathfrak{M}^{\eta''} + \mathfrak{M}_{\eta''}$; da ξ Grenzzahl, gibt es ein $\eta < \xi$, so daß $\eta > \eta'$, $\eta > \eta''$; nach **33·1·1** ist $A \,\varepsilon\, \mathfrak{M}^\eta$, $B \,\varepsilon\, \mathfrak{M}^\eta$, also, da nach Annahme $\mathfrak{M}^\eta$ ein Ring, auch $A + B \,\varepsilon\, \mathfrak{M}^\eta$, $A\,B \,\varepsilon\, \mathfrak{M}^\eta$; also ist auch $A + B \,\varepsilon\, \mathfrak{N}$, $A\,B \,\varepsilon\, \mathfrak{N}$, w. z. b. w.

33·1·41. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring und ξ Grenzzahl, so ist das System* (1·11) *ein Ring.*

Der Beweis wurde soeben geführt.

Bezeichnet ω_1 die Anfangszahl der Zahlklasse Z_1 (§ 8, 3), so setzen wir unter Beachtung von (1·11):

---

[1]) Hieraus folgt insbesondere: $\mathfrak{M}^2 = (\mathfrak{M}_1)^1$, $\mathfrak{M}_2 = (\mathfrak{M}^1)_1$, in Übereinstimmung mit § 31, 4.

(1·2) $$\mathfrak{M}_B = \underset{\eta<\omega_1}{S}(\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta) = \underset{\eta<\omega_1}{S}\mathfrak{M}^\eta = \underset{\eta<\omega_1}{S}\mathfrak{M}_\eta.$$

33·1·5. *Bei beliebigem $\mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{M}_B$ ein σ-System und ein δ-System, und mithin ein Ring.*

Sei $A_n \varepsilon \mathfrak{M}_B$, also $A_n \varepsilon \mathfrak{M}^{\eta_n}$ $(\eta_n < \omega_1)$. Nach **8·4·1** gibt es ein $\eta < \omega_1$, so daß alle $\eta_n < \eta$; nach **33·1·1** ist dann $A_n \varepsilon \mathfrak{M}^\eta \mathfrak{M}_\eta$ für alle n; nach **33·1·2** folgt daraus: $\underset{n}{S} A_n \varepsilon \mathfrak{M}^\eta$, $\underset{n}{D} A_n \varepsilon \mathfrak{M}_\eta$, also auch $\underset{n}{S} A_n \varepsilon \mathfrak{M}_B$, $\underset{n}{D} A_n \varepsilon \mathfrak{M}_B$, d. h. $\mathfrak{M}_B$ ist ein σ-System und ein δ-System.

33·1·51. *Für $\xi \geq \omega_1$ ist $\mathfrak{M}^\xi = \mathfrak{M}_\xi = \mathfrak{M}_B$.*

Nach **33·1·5** und **31·1·1** ist $(\mathfrak{M}_B)^1 = (\mathfrak{M}_B)_1 = \mathfrak{M}_B$, also nach (1) und (1·2): $\mathfrak{M}^{\omega_1} = \mathfrak{M}_{\omega_1} = \mathfrak{M}_B$. Von hier aus beweist man die Behauptung durch transfinite Induktion nach **7·4·12**.

Es kommen also die Borelschen Mengen aller Ordnungen über $\mathfrak{M}$ bereits unter den Borelschen Mengen von kleinerer als ω_1-ter Ordnung vor, d. h. $\mathfrak{M}_B$ ist das System aller Borelschen Mengen über $\mathfrak{M}$; wir nennen es: das Borelsche System über $\mathfrak{M}$.

33·1·52. *$\mathfrak{M}_B$ ist das kleinste System über $\mathfrak{M}$, das sowohl ein σ-System als auch ein δ-System ist.*

Wegen **33·1·5** ist nur zu zeigen: Ist $\mathfrak{N} \supseteqq \mathfrak{M}$, und ist $\mathfrak{N}$ sowohl σ-System als δ-System (d. h. nach **31·1·1**: $\mathfrak{N}^1 = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}$), so ist $\mathfrak{M}_B \subseteqq \mathfrak{N}$, d. h $\mathfrak{M}^\xi \subseteqq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}_\xi \subseteqq \mathfrak{N}$ für alle ξ. Wir zeigen dies durch transfinite Induktion. Die Behauptung ist richtig für $\xi = 1$, denn aus $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{N}$ folgt $\mathfrak{M}^1 \subseteqq \mathfrak{N}^1 = \mathfrak{N}$ und ebenso $\mathfrak{M}_1 \subseteqq \mathfrak{N}$. Angenommen, sie sei richtig für alle $\eta < \xi$, d. h. $\mathfrak{M}^\eta \subseteqq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}_\eta \subseteqq \mathfrak{N}$ für $\eta < \xi$; dann ist $\underset{\eta<\xi}{S}(\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta) \subseteqq \mathfrak{N}$, also $\mathfrak{M}^\xi = (\underset{\eta<\xi}{S}(\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta))^1 \subseteqq \mathfrak{N}^1 = \mathfrak{N}$, somit $\mathfrak{M}^\xi \subseteqq \mathfrak{N}$, und ebenso $\mathfrak{M}_\xi \subseteqq \mathfrak{N}$.

Nach **33·1·5** und **33·1·52** ist $\mathfrak{M}_B$ auch das kleinste System über $\mathfrak{M}$, das sowohl ein σ-Ring als auch ein δ-Ring ist.

33·1·521. *Es ist $(\mathfrak{M}_B)_B = \mathfrak{M}_B$.*

Denn da $\mathfrak{M}_B$ nach **33·1·5** sowohl ein σ- als ein δ-System ist, ist $\mathfrak{M}_B$ das kleinste System über $\mathfrak{M}_B$, das sowohl ein σ- als ein δ-System ist, also ist nach **33·1·52** $\mathfrak{M}_B = (\mathfrak{M}_B)_B$.

33·1·6. *Ist $\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{M}^1$ und $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{N}_1$, so gilt für alle endlichen n:*

$$(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^{2n-1} = \mathfrak{M}^{2n-1}, \quad (\mathfrak{M} + \mathfrak{N})_{2n-1} = \mathfrak{N}_{2n-1},$$
$$(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^{2n} = \mathfrak{N}^{2n}, \quad (\mathfrak{M} + \mathfrak{N})_{2n} = \mathfrak{M}_{2n}.$$

Für $n = 1$ gilt nach **31·1·3**: $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^1 = \mathfrak{M}^1$, $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})_1 = \mathfrak{N}_1$. Daher ist $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^2 = ((\mathfrak{M} + \mathfrak{N})_1)^1 = (\mathfrak{N}_1)^1 = \mathfrak{N}^2$, und ebenso $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})_2 = \mathfrak{M}_2$. Daher ist weiter $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^3 = ((\mathfrak{M} + \mathfrak{N})_2)^1 = (\mathfrak{M}_2)^1 = \mathfrak{M}^3$, und ebenso $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})_3 = \mathfrak{N}_3$ usf.

33·1·61. *Ist $\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{M}^1$ und $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{N}_1$, so gilt für $\xi \geq \omega$:*

$$(\mathfrak{M}+\mathfrak{N})^\xi = \mathfrak{M}^\xi = \mathfrak{N}^\xi, \quad (\mathfrak{M}+\mathfrak{N})_\xi = \mathfrak{M}_\xi = \mathfrak{N}_\xi .$$

Wegen 33·1·1 und 33·1·6 folgt aus (1·11) für $\xi = \omega$:

$$\underset{n}{S}\,(\mathfrak{M}+\mathfrak{N})^n = \underset{n}{S}\,(\mathfrak{M}+\mathfrak{N})_n = \underset{n}{S}\,\mathfrak{M}^n = \underset{n}{S}\,\mathfrak{M}_n = \underset{n}{S}\,\mathfrak{N}^n = \underset{n}{S}\,\mathfrak{N}_n ,$$

somit nach 33·1·22:

$$(\mathfrak{M}+\mathfrak{N})^\omega = \mathfrak{M}^\omega = \mathfrak{N}^\omega, \quad (\mathfrak{M}+\mathfrak{N})_\omega = \mathfrak{M}_\omega = \mathfrak{N}_\omega .$$

Von da aus beweist man die Behauptung durch transfinite Induktion.

33·1·7. *Ist $\mathfrak{N}$ das System der Komplemente der Mengen aus $\mathfrak{M}$ zu E, so ist $\mathfrak{N}_\xi$ das System der Komplemente der Mengen aus $\mathfrak{M}^\xi$ zu E.*

Für $\xi = 1$ ist die Behauptung richtig nach 31·1·4; von da aus beweist man sie durch transfinite Induktion.

33·1·71. *Gilt neben $M \varepsilon \mathfrak{M}$ auch $E - M \varepsilon \mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{M}_\xi$ das System der Komplemente der Mengen aus $\mathfrak{M}^\xi$ zu E.*

Dies folgt aus 33·1·7 für $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$.

Literatur: É. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions (Paris 1898) S. 46; F. Hausdorff, Mengenlehre S. 82.

2. **Ambige Borelsche Mengen.** In Analogie zur Definition von $\mathfrak{M}_1^1$ (§ 31, 5) setzen wir nun $\mathfrak{M}_\xi^\xi = \mathfrak{M}^\xi \,.\, \mathfrak{M}_\xi$. Die Mengen aus $\mathfrak{M}_\xi^\xi$ heißen die ambigen Borelschen Mengen ξ-ter Ordnung über $\mathfrak{M}$.

33·2·1. *Für $\xi < \xi'$ ist $\mathfrak{M}^\xi + \mathfrak{M}_\xi \subseteqq \mathfrak{M}_{\xi'}^{\xi'}$, $\mathfrak{M}_\xi^\xi \subseteqq \mathfrak{M}_{\xi'}^{\xi'}$.*

Dies folgt unmittelbar aus 33·1·1.

33·2·11. *Für jedes $\xi \geq 1$ ist $(\mathfrak{M}_\xi^\xi)^1 = \mathfrak{M}^\xi$, $(\mathfrak{M}_\xi^\xi)_1 = \mathfrak{M}_\xi$.*

Dies folgt wegen (1) aus 31·5·5, indem man dort $\mathfrak{M}$ ersetzt durch $\underset{\eta<\xi}{S}\,(\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta)$.

33·2·12. *Ist ξ Grenzzahl, so ist $\underset{\eta<\xi}{S}\,\mathfrak{M}_\eta^\eta = \underset{\eta<\xi}{S}\,(\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta)$.*

Dies folgt aus der Definition von $\mathfrak{M}_\eta^\eta$ nach 33·2·1.

33·2·13. *Ist ξ Grenzzahl, so ist $\mathfrak{M}_\xi^\xi = (\underset{\eta<\xi}{S}\,\mathfrak{M}_\eta^\eta)_1^1$.*

Nach 33·2·12 ist:

$$(\underset{\eta<\xi}{S}\,\mathfrak{M}_\eta^\eta)_1^1 = (\underset{\eta<\xi}{S}\,(\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta))^1 \,.\, (\underset{\eta<\xi}{S}\,(\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta))_1 = \mathfrak{M}^\xi \,.\, \mathfrak{M}_\xi = \mathfrak{M}_\xi^\xi .$$

33·2·2. *Für jedes $\xi \geq 1$ ist $\mathfrak{M}_\xi^\xi$ ein μ-System.*

Dies folgt wegen 31·5·2 aus 33·1·3.

33·2·3. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, so ist für jedes $\xi \geq 1$ auch $\mathfrak{M}_\xi^\xi$ ein Ring.*

Dies folgt aus 33·1·4.

33·2·4. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, so ist für jedes $\xi \geq 1$: $\mathfrak{M}_{\xi+1}^{\xi+1} = (\mathfrak{M}_\xi^\xi)^*$.*

Nach **33·2·3** ist $\mathfrak{M}_\xi^\xi$ ein Ring, also nach **31·6·1** $(\mathfrak{M}_\xi^\xi)^* = (\mathfrak{M}_\xi^\xi)^2\,(\mathfrak{M}_\xi^\xi)_2$; hierin ist nach **33·2·11** $(\mathfrak{M}_\xi^\xi)^2 = \big((\mathfrak{M}_\xi^\xi)_1\big)^1 = (\mathfrak{M}_\xi)^1 = \mathfrak{M}^{\xi+1}$, und ebenso $(\mathfrak{M}_\xi^\xi)_2 = \mathfrak{M}_{\xi+1}$: also ist $(\mathfrak{M}_\xi^\xi)^* = \mathfrak{M}^{\xi+1}\,\mathfrak{M}_{\xi+1} = \mathfrak{M}_{\xi+1}^{\xi+1}$.

33·2·5. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Körper, so ist für jedes $\xi \geqq 1$ auch $\mathfrak{M}_\xi^\xi$ ein Körper.*

Für $\xi = 1$ ist die Behauptung richtig nach **31·5·11.** Angenommen, sie sei richtig, für alle $\eta < \xi$. Ist dann ξ isoliert, so ist nach Annahme $\mathfrak{M}_{\xi-1}^{\xi-1}$ ein Körper, also nach **33·2·4** und **31·6·21** auch $\mathfrak{M}_\xi^\xi$. Sei sodann ξ eine Grenzzahl; wegen **33·2·13** und **31·5·11** genügt es, nachzuweisen, daß dann das System $\mathfrak{N} = \underset{\eta<\xi}{S}\,\mathfrak{M}_\eta^\eta$ ein Körper ist. Da $\mathfrak{N}$ nach **33·2·12** und **33·1·41** ein Ring ist, ist nur zu zeigen: aus $A\,\varepsilon\,\mathfrak{N}$ und $B\,\varepsilon\,\mathfrak{N}$ folgt $A - B\,\varepsilon\,\mathfrak{N}$. Wegen $A\,\varepsilon\,\mathfrak{N}$, $B\,\varepsilon\,\mathfrak{N}$ gibt es ein $\eta' < \xi$ und ein $\eta'' < \xi$, so daß $A\,\varepsilon\,\mathfrak{M}_{\eta'}^{\eta'}$, $B\,\varepsilon\,\mathfrak{M}_{\eta''}^{\eta''}$; ist etwa $\eta'' \geqq \eta'$, so ist $A\,\varepsilon\,\mathfrak{M}_{\eta''}^{\eta''}$, $B\,\varepsilon\,\mathfrak{M}_{\eta''}^{\eta''}$, also, da nach Annahme $\mathfrak{M}_{\eta''}^{\eta''}$ ein Körper, auch $A - B\,\varepsilon\,\mathfrak{M}_{\eta''}^{\eta''}$, also auch $A - B\,\varepsilon\,\mathfrak{N}$, w. z. b. w.

33·2·51. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Körper, so ist für jedes $\xi > 1$ auch $\underset{\eta<\xi}{S}\,\mathfrak{M}_\eta^\eta$ ein Körper.*
Der Beweis wurde soeben geführt.

33·2·6. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Körper, so ist $\mathfrak{M}_B$ der kleinste σ-Körper über $\mathfrak{M}$.*

Nach (1·2) und **33·2·12** ist $\mathfrak{M}_B = \underset{\eta<\omega_1}{S}\,\mathfrak{M}_\eta^\eta$, also ist $\mathfrak{M}_B$ nach **33·2·51** ein Körper. Und da nach **3·6·1** jeder σ-Körper auch ein δ-System ist, folgt aus **33·1·52**, daß $\mathfrak{M}_B$ der kleinste σ-Körper über $\mathfrak{M}$ ist.

Man erhält also zu einem beliebigen Mengensysteme $\mathfrak{M}$ den kleinsten σ-Körper über $\mathfrak{M}$, indem man zunächst den kleinsten Körper $\mathfrak{M}_k$ über $\mathfrak{M}$, und dann $(\mathfrak{M}_k)_B$ bildet.

33·2·61. *Damit $\mathfrak{M}_B$ der kleinste σ-Körper über $\mathfrak{M}$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß aus $A\,\varepsilon\,\mathfrak{M}$, $B\,\varepsilon\,\mathfrak{M}$ folge $A - B\,\varepsilon\,\mathfrak{M}_B$.*

Notwendig: Dies folgt aus $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{M}_B$. Hinreichend: Ist $\mathfrak{M}_k$ der kleinste Körper über $\mathfrak{M}$, so genügt es, zu zeigen, daß $\mathfrak{M}_k \subseteqq \mathfrak{M}_B$, denn aus $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{M}_k \subseteqq \mathfrak{M}_B$ folgt: $\mathfrak{M}_B \subseteqq (\mathfrak{M}_k)_B \subseteqq (\mathfrak{M}_B)_B$, also wegen **33·1·521**: $(\mathfrak{M}_k)_B = \mathfrak{M}_B$, und, wie wir eben sahen, ist $(\mathfrak{M}_k)_B$ der kleinste σ-Körper über $\mathfrak{M}$. Nach § 3, 3 ist jede Menge aus $\mathfrak{M}_k$ Summe endlich vieler Mengen der Gestalt: $C = A_1 A_2 \ldots A_m\,(E - B_1)\,(E - B_2) \ldots (E - B_n)$, wo $A_i\,\varepsilon\,\mathfrak{M}$, $B_j\,\varepsilon\,\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ und $m > 0$. Nach **33·1·5** genügt es also zu zeigen: $C\,\varepsilon\,\mathfrak{M}_B$. Nun kann man schreiben: $C = (A_1 - B_1)\,(A_1 - B_2) \ldots (A_1 - B_n)\,A_2 \ldots A_m$. Nach Voraussetzung ist hierin $A_1 - B_j\,\varepsilon\,\mathfrak{M}_B$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$; wegen $A_i\,\varepsilon\,\mathfrak{M}_B$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ ist also nach **33·1·5** auch $C\,\varepsilon\,\mathfrak{M}_B$, w. z. b. w.

33·2·7. *Gilt neben $M\,\varepsilon\,\mathfrak{M}$ auch $E - M\,\varepsilon\,\mathfrak{M}$, und ist $A\,\varepsilon\,\mathfrak{M}^\xi$ (bzw. $A\,\varepsilon\,\mathfrak{M}_\xi$), so ist, damit $A\,\varepsilon\,\mathfrak{M}_\xi^\xi$ sei, notwendig und hinreichend, daß auch $E - A\,\varepsilon\,\mathfrak{M}^\xi$ (bzw. $E - A\,\varepsilon\,\mathfrak{M}_\xi$) sei.*

Dies folgt aus **33·1·71.**

Wir setzen nun $\mathfrak{M}^{(1)} = \mathfrak{M}^*$ und definieren für $\xi > 1$ durch Induktion: $\mathfrak{M}^{(\xi)} = (\underset{\eta<\xi}{S}\, \mathfrak{M}^{(\eta)})^*$; da für $\xi < \xi'$ offenbar $\mathfrak{M}^{(\xi)} \subseteqq \mathfrak{M}^{(\xi')}$, ist für isolierte $\xi > 1$: $\mathfrak{M}^{(\xi)} = (\mathfrak{M}^{(\xi-1)})^*$. Wir setzen ferner $\mathfrak{M}_{B^*} = \underset{\eta<\omega_1}{S}\, \mathfrak{M}^{(\eta)}$.

33·2·8. *$\mathfrak{M}_{B^*}$ ist das kleinste λ-System über $\mathfrak{M}$.*

Sei $A = \operatorname{Lim}_n A_n$ und $A_n \varepsilon \mathfrak{M}_{B^*}$, also $A_n \varepsilon \mathfrak{M}^{(\eta_n)}$ $(\eta_n < \omega_1)$; nach **8·4·1** gibt es ein $\xi < \omega_1$, so daß alle $\eta_n < \xi$; dann ist $A \varepsilon (\underset{\eta<\xi}{S}\, \mathfrak{M}^{(\eta)})^*$, also $A \varepsilon \mathfrak{M}^{(\xi)}$ $(\xi < \omega_1)$, also $A \varepsilon \mathfrak{M}_{B^*}$; aus $A = \operatorname{Lim}_n A_n$, $A_n \varepsilon \mathfrak{M}_{B^*}$ folgt also $A \varepsilon \mathfrak{M}_{B^*}$, d. h. $\mathfrak{M}_{B^*}$ ist ein λ-System. Sei sodann $\mathfrak{N}$ ein λ-System über $\mathfrak{M}$; dann ist $\mathfrak{M}^{(1)} \subseteqq \mathfrak{N}$; angenommen, es sei $\mathfrak{M}^{(\eta)} \subseteqq \mathfrak{N}$ für $\eta < \xi$, so ist auch $\underset{\eta<\xi}{S}\, \mathfrak{M}^{(\eta)} \subseteqq \mathfrak{N}$, also, weil $\mathfrak{N}$ ein λ-System, auch $(\underset{\eta<\xi}{S}\, \mathfrak{M}^{(\eta)})^* = \mathfrak{M}^{(\xi)} \subseteqq \mathfrak{N}$; nach **7·4·12** ist also $\mathfrak{M}^{(\xi)} \subseteqq \mathfrak{N}$ für alle ξ, also $\mathfrak{M}_{B^*} \subseteqq \mathfrak{N}$; also ist $\mathfrak{M}_{B^*}$ das kleinste λ-System über $\mathfrak{M}$.

33·2·81. *Für $\xi \geq \omega_1$ ist $\mathfrak{M}^{(\xi)} = \mathfrak{M}_{B^*}$.*

Nach Definition ist $\mathfrak{M}^{(\omega_1)} = (\underset{\eta<\omega_1}{S}\, \mathfrak{M}^{(\eta)})^* = (\mathfrak{M}_{B^*})^*$, also, da nach **33·2·8** $\mathfrak{M}_{B^*}$ ein λ-System: $\mathfrak{M}^{(\omega_1)} = \mathfrak{M}_{B^*}$. Von hier aus schließt man weiter durch transfinite Induktion.

33·2·9. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, so ist $\mathfrak{M}^{(\xi)} = \mathfrak{M}^{\xi+1}_{\xi+1}$.*

Die Behauptung ist nach **31·6·1** richtig für $\xi = 1$. Angenommen, sie sei richtig für alle $\eta < \xi$; ist dann ξ isoliert, so ist $\mathfrak{M}^{(\xi-1)} = \mathfrak{M}^{\xi}_{\xi}$, also $\mathfrak{M}^{(\xi)} = (\mathfrak{M}^{(\xi-1)})^* = (\mathfrak{M}^{\xi}_{\xi})^* = \mathfrak{M}^{\xi+1}_{\xi+1}$ nach **33·2·4**; ist hingegen ξ Grenzzahl, so ist $\mathfrak{M}^{(\xi)} = (\underset{\eta<\xi}{S}\, \mathfrak{M}^{(\eta)})^*$; hierin ist nach **33·2·12** $\underset{\eta<\xi}{S}\, \mathfrak{M}^{(\eta)} = \underset{\eta<\xi}{S}\, \mathfrak{M}^{\eta+1}_{\eta+1} = \underset{\eta<\xi}{S}\, \mathfrak{M}^{\eta}_{\eta} = \underset{\eta<\xi}{S}\, (\mathfrak{M}^{\eta} + \mathfrak{M}_{\eta})$, also nach **33·1·41** ein Ring; also nach **31·6·3** und **33·2·13** $\mathfrak{M}^{(\xi)} = (\underset{\eta<\xi}{S}\, \mathfrak{M}^{(\eta)})^* = (\underset{\eta<\xi}{S}\, \mathfrak{M}^{\eta}_{\eta})^* = ((\underset{\eta<\xi}{S}\, \mathfrak{M}^{\eta}_{\eta})^1_1)^* = (\mathfrak{M}^{\xi}_{\xi})^*$, also nach **33·2·4** wieder $\mathfrak{M}^{(\xi)} = \mathfrak{M}^{\xi+1}_{\xi+1}$.

33·2·91. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, so ist $\mathfrak{M}_{B^*} = \mathfrak{M}_B$.*

Denn nach **33·2·9** ist $\mathfrak{M}_{B^*} = \underset{\eta<\omega_1}{S}\, \mathfrak{M}^{(\eta)} = \underset{\eta<\omega_1}{S}\, \mathfrak{M}^{\eta+1}_{\eta+1} = \underset{\eta<\omega_1}{S}\, \mathfrak{M}^{\eta}_{\eta}$, also nach **33·2·12** $\mathfrak{M}_{B^*} = \underset{\eta<\omega_1}{S}\, (\mathfrak{M}^{\eta} + \mathfrak{M}_{\eta}) = \mathfrak{M}_B$.

Literatur: Der Begriff der ambigen Borelschen Menge stammt von Ch. J. de la Vallée-Poussin, Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire, S. 135. Zu Satz **33·2·61**: W. Sierpiński, Ann. soc. math. Pol. 6 (1927) S. 50.

3. Einschiebung, Erweiterung. In Verallgemeinerung der Einschiebungssätze von § 32, 1 beweisen wir:

33·3·1. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, $B \varepsilon \mathfrak{M}_{\xi}$, $C \varepsilon \mathfrak{M}^{\xi}$ und $B \subseteqq C$, so gibt es ein $A \varepsilon \mathfrak{M}^{\xi}_{\xi}$, so daß $B \subseteqq A \subseteqq C$.*

Nach **33·2·3** ist $\mathfrak{M}_\xi^\xi$ ein Ring und nach **33·2·2** ein μ-System; nach **33·2·11** ist $(\mathfrak{M}_\xi^\xi)^1 = \mathfrak{M}^\xi$, $(\mathfrak{M}_\xi^\xi)_1 = \mathfrak{M}_\xi$; die Behauptung folgt also aus **32·1·11.**

33·3·2. *Ist* $E' \subseteqq E$, *so ist* $(E' \, 1 \, \mathfrak{M})^\xi = E' \, 1 \, \mathfrak{M}^\xi$, $(E' \, 1 \, \mathfrak{M})_\xi = E' \, 1 \, \mathfrak{M}_\xi$.

Die Behauptung ist richtig für $\xi = 1$ nach **32·3·2.** Angenommen, sie sei richtig für alle $\eta < \xi$; dann ist unter Benützung von **32·3·2** $E' \, 1 \, \mathfrak{M}^\xi = E' \, 1 \, (\underset{\eta<\xi}{S} (\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta))^1 = (E' \, 1 \underset{\eta<\xi}{S} (\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta))^1 = (\underset{\eta<\xi}{S} (E' \, 1 \, \mathfrak{M}^\eta + E' \, 1 \, \mathfrak{M}_\eta))^1$, also nach Annahme: $E' \, 1 \, \mathfrak{M}^\xi = (\underset{\eta<\xi}{S} ((E' \, 1 \, \mathfrak{M})^\eta + (E' \, 1 \, \mathfrak{M})_\eta))^1$, d. h. $E' \, 1 \, \mathfrak{M}^\xi = (E' \, 1 \, \mathfrak{M})^\xi$.

33·3·3. *Ist* $\mathfrak{M}$ *ein Ring,* $E' \, \varepsilon \, \mathfrak{M}_\xi$, *so ist* $(E' \, 1 \, \mathfrak{M})_\xi^\xi = E' \, 1 \, \mathfrak{M}_\xi^\xi$.

Der Beweis ist, unter Berufung auf **33·3·2** und **33·3·1**, völlig analog dem von **32·3·3.**

4. Die Borelschen Mengen eines metrischen Raumes. Sei nun insbesondere E ein metrischer Raum, $\mathfrak{F}$ das System der in E abgeschlossenen, $\mathfrak{G}$ das System der in E offenen Mengen. Wir bezeichnen dann die Borelschen Mengen über $\mathfrak{F} + \mathfrak{G}$ als die Borelschen Mengen in E, die Mengen aus $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})^\xi$ und $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_\xi$ als die Borelschen Mengen ξ-ter Ordnung in E, die Mengen aus $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_\xi^\xi$ als die ambigen Borelschen Mengen ξ-ter Ordnung in E. Wir setzen noch (für $\xi \geq 1$):

$$(4) \qquad \mathfrak{B}^1 = \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{B}^{1+\xi} = (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})^\xi, \quad \mathfrak{B}_{1+\xi} = (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_\xi;$$

$$(4{\cdot}1) \qquad \mathfrak{B}_\xi^\xi = \mathfrak{B}^\xi \, . \, \mathfrak{B}_\xi \, .$$

Da die Mengen Λ und E zu $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ gehören, so auch (für jedes ξ) zu $\mathfrak{B}^\xi$, $\mathfrak{B}_\xi$, $\mathfrak{B}_\xi^\xi$.

Die Mengen aus $\mathfrak{B}^\xi$ (bzw. $\mathfrak{B}_\xi$, $\mathfrak{B}_\xi^\xi$) bezeichnen wir auch als $\mathfrak{B}^\xi$-Mengen (bzw. $\mathfrak{B}_\xi$-Mengen, $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-Mengen).

33·4·1. *Für jedes endliche* $n \geq 1$ *gilt (wenn* $\mathfrak{G}^0 = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}$ *gesetzt wird):*

$$\mathfrak{B}^{2n-1} = \mathfrak{G}^{2n-1} = \mathfrak{G}^{2n-2}, \; \mathfrak{B}_{2n-1} = \mathfrak{F}_{2n-1} = \mathfrak{F}_{2n-2};$$
$$\mathfrak{B}^{2n} = \mathfrak{F}^{2n} = \mathfrak{F}^{2n-1}, \; \mathfrak{B}_{2n} = \mathfrak{G}_{2n} = \mathfrak{G}_{2n-1}.$$

Da nach **10·1·2** $\mathfrak{G}^1 = \mathfrak{G}$, ist auch $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}^3 = \mathfrak{G}^2$ usf.; und da nach **10·2·2** $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$, ist auch $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}^1$, $\mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_2$ usf. Da nach **10·7·41** $\mathfrak{G} \subseteqq \mathfrak{F}^1$, $\mathfrak{F} \subseteqq \mathfrak{G}_1$, folgt nun die Behauptung aus **33·1·6.**

33·4·11. *Für* $\xi \geq \omega$ *ist* $\mathfrak{B}^\xi = \mathfrak{G}^\xi = \mathfrak{F}^\xi$, $\mathfrak{B}_\xi = \mathfrak{G}_\xi = \mathfrak{F}_\xi$.

Für $\xi \geq \omega$ ist (§ 6, 3) $1 + \xi = \xi$; die Behauptung folgt also wegen **10·7·41** aus **33·1·61.**

Es ist also $\mathfrak{B}^1$ das System der offenen, $\mathfrak{B}_1$ das der abgeschlossenen Mengen des Raumes E, $\mathfrak{B}^2$ das System der F_σ, $\mathfrak{B}_2$ das der G_δ usf.; $\mathfrak{B}_1^1$ besteht aus den

Mengen, die zugleich offen und abgeschlossen sind (also, wenn E zusammenhängend, nur aus den Mengen A und E), $\mathfrak{B}_2^2$ ist das System der Mengen, die zugleich F_σ und G_δ sind usf.

33·4·2. *Es ist $\mathfrak{B}_\xi$ das System der Komplemente der Mengen aus $\mathfrak{B}^\xi$ zu E.*

Da die abgeschlossenen Mengen die Komplemente der offenen sind, ist neben $M \varepsilon \mathfrak{F} + \mathfrak{G}$ auch $E - M \varepsilon \mathfrak{F} + \mathfrak{G}$, und die Behauptung folgt aus **33·1·71.**

33·4·21. *Ist $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^\xi$, so auch $E - A$.*

Dies folgt aus **33·4·2.**

Aus **33·1·1** und **33·2·1** entnehmen wir, daß für $\xi < \xi'$:

(4·2) $$\mathfrak{B}^\xi + \mathfrak{B}_\xi \subseteqq \mathfrak{B}^{\xi'}, \quad \mathfrak{B}^\xi + \mathfrak{B}_\xi \subseteqq \mathfrak{B}_{\xi'}, \quad \mathfrak{B}^\xi + \mathfrak{B}_\xi \subseteqq \mathfrak{B}_{\xi'}^{\xi'}, \quad \mathfrak{B}_\xi^\xi \subseteqq \mathfrak{B}_{\xi'}^{\xi'}.$$

Aus **33·1·11, 33·2·12** entnehmen wir: für jede Grenzzahl ξ ist:

(4·21) $$\mathop{S}_{\eta<\xi} (\mathfrak{B}^\eta + \mathfrak{B}_\eta) = \mathop{S}_{\eta<\xi} \mathfrak{B}^\eta = \mathop{S}_{\eta<\xi} \mathfrak{B}_\eta = \mathop{S}_{\eta<\xi} \mathfrak{B}_\eta^\eta.$$

Aus **33·1·2, 33·1·21, 33·2·11** entnehmen wir:

(4·3) $$(\mathfrak{B}^\xi)^1 = \mathfrak{B}^\xi, \ (\mathfrak{B}_\xi)_1 = \mathfrak{B}_\xi, \ (\mathfrak{B}^\xi)_1 = \mathfrak{B}_{\xi+1}, \ (\mathfrak{B}_\xi)^1 = \mathfrak{B}^{\xi+1},$$

und für $\xi > 1$:

(4·31) $$(\mathfrak{B}_\xi^\xi)^1 = \mathfrak{B}^\xi, \ (\mathfrak{B}_\xi^\xi)_1 = \mathfrak{B}_\xi.$$

33·4·3. *Für jedes $\xi \geq 1$ sind $\mathfrak{B}^\xi$, $\mathfrak{B}_\xi$, $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ μ-Systeme.*

Für $\xi > 1$ folgt dies aus **33·1·3, 33·2·2.** Für $\xi = 1$ ist $\mathfrak{B}^1 = \mathfrak{G}$, und wegen $\mathfrak{G}^1 = \mathfrak{G}$ auch $\mathfrak{G}_1^1 = \mathfrak{G}$, d. h. $\mathfrak{B}^1$ ist ein μ-System; analog auch $\mathfrak{B}_1$, und somit auch $\mathfrak{B}_1^1$.

33·4·31. *Für jedes $\xi \geq 1$ ist sowohl $\mathfrak{B}^\xi$ als $\mathfrak{B}_\xi$ und, wenn ξ Grenzzahl ist, auch das System* (4·21) *ein Ring.*

Dies folgt, da nach **10·1·21** und **10·2·21** sowohl $\mathfrak{F}$ als $\mathfrak{G}$ ein Ring, wegen **33·1·4, 33·1·41** aus **33·4·1, 33·4·11.**

33·4·32. *Für jedes $\xi \geq 1$ ist $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ und, wenn ξ Grenzzahl ist, auch das System* (4·21) *ein Körper.*

Nach **33·4·31** ist $\mathfrak{B}_\xi^\xi = \mathfrak{B}^\xi \mathfrak{B}_\xi$ ein Ring; und da wegen $E \varepsilon \mathfrak{F}\mathfrak{G}$ auch $E \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^\xi$, folgt die Behauptung nach **3·3·1** aus **33·4·21.**

In Ergänzung zu (4) erkennen wir nun:

33·4·33. *Bedeutet $\mathfrak{R}$ den kleinsten Ring über $\mathfrak{F} + \mathfrak{G}$, so ist (für $\xi \geq 1$):*

$$\mathfrak{B}^{1+\xi} = \mathfrak{R}^\xi, \quad \mathfrak{B}_{1+\xi} = \mathfrak{R}_\xi, \quad \mathfrak{B}_{1+\xi}^{1+\xi} = \mathfrak{R}_\xi^\xi.$$

Wegen (4) genügt es, zu zeigen: $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})^\xi = \mathfrak{R}^\xi$, $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_\xi = \mathfrak{R}_\xi$. Da nach **33·4·31** $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})^1 = \mathfrak{B}^2$ ein Ring, ist $\mathfrak{F} + \mathfrak{G} \subseteqq \mathfrak{R} \subseteqq (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})^1$, also auch $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})^1 \subseteqq \mathfrak{R}^1 \subseteqq ((\mathfrak{F} + \mathfrak{G})^1)^1$, also nach **31·1·2**: $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})^1 = \mathfrak{R}^1$. Ebenso zeigt man: $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_1 = \mathfrak{R}_1$. Von da aus beweist man die Behauptung durch transfinite Induktion.

Ist $\xi > 1$, so können wir schreiben $\xi = 1 + \eta$ $(\eta \geq 1)$, und erhalten aus **33·2·4**: $(\mathfrak{R}_\eta^\eta)^* = \mathfrak{R}_{\eta+1}^{\eta+1}$; also gilt für $\xi > 1$:

$$(4\cdot32) \qquad (\mathfrak{B}_\xi^\xi)^* = \mathfrak{B}_{\xi+1}^{\xi+1}.$$

Setzen wir (unter Berufung auf (4·21)):

$$(4\cdot4) \qquad \mathfrak{B}_B = \underset{\eta<\omega_1}{S}(\mathfrak{B}^\eta + \mathfrak{B}_\eta) = \underset{\eta<\omega_1}{S}\mathfrak{B}^\eta = \underset{\eta<\omega_1}{S}\mathfrak{B}_\eta = \underset{\eta<\omega_1}{S}\mathfrak{B}_\eta^\eta,$$

so ist (bei Beachtung von **33·4·11**):

$$(4\cdot41) \qquad \mathfrak{B}_B = (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_B = \mathfrak{F}_B = \mathfrak{G}_B,$$

und aus **33·1·51** entnehmen wir:

$$(4\cdot42) \qquad \mathfrak{B}^\xi = \mathfrak{B}_\xi = \mathfrak{B}_\xi^\xi = \mathfrak{B}_B \text{ für } \xi \geq \omega_1,$$

was auch so ausgesprochen werden kann:

33·4·4. *$\mathfrak{B}_B$ ist das System aller Borelschen Mengen in E.*

33·4·41. *$\mathfrak{B}_B$ ist das kleinste System, das alle in E abgeschlossenen (oder offenen) Mengen enthält, und sowohl ein σ- als ein δ-System ist.*

Wegen (4·41) folgt dies aus **33·1·52.**

33·4·42. *$\mathfrak{B}_B$ ist der kleinste σ-Körper, der alle in E abgeschlossenen (oder offenen) Mengen enthält.*

Der Beweis ist (unter Berufung auf **33·4·32**) analog dem von **33·2·6.**

33·4·43. *$\mathfrak{B}_B$ ist das kleinste λ-System, das alle in E abgeschlossenen (oder offenen) Mengen enthält.*

Dies folgt wegen (4·41) aus **33·2·91** und **33·2·8.**

33·4·5. *Jede abzählbare Menge $A \subseteqq E$ ist eine $\mathfrak{B}^2$-Menge.*

Denn jede abzählbare Punktmenge ist ein F_σ.

33·4·51. *Ist $\xi \geq 3$ und $A \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^\xi$ (bzw. $A \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_\xi$, $A \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_\xi^\xi$), so ist, wenn A', A'' abzählbar, auch $(A - A') + A'' \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^\xi$ (bzw. $\varepsilon\, \mathfrak{B}_\xi$, bzw. $\varepsilon\, \mathfrak{B}_\xi^\xi$).*

Nach **33·4·5** ist $A' \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^2$, $A'' \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^2$, somit nach **33·4·2** $(E - A') \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_2$, also nach (4·2) $A'' \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^\xi$, $E - A' \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^\xi$, also, wenn $A \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^\xi$, nach **33·4·31** auch $(A - A') + A'' = A(E - A') + A'' \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^\xi$.

33·4·6. *Ist $\xi \geq 2$, $B \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_\xi$, $C \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^\xi$ und $B \subseteqq C$, so gibt es ein $A \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_\xi^\xi$, so daß $B \subseteqq A \subseteqq C$.*

Wegen $\xi \geq 2$ hat ξ die Gestalt $\xi = 1 + \eta$, also ist nach **33·4·33**: $\mathfrak{B}^\xi = \mathfrak{R}^\eta$, $\mathfrak{B}_\xi = \mathfrak{R}_\eta$, $\mathfrak{B}_\xi^\xi = \mathfrak{R}_\eta^\eta$, und die Behauptung folgt aus **33·3·1.**

Wir nennen zwei Mengen M, M' $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-trennbar, wenn es zwei fremde Mengen $A \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_\xi^\xi$, $A' \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_\xi^\xi$ gibt, so daß $M \subseteqq A$, $M' \subseteqq A'$. Wegen **33·4·21** ist dies gleichbedeutend mit: es gibt ein $A \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_\xi^\xi$, so daß $M \subseteqq A$, $M' \subseteqq E - A$. Die Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ heißen $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-trennbar, wenn es disjunkte Mengen $A_i \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_\xi^\xi$ gibt, so daß $M_i \subseteqq A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

33·4·61. *Je zwei fremde $\mathfrak{B}_\xi$-Mengen B, B' ($\xi \geq 2$) sind $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-trennbar.*

Nach **33·4·2** ist $E - B' \varepsilon \mathfrak{B}^\xi$; wegen $B \subseteqq E - B'$ gibt es nach **33·4·6** ein $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^\xi$, so daß $B \subseteqq A \subseteqq E - B'$; dann ist $B \subseteqq A$, $B' \subseteqq E - A$.

33·4·611. *Sind $B_1, B_2, \ldots, B_n$ fremde $\mathfrak{B}_\xi$-Mengen ($\xi \geq 2$), so sind sie $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-trennbar.*

Nach **33·4·61** gibt es zwei fremde $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-Mengen A_{ij}, A_{ji}, so daß $B_i \subseteqq A_{ij}$, $B_j \subseteqq A_{ji}$. Bezeichnen wir mit A_i den Durchschnitt der $n-1$ Mengen A_{ij}, ($j = 1, 2, \ldots, n, j \neq i$), so sind die Mengen A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) disjunkt, es ist $B_i \subseteqq A_i$ und nach **33·4·32** ist $A_i \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^\xi$.

Wir werden in Nr. 8 ein Beispiel fremder $\mathfrak{B}^\xi$-Mengen angeben, die nicht $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-trennbar sind.

Nennen wir zwei Mengen M, M' $\mathfrak{B}_\xi$-trennbar (bzw. $\mathfrak{B}^\xi$-trennbar), wenn es zwei fremde Mengen $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi$, $A' \varepsilon \mathfrak{B}_\xi$ (bzw. $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi$, $A' \varepsilon \mathfrak{B}^\xi$) gibt, so daß $M \subseteqq A$, $M' \subseteqq A'$, so folgt aus **33·4·61**, daß (für $\xi \geq 2$) die Begriffe „$\mathfrak{B}_\xi^\xi$-trennbar" und „$\mathfrak{B}_\xi$-trennbar" gleichbedeutend sind. Hingegen liefert jedes Paar fremder, nicht $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-trennbarer $\mathfrak{B}^\xi$-Mengen ein Beispiel $\mathfrak{B}^\xi$-trennbarer, aber nicht $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-trennbarer Mengen. Wegen einer späteren Anwendung führen wir den Satz an:

33·4·62. *Ist $B \varepsilon \mathfrak{B}_\xi$, $B' \varepsilon \mathfrak{B}_\xi$, so sind $B - B'$ und $B' - B$ $\mathfrak{B}^\xi$-trennbar.*

Sei zunächst $\xi = 1$, also B und B' abgeschlossen; dann ist $(B - B')^0 \subseteqq B^0 = B$, also $(B - B')^0 (B' - B) = \Lambda$, und ebenso $(B' - B)^0 (B - B') = \Lambda$; $B - B'$ und $B' - B$ sind also abgesondert, und die Behauptung folgt aus **14·2·4**. — Sei sodann $\xi \geq 2$; nach (4·31) ist $B = \underset{n}{D}\, B_n$, $B' = \underset{n}{D}\, B'_n$ mit $B_n \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^\xi$, $B'_n \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^\xi$, wobei nach **8·2·11** angenommen werden kann $B_n \supseteqq B_{n-1}$, $B'_n \supseteqq B'_{n+1}$. Wir setzen $A = \underset{n}{S}\,(B_n B'_{n-1} - B'_n)$, $A' = \underset{n}{S}\,(B'_n B_{n-1} - B_n)$ $(B_0 = B'_0 = E)$; nach **33·4·32** ist $B_n B'_{n-1} - B'_n \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^\xi$, also nach (4·31): $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi$, ebenso $A' \varepsilon \mathfrak{B}^\xi$; offenbar ist $A A' = \Lambda$; bleibt nur zu zeigen, daß $B - B' \subseteqq A$, $B' - B \subseteqq A'$. Ist $b \varepsilon B - B'$, so ist $b \varepsilon B_n$ für alle n, und es gibt ein n^*, so daß $b \varepsilon B'_{n^*-1}$, $b \sim\varepsilon B'_{n^*}$; dann ist $b \varepsilon B_{n^*} B'_{n^*-1} - B'_{n^*}$, also $b \varepsilon A$; also ist $B - B' \subseteqq A$; ebenso zeigt man, daß $B' - B \subseteqq A'$.

Ist es erforderlich, den bei Bildung der Systeme $\mathfrak{B}^\xi$, $\mathfrak{B}_\xi$, $\mathfrak{B}_\xi^\xi$, $\mathfrak{B}_B$ zugrunde gelegten Raum E in Evidenz zu setzen, so schreiben wir ausführlicher $\mathfrak{B}^\xi(E)$, $\mathfrak{B}_\xi(E)$, $\mathfrak{B}_\xi^\xi(E)$, $\mathfrak{B}_B(E)$.

33·4·7. *Ist $E' \subseteqq E$, so ist $\mathfrak{B}^\xi(E') = E' \,1\, \mathfrak{B}^\xi(E)$, $\mathfrak{B}_\xi(E') = E' \,1\, \mathfrak{B}_\xi(E)$, $\mathfrak{B}_B(E') = E' \,1\, \mathfrak{B}_B(E)$.*

Für $\xi = 1$ reduziert sich die Behauptung auf **10·8·1**. Sei also $\xi > 1$, d. h. $\xi = 1 + \eta$; bezeichnet $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{G}$ das System der in E abgeschlossenen bzw. offenen Mengen, $\mathfrak{F}'$ bzw. $\mathfrak{G}'$ das System der in E' abgeschlossenen bzw. offenen Mengen, so ist $\mathfrak{B}^{1+\eta}(E) = (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})^\eta$, $\mathfrak{B}^{1+\eta}(E') = (\mathfrak{F}' + \mathfrak{G}')^\eta$;

nach **10·8·1** ist $\mathfrak{F}' + \mathfrak{G}' = E' \, 1 \, (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})$, die Behauptung folgt also für $\xi > 1$ aus **33·3·2.**

33·4·71. *Ist* $\xi \geq 2$ *und* $E' \varepsilon \mathfrak{B}_\xi (E)$, *so ist* $\mathfrak{B}^\xi_\xi (E') = E' \, 1 \, \mathfrak{B}^\xi_\xi (E)$.

Wir setzen wieder $\xi = 1 + \eta$ und bezeichnen mit $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ das System der in E, bzw. in E' abgeschlossenen, mit $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ das System der in E, bzw. in E' offenen Mengen, ferner mit $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ den kleinsten Ring über $\mathfrak{F} + \mathfrak{G}$, bzw. über $\mathfrak{F}' + \mathfrak{G}'$; dann ist nach **32·3·1**: $\mathfrak{R}' = E' \, 1 \, \mathfrak{R}$; nach **33·4·33** ist: $\mathfrak{B}_\xi (E) = \mathfrak{R}_\eta$, $\mathfrak{B}^\xi_\xi (E) = \mathfrak{R}^\eta_\eta$, $\mathfrak{B}^\xi_\xi (E') = (E' \, 1 \, \mathfrak{R})^\eta_\eta$; also folgt die Behauptung aus **33·3·3.**

33·4·72. *Ist* $A \subseteqq E' \subseteqq E$ *und* $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (E)$ (*bzw.* $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi (E)$, $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi_\xi (E)$, $A \varepsilon \mathfrak{B}_B (E)$), *so ist auch* $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (E')$ (*bzw.* $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi (E')$, $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi_\xi (E')$, $A \varepsilon \mathfrak{B}_B (E')$).

Dies folgt unmittelbar aus **33·4·7.**

33·4·73. *Ist* $A \subseteqq E' \subseteqq E$ *und* $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (E')$, $E' \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (E)$ (*bzw.* $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi (E')$, $E' \varepsilon \mathfrak{B}_\xi (E)$, *bzw.* $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi_\xi (E')$, $E' \varepsilon \mathfrak{B}^\xi_\xi (E)$, *bzw.* $A \varepsilon \mathfrak{B}_B (E')$, $E' \varepsilon \mathfrak{B}_B (E)$), *so ist auch* $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (E)$ (*bzw.* $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi (E)$, *bzw.* $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi_\xi (E)$, *bzw.* $A \varepsilon \mathfrak{B}_B (E)$).

Nach **33·4·7** ist $A = E' A'$ mit $A' \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (E)$; da auch $E' \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (E)$ und $\mathfrak{B}^\xi (E)$ nach **33·4·31** ein Ring, ist auch $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (E)$.

Literatur: Wie zu Nr. 1; ferner W. Sierpiński, Fund. math. 10 (1927) S. 320. Die Sätze **33·4·61, 33·4·611, 33·4·62** stammen von N. Lusin, Leçons sur les ensembles analytiques (Paris 1930) S. 66ff., Fund. math. 16 (1930) S. 66.

5. Absolut Borelsche Mengen. Ist $A \subseteqq E' \subseteqq E$ und ist A eine Borelsche Menge in E, so ist nach **33·4·72** A auch eine Borelsche Menge in E'; selbstverständlich kann aber A eine Borelsche Menge in E' sein, ohne eine Borelsche Menge in E zu sein; z. B. ist E' stets eine Borelsche Menge in E', nicht aber notwendigerweise auch in E. Hingegen gilt:

33·5·1. *Ist* E' *vollständig,* $A \subseteqq E'$, $A \subseteqq E$ *und* $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi (E')$ $(\xi \geq 1)$, *bzw.* $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (E')$ $(\xi \geq 2)$, *bzw.* $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi_\xi (E')$ $(\xi \geq 2)$, *bzw.* $A \varepsilon \mathfrak{B}_B (E')$, *so ist auch* $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi (E)$, *bzw.* $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (E)$, *bzw.* $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi_\xi (E)$, *bzw.* $A \varepsilon \mathfrak{B}_B (E)$.

Sei $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi (E')$ $(\xi \geq 1)$, bzw. $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (E')$ $(\xi \geq 2)$. Nach **18·4·6** gibt es einen vollständigen Raum $\overline{E} \supseteqq E$; nach **33·4·72** genügt es zu zeigen: $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi (\overline{E})$, bzw. $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (\overline{E})$; wir können also von vornherein annehmen, E sei vollständig. Die abgeschlossene Hülle von A in E, bzw. in E' bezeichnen wir mit A^0, bzw. mit A'; nach **18·4·71** sind A^0 und A' isometrisch. Nach **33·4·72** ist $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi (A')$, bzw. $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (A')$, also, da A' und A^0 isometrisch, auch $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi (A^0)$, bzw. $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (A^0)$. Da A^0 abgeschlossen in E, ist $A^0 \varepsilon \mathfrak{B}_\xi (E)$ für $\xi \geq 1$, bzw. $A^0 \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (E)$ für $\xi \geq 2$, daher nach **33·4·73**: $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi (E)$, bzw. $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (E)$, w. z. b. w.

Ist also A eine Borelsche Menge, eine $\mathfrak{B}_\xi$-Menge ($\xi \geq 1$), eine $\mathfrak{B}^\xi$-Menge ($\xi \geq 2$), eine $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-Menge ($\xi \geq 2$) in einem vollständigen Raume E', so auch in jedem Raume $E \supseteqq A$; wir nennen deshalb eine solche Menge eine absolut Borelsche Menge (bzw. eine absolute $\mathfrak{B}_\xi$-, $\mathfrak{B}^\xi$-, $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-Menge). Spezialfälle haben wir schon in § 18, 5 und § 19, 1 kennen gelernt.

33·5·2. *Ist B eine absolut Borelsche Menge und A eine Borelsche Menge in B, so ist auch A eine absolut Borelsche Menge.*

Sei E ein vollständiger Raum $\supseteqq B$; dann ist B eine Borelsche Menge in E, also nach **33·4·73** auch A.

Literatur: F. Hausdorff, Mengenlehre S. 179, 208.

6. **Abbildung Borelscher Mengen.** In Verallgemeinerung der Sätze von § 23, 2 gilt:

33·6·1. *Ist P eine eindeutige stetige Abbildung von A auf B, und ist C eine $\mathfrak{B}_\xi$-Menge (bzw. eine $\mathfrak{B}^\xi$-, eine $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-Menge) in B, so ist $P^{-1}(C)$ eine $\mathfrak{B}_\xi$-Menge (bzw. eine $\mathfrak{B}^\xi$-, eine $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-Menge) in A.*

Wir beweisen dies durch transfinite Induktion. Nach **23·2·1** und **23·2·11** ist die Behauptung richtig für $\xi = 1$. Angenommen, sie gelte für alle $\eta < \xi$; wir zeigen, daß sie dann auch für ξ gilt. Sei $C \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_\xi(B)$; dann ist $C = \underset{n}{D}\, C_n$, wo $C_n \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^{\eta_n}(B)$ ($\eta_n < \xi$); nach **2·1·3** ist $P^{-1}(C) = \underset{n}{D}\,(P^{-1}(C_n))$; da hierin nach Annahme $P^{-1}(C_n) \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^{\eta_n}(A)$, ist $P^{-1}(C) \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_\xi(A)$.

33·6·2. *Ist Q eine homöomorphe Abbildung von B auf A, und ist M eine $\mathfrak{B}_\xi$-Menge (bzw. eine $\mathfrak{B}^\xi$-, eine $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-Menge) in B, so ist $Q(M)$ eine $\mathfrak{B}_\xi$-Menge (bzw. eine $\mathfrak{B}^\xi$, eine $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-Menge) in A.*

Da Q homöomorph, ist Q^{-1} stetig; die Behauptung folgt also aus **33·6·1** für $P = Q^{-1}$.

Satz **24·4·1** besagt: Jede mit einer absoluten $\mathfrak{B}_2$-Menge homöomorphe Menge ist eine absolute $\mathfrak{B}_2$-Menge. Für $\mathfrak{B}^2$-Mengen gilt ein solcher Satz nicht; denn nach **24·4·3** ist z. B. die Menge aller irrationalen Punkte des $\mathfrak{R}_1$, die ein absolutes G_δ, d. h. eine absolute $\mathfrak{B}_2$-Menge, aber (§ 19, 2) kein F_σ im R_1, also keine absolute $\mathfrak{B}^2$-Menge ist, homöomorph einer vollständigen Menge, die nach **18·5·2** eine absolute $\mathfrak{B}_1$-Menge, also auch eine absolute $\mathfrak{B}^2$-Menge ist. Wohl aber gilt:

33·6·3. *Für $\xi \geq 3$ ist jede mit einer absoluten $\mathfrak{B}_\xi$- (bzw. $\mathfrak{B}^\xi$-, bzw. $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-) Menge A homöomorphe Menge $\mathfrak{B}$ eine absolute $\mathfrak{B}_\xi$- (bzw. $\mathfrak{B}^\xi$-, bzw. $\mathfrak{B}_\xi^\xi$)-Menge.*

Nach Voraussetzung ist $A \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_\xi(X)$, wo X vollständig. Sei P eine homöomorphe Abbildung von A auf B; nach **18·4·6** gibt es einen voll-

ständigen Raum $Y \supseteqq B$. Nach **24·3·1** erweitern wir P zu einer homöomorphen Abbildung einer Youngschen Menge $A^{\times} \supseteqq A$ auf eine Youngsche Menge $B^{\times} \supseteqq B$. Als absolute $\mathfrak{B}_{\xi}$-Menge ist $A \varepsilon \mathfrak{B}_{\xi}(A^{\times})$; somit ist nach **33·6·2** $B \varepsilon \mathfrak{B}_{\xi}(B^{\times})$. Als Youngsche Menge ist $B^{\times}$ eine absolute $\mathfrak{B}_2$-Menge, also $B^{\times} \varepsilon \mathfrak{B}_2(Y)$, also auch $B^{\times} \varepsilon \mathfrak{B}_{\xi}(Y)$, also ist nach **33·4·73** auch $B \varepsilon \mathfrak{B}_{\xi}(Y)$.

Wir kommen auf die Abbildung Borelscher Mengen in § 42, 3 zurück.

7. **Borelsche Mengen in Produkträumen.** In Verallgemeinerung von **20·4·1, 20·4·2** gilt:

33·7·1. *Ist* $A \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E^{(1)} \times E^{(2)})$ $\big($*bzw.* $\varepsilon \mathfrak{B}_{\xi}(E^{(1)} \times E^{(2)})$, $\varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}_{\xi}(E^{(1)} \times E^{(2)})$, $\varepsilon B_B(E^{(1)} \times E^{(2)})\big)$, *so gilt für jede Schicht:* $A^{(1)}_y \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E^{(1)})$ $\big($*bzw.* $\varepsilon \mathfrak{B}_{\xi}(E^{(1)})$, $\varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}_{\xi}(E^{(1)})$, $\varepsilon \mathfrak{B}_B(E^{(1)})\big)$.

Die Behauptung ist richtig für $\xi = 1$ nach **20·4·1.** Angenommen, sie sei richtig für alle $\eta < \xi$. Ist $A \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E^{(1)} \times E^{(2)})$, so ist $A = \underset{n}{S} A_n$ mit $A_n \varepsilon \mathfrak{B}_{\eta_n}(E^{(1)} \times E^{(2)})$ $(\eta_n < \xi)$. Nun ist offenbar $A^{(1)}_y = \underset{n}{S} A^{(1)}_{ny}$, und da nach Annahme $A^{(1)}_{ny} \varepsilon \mathfrak{B}_{\eta_n}(E^{(1)})$, ist $A^{(1)}_y \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E^{(1)})$.

In Verallgemeinerung von **20·2·13** gilt:

33·7·2. *Ist* $A_1 \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E^{(1)})$ $\big($*bzw.* $\varepsilon \mathfrak{B}_{\xi}(E^{(1)})$, $\varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}_{\xi}(E^{(1)})$, $\varepsilon \mathfrak{B}_B(E^{(1)})\big)$ *und* $A_2 \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E^{(2)})$ $\big($*bzw.* $\varepsilon \mathfrak{B}_{\xi}(E^{(2)})$, $\varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}_{\xi}(E^{(2)})$, $\varepsilon \mathfrak{B}_B(E^{(2)})\big)$, *so ist* $A_1 \times A_2 \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E^{(1)} \times E^{(2)})$ $\big($*bzw.* $\varepsilon \mathfrak{B}_{\xi}(E^{(1)} \times E^{(2)})$, $\varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}_{\xi}(E^{(1)} \times E^{(2)})$, $\varepsilon \mathfrak{B}_B(E^{(1)} \times E^{(2)})\big)$.

Die Behauptung ist richtig für $\xi = 1$ nach **20·2·11** (bzw. **20·2·1**). Angenommen, sie sei richtig für alle $\eta < \xi$. Ist $A_1 \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E^{(1)})$, $A_2 \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E^{(2)})$, so ist $A_1 = \underset{n}{S} A'_n$, $A_2 = \underset{n}{S} A''_n$, wo $A'_n \varepsilon \mathfrak{B}_{\eta'_n}(E^{(1)})$, $A''_n \varepsilon \mathfrak{B}_{\eta''_n}(E^{(2)})$ $(\eta'_n < \xi$, $\eta''_n < \xi)$; nach **33·4·31** und **3·5·2** kann angenommen werden: $A'_n \subseteqq A'_{n+1}$, $A''_n \subseteqq A''_{n+1}$. Bezeichnen wir mit η_n die größere der beiden Ordinalzahlen η'_n, η''_n, so ist auch $\eta_n < \xi$ und nach (4·2): $A'_n \varepsilon \mathfrak{B}_{\eta_n}(E^{(1)})$, $A''_n \varepsilon \mathfrak{B}_{\eta_n}(E^{(2)})$; nach Annahme ist dann $A'_n \times A''_n \varepsilon \mathfrak{B}_{\eta_n}(E^{(1)} \times E^{(2)})$, und da $A_1 \times A_2 = \underset{n}{S} A'_n \times A''_n$, ist $A_1 \times A_2 \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E^{(1)} \times E^{(2)})$.

Umgekehrt gilt in Verallgemeinerung von **20·4·3**:

33·7·21. *Ist* $A_1 \times A_2 \supset A$ *und ist* $A_1 \times A_2 \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E^{(1)} \times E^{(2)})$ $\big($*bzw.* $\varepsilon \mathfrak{B}_{\xi}(E^{(1)} \times E^{(2)})$, $\varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}_{\xi}(E^{(1)} \times E^{(2)})$, $\varepsilon \mathfrak{B}_B(E^{(1)} \times E^{(2)})\big)$, *so ist* $A_1 \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E^{(1)})$ $\big($*bzw.* $\varepsilon \mathfrak{B}_{\xi}(E^{(1)})$, $\varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}_{\xi}(E^{(1)})$, $\varepsilon \mathfrak{B}_B(E^{(1)})\big)$ *und* $A_2 \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E^{(2)})$ $\big($*bzw.* $\varepsilon \mathfrak{B}_{\xi}(E^{(2)})$, $\varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}_{\xi}(E^{(2)})$, $\varepsilon \mathfrak{B}_B(E^{(2)})\big)$.

Wir setzen $A_1 \times A_2 = A$; für jedes $y \varepsilon A_2$ ist dann $A^{(1)}_y = A_1$, und für jedes $x \varepsilon A_1$ ist $A^{(2)}_x = A_2$. Die Behauptung folgt also aus **33·7·1.**

33·7·3. *Sind* A_1 *und* A_2 *absolut Borelsche Mengen, so ist auch* $A_1 \times A_2$ *eine absolut Borelsche Menge.*

Sei $E^{(1)}$ ein vollständiger Raum $\supseteqq A_1$ und $E^{(2)}$ ein vollständiger Raum $\supseteqq A_2$; dann ist nach **20·2·7** $E^{(1)} \times E^{(2)}$ ein vollständiger Raum $\supseteqq A_1 \times A_2$, und nach **33·7·2** ist $A_1 \times A_2 \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_B\,(E^{(1)} \times E^{(2)})$.

8. **Universalmengen.** In den folgenden Erörterungen spielt eine wichtige Rolle der Raum R_0 (§ 9, 3), dessen Punkte a die Folgen $((k_\nu))$ natürlicher Zahlen sind. Wir bezeichnen mit $A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ die Menge aller solchen Folgen, die mit den Gliedern $k_1, k_2, \ldots, k_n$ beginnen; aus der Abstandsdefinition § 9 (3·4) folgt augenblicklich: ist $a \,\varepsilon\, A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ und $a a' < \frac{1}{n}$, so ist auch $a' \,\varepsilon\, A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$; also ist $A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ eine offene Menge des R_0; ebenso sieht man, daß $R_0 - A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ offen im R_0 ist; also ist $A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ sowohl offen als abgeschlossen im R_0, d. h.:

(8) $$A_{k_1 k_2 \ldots k_n} \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_1^1 (R_0).$$

Wir beweisen den Hilfssatz:

33·8·1. *Es gibt eine Folge eindeutiger stetiger Abbildungen P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ des R_0 auf sich selbst, so daß zu jeder Folge von Punkten $x_n \,\varepsilon\, R_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ein $x \,\varepsilon\, R_0$ mit $P_n(x) = x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gehört.*

In der Tat, man hat nur, wenn x die Folge $k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots$ natürlicher Zahlen ist, unter $P_1(x)$ zu verstehen die Folge $k_1, k_3, k_5, \ldots$, unter $P_2(x)$ die Folge $k_2, k_6, k_{10}, \ldots$, allgemein unter $P_n(x)$ die Folge $k_{1.2^{n-1}}, k_{3.2^{n-1}}, k_{5.2^{n-1}}, \ldots$ Dann ist die Abbildung $P_n(x)$ des R_0 auf sich selbst stetig, denn nach der Abstandsdefinition § 9 (3·4) ist $P_n(x) P_n(x') < \frac{1}{\nu}$, wenn $x x' < \frac{1}{(2\nu - 1).2^{n-1}}$.

33·8·2. *Ist E ein separabler Raum, so gibt es eine in $E \times R_0$ offene (bzw. abgeschlossene) Menge G, unter deren Schichten $G_a^{(1)}$ $(a \,\varepsilon\, R_0)$ alle in E offenen (bzw. abgeschlossenen) Mengen vorkommen.*

Es gibt ein abzählbares ausgezeichnetes System in E offener Mengen (§ 13, 1); wir fügen ihm die leere Menge hinzu und bezeichnen das so entstehende System mit $H_1, H_2, \ldots, H_k, \ldots$ Wir setzen $G_{k_1 k_2 \ldots k_n} = H_{k_n} \times A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$; nach **20·2·11** ist $G_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ offen in $E \times R_0$; also sind auch die Mengen $G_n = \underset{k_1, k_2, \ldots, k_n}{S} G_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ und $G = \underset{n}{S}\, G_n$ offen in $E \times R_0$. Ist nun a ein beliebiger Punkt des R_0, etwa $a = ((k_\nu^*))$, so ist $a \,\varepsilon\, A_{k_1^* k_2^* \ldots k_n^*}$ für jedes n, und für jedes von $(k_1^*, k_2^*, \ldots, k_n^*)$ verschiedene n-tupel $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ ist $a \sim\varepsilon\, A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$; also ist die Schicht $G_a^{(1)}$ von G (§ 20, 4) gegeben durch: $G_a^{(1)} = \underset{n}{S}\, H_{k_n^*}$; da es nach **13·1·1** zu jeder in E

offenen Menge H eine Folge $((k_n^*))$ natürlicher Zahlen gibt, so daß $H = \underset{n}{S} H_{k_n^*}$, ist die Behauptung für die offenen Mengen bewiesen; für die abgeschlossenen Mengen folgt sie durch Komplementbildung.

33·8·21. *Ist $E^{(1)}$ ein separabler Raum, $E^{(2)}$ ein Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern $\supsetneqq \Lambda$ ist, so gibt es eine in $E^{(1)} \times E^{(2)}$ offene (bzw. abgeschlossene) Menge G, unter deren Schichten $G_b^{(1)}$ $(b \varepsilon E^{(2)})$ alle in $E^{(1)}$ offenen (bzw. abgeschlossenen) Mengen vorkommen.*

Nach **19·2·1** gibt es in $E^{(2)}$ ein dyadisches Diskontinuum; nach **24·2·41** gibt es also eine Menge $B \subseteqq E^{(2)}$, die homöomorph dem R_0 ist. Bei einer homöomorphen Abbildung P des R_0 auf B gehen nach **24·1·2** die Mengen $A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ des R_0 über in Mengen $B_{k_1 k_2 \ldots k_n}$, die in B offen sind; dann ist $B_{k_1 k_2 \ldots k_n} = B \,.\, C_{k_1 k_2 \ldots k_n}$, wo $C_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ offen in $E^{(2)}$. Sei wieder $H_1, H_2, \ldots, H_k, \ldots$ ein Mengensystem, das aus einem abzählbaren ausgezeichneten Systeme in $E^{(1)}$ offener Mengen durch Hinzufügung der leeren Menge entsteht; wir setzen: $G_{k_1 k_2 \ldots k_n} = H_{k_n} \times C_{k_1 k_2 \ldots k_n}$, $G_n = \underset{k_1, k_2, \ldots, k_n}{S} G_{k_1 k_2 \ldots k_n}$; $G = \underset{n}{S} G_n$; dann ist G offen in $E^{(1)} \times E^{(2)}$, und für jedes $b \varepsilon B$ ist, wenn b bei der homöomorphen Abbildung P das Bild des Punktes $a = ((k_\nu^*))$ des R_0 ist: $G_b^{(1)} = \underset{n}{S} H_{k_n^*}$. Nun folgt die Behauptung wie bei **33·8·2.**

33·8·3. *Ist E ein separabler Raum und $\xi < \omega_1$, so gibt es eine $\mathfrak{B}^\xi$-Menge (bzw. eine $\mathfrak{B}_\xi$-Menge) G in $E \times R_0$, unter deren Schichten $G_a^{(1)}$ $(a \varepsilon R_0)$ alle $\mathfrak{B}^\xi$-Mengen (bzw. alle $\mathfrak{B}_\xi$-Mengen) in E vorkommen.*

Wir beweisen dies durch transfinite Induktion. Nach **33·8·2** gilt die Behauptung für $\xi = 1$; wir nehmen an, sie gelte für alle $\eta < \xi$ und zeigen, daß sie dann auch für ξ gilt. Nach Annahme gibt es für jedes $\eta < \xi$ eine Menge $G_\eta \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^\eta (E \times R_0)$ und eine Menge $G'_\eta \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_\eta (E \times R_0)$, unter deren Schichten $(G_\eta)_a^{(1)}$, bzw. $(G'_\eta)_a^{(1)}$ alle $\mathfrak{B}^\eta$-Mengen, bzw. alle $\mathfrak{B}_\eta$-Mengen in E vorkommen. Da es nur abzählbar viele $\eta < \xi$ gibt, können die Mengen G_η, G'_η $(\eta < \xi)$ in eine Folge $K_1, K_2, \ldots, K_\nu, \ldots$ geordnet werden; bilden wir eine neue Folge $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$, indem wir setzen: $M_1 = M_3 = M_5 = \ldots = K_1$, $M_2 = M_6 = M_{10} = \ldots = K_2$, allgemein $M_{1.2^{\nu-1}} = M_{3.2^{\nu-1}} = M_{5.2^{\nu-1}} = \ldots\ldots = K_\nu$, so kommt jede Menge G_η und jede Menge G'_η $(\eta < \xi)$ in der Folge $((M_n))$ unendlich oft vor. Wir betrachten nun die in **33·8·1** eingeführten Abbildungen P_n $(n = 1, 2 \ldots)$ des R_0 auf sich selbst; ordnen wir dem Punkte $(x, y) \,\varepsilon\, E \times R_0$ (wo $x \,\varepsilon\, E$, $y \,\varepsilon\, R_0$) den Punkt $(x, P_n(y))$ zu, so entsteht eine stetige Abbildung Q_n von $E \times R_0$ auf sich selbst. Da $M_n \,\varepsilon\, \underset{\eta<\xi}{S} (\mathfrak{B}^\eta (E \times R_0) + \mathfrak{B}_\eta (E \times R_0))$, ist nach **33·6·1** auch $Q_n^{-1}(M_n) \,\varepsilon\, \underset{\eta<\xi}{S} (\mathfrak{B}^\eta (E \times R_0) + \mathfrak{B}_\eta (E \times R_0))$; setzen wir

$G = \underset{n}{S}\, Q_n^{-1}(M_n)$, so ist demnach $G \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (E \times R_0)$. Sei nun N eine beliebige $\mathfrak{B}^\xi$-Menge in E, also $N = \underset{i}{S}\, N_i$, wo $N_i \varepsilon \mathfrak{B}^{\eta_i}(E) + \mathfrak{B}_{\eta_i}(E)$ $(\eta_i < \xi)$. Zufolge der Wahl der Mengen G_η und G'_η gibt es also in der Folge $((K_\nu))$ ein Glied K_{ν_i} und ein $y_i \varepsilon R_0$, so daß $N_i = (K_{\nu_i})^{(1)}_{y_i}$; da die Menge K_{ν_i} unendlich oft in der Folge $((M_n))$ vorkommt, gibt es eine wachsende Indizesfolge $((n_i))$, so daß $N_i = (M_{n_i})^{(1)}_{y_i}$. Da $\Lambda \varepsilon \mathfrak{B}^\eta(E)\, \mathfrak{B}_\eta(E)$ für jedes η, kommt unter den Schichten jeder Menge G_η und jeder Menge G'_η auch die leere Menge vor; zu jeder Menge M_n gibt es also ein $z_n \varepsilon R_0$, so daß $(M_n)^{(1)}_{z_n} = \Lambda$; es gibt also im R_0 eine Punktfolge $((t_n))$, so daß $(M_n)^{(1)}_{t_n} = N_i$ für $n = n_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, und $(M_n)^{(1)}_{t_n} = \Lambda$ für alle anderen n. Zufolge der Wahl der Abbildungen P_n gibt es aber ein $a \varepsilon R_0$, so daß $t_n = P_n(a)$ $(n = 1, 2, \ldots)$; dann ist $\left(Q_n^{-1}(M_n)\right)^{(1)}_a = N_i$ für $n = n_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ und $\left(Q_n^{-1}(M_n)\right)^{(1)}_a = \Lambda$ für alle anderen n; also ist $G^{(1)}_a = \underset{i}{S}\, N_i = N$, womit die Behauptung für die $\mathfrak{B}^\xi$-Mengen bewiesen ist; für die $\mathfrak{B}_\xi$-Mengen folgt sie dann nach **33·4·2** durch Komplementbildung.

33·8·31. *Ist $E^{(1)}$ ein separabler Raum, $E^{(2)}$ ein Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern $\supset \Lambda$ ist, so gibt es, wenn $\xi < \omega_1$, eine $\mathfrak{B}^\xi$-Menge (bzw. eine $\mathfrak{B}_\xi$-Menge) G in $E^{(1)} \times E^{(2)}$, unter deren Schichten $G^{(1)}_b$ $(b \varepsilon E^{(2)})$ alle $\mathfrak{B}^\xi$-Mengen (bzw. alle $\mathfrak{B}_\xi$-Mengen) in $E^{(1)}$ vorkommen.*

Nach **33·8·21** gilt die Behauptung für $\xi = 1$; wir nehmen also $\xi \geq 2$ an. Nach **19·2·1** gibt es in $E^{(2)}$ ein dyadisches Diskontinuum C, also auch ein reduziertes dyadisches Diskontinuum B (§ 24, 2); nach **24·2·4** ist B ein G_δ, also $B \varepsilon \mathfrak{B}_2(E^2)$; nach **33·7·2** ist somit $E^{(1)} \times B \varepsilon \mathfrak{B}_2(E^{(1)} \times E^{(2)})$. Nach **24·2·41** gibt es eine homöomorphe Abbildung P des R_0 auf B; ordnen wir jedem Punkte $(x, y) \varepsilon E^{(1)} \times R_0$ (wo $x \varepsilon E^{(1)}$, $y \varepsilon R_0$) den Punkt $(x, P(y))$ zu, so entsteht eine homöomorphe Abbildung Q von $E^{(1)} \times R_0$ auf $E^{(1)} \times B$. Nach **33·8·3** gibt es eine Menge $H \varepsilon \mathfrak{B}_\xi (E^{(1)} \times R_0)$, unter deren Schichten $H^{(1)}_a$ alle $\mathfrak{B}_\xi$-Mengen in $E^{(1)}$ vorkommen; setzen wir $G = Q(H)$, so kommen unter den Schichten $G^{(1)}_b$ $(b \varepsilon B)$ alle $\mathfrak{B}_\xi$-Mengen in $E^{(1)}$ vor, und nach **33·6·2** ist $G \varepsilon \mathfrak{B}_\xi (E^{(1)} \times B)$. Da $E^{(1)} \times B \varepsilon \mathfrak{B}_2 (E^{(1)} \times E^{(2)})$, ist nach **33·4·73** $G \varepsilon \mathfrak{B}_\xi (E^{(1)} \times E^{(2)})$. Damit ist die Behauptung für die $\mathfrak{B}_\xi$-Mengen bewiesen, und für die $\mathfrak{B}^\xi$-Mengen folgt sie durch Komplementbildung.

33·8·4. *Es gibt keine $\mathfrak{B}^\xi_\xi$-Menge G in $R_0 \times R_0$ $(\xi \geq 2)$, unter deren Schichten $G^{(1)}_a$ $(a \varepsilon R_0)$ alle $\mathfrak{B}^\xi_\xi$-Mengen des R_0 vorkommen.*

Sei G eine $\mathfrak{B}^\xi_\xi$-Menge in $R_0 \times R_0$. Ist F die Menge aller Punkte $(x, y) \varepsilon R_0 \times R_0$ $(x \varepsilon R_0,\ y \varepsilon R_0)$ mit $x = y$, so ist F abgeschlossen, also eine $\mathfrak{B}^\xi_\xi$-Menge in $R_0 \times R_0$; also ist nach **33·4·32** auch $F - G \varepsilon \mathfrak{B}^\xi_\xi (R_0 \times R_0)$, also nach **33·4·72** auch $F - G \varepsilon \mathfrak{B}^\xi_\xi (F)$. Ordnen wir jedem Punkte $(x, x) \varepsilon F$ den

Punkt $x \varepsilon R_0$ zu, so ist dies eine homöomorphe Abbildung P von F auf den R_0. Setzen wir $P(F - G) = A$, so ist also nach **33·6·2** $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^\xi(R_0)$. Nach Definition von A sind die Aussagen $a \varepsilon A$ und $(a, a) \sim\varepsilon G$ äquivalent, die Aussage $(a, a) \sim\varepsilon G$ ist aber äquivalent mit $a \sim\varepsilon G_a^{(1)}$; also ist $A \neq G_a^{(1)}$, d. h. A kommt nicht unter den Schichten $G_a^{(1)}$ von G vor.

33·8·41. *Es gibt keine Borelsche Menge G in $R_0 \times R_0$, unter deren Schichten $G_a^{(1)}$ $(a \varepsilon R_0)$ alle Borelschen Mengen des R_0 vorkommen.*

Dies folgt aus **33·8·4** für $\xi = \omega_1$.

33·8·5. *Ist E ein separabler Raum, so gibt es, wenn $\xi < \omega_1$, zwei $\mathfrak{B}_\xi$-Mengen G_1, G_2 in $E \times R_0$ von folgender Eigenschaft: zu je zwei $\mathfrak{B}_\xi$-Mengen B_1, B_2 in E gibt es ein $b \varepsilon R_0$, so daß die Schicht $(G_1)_b^{(1)} = B_1$ und die Schicht $(G_2)_b^{(1)} = B_2$.*

Sei $y \varepsilon R_0$; ist y die Folge $k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots$ natürlicher Zahlen, so verstehen wir unter $P_1(y)$ die Folge $k_1, k_3, k_5, \ldots$, unter $P_2(y)$ die Folge $k_2, k_4, k_6, \ldots$; dann ist sowohl P_1 als P_2 eine eindeutige stetige Abbildung des R_0 auf sich selbst, und zu jedem Punktepaar $y_1 \varepsilon R_0$, $y_2 \varepsilon R_0$ gibt es ein $y \varepsilon R_0$, so daß $y_1 = P_1(y)$, $y_2 = P_2(y)$. Setzen wir für alle $(x, y) \varepsilon E \times R_0$: $x' = x$, $y' = P_1(y)$ $\big($bzw. $x' = x$, $y'' = P_2(y)\big)$, so ist dadurch eine eindeutige stetige Abbildung Q_1 (bzw. Q_2) von $E \times R_0$ auf sich selbst gegeben. — Nach **33·8·3** gibt es eine $\mathfrak{B}_\xi$-Menge G in $E \times R_0$, unter deren Schichten $G_b^{(1)}$ alle $\mathfrak{B}_\xi$-Mengen in E vorkommen; wir setzen $G_1 = Q_1^{-1}(G)$, $G_2 = Q_2^{-1}(G)$; dann sind nach **33·6·1** auch G_1 und G_2 $\mathfrak{B}_\xi$-Mengen in $E \times R_0$. Seien nun B_1, B_2 $\mathfrak{B}_\xi$-Mengen in E; es gibt ein $b_1 \varepsilon R_0$ und ein $b_2 \varepsilon R_0$, so daß $B_1 = G_{b_1}^{(1)}$, $B_2 = G_{b_2}^{(1)}$; ferner gibt es ein $b \varepsilon R_0$, so daß $b_1 = P_1(b)$, $b_2 = P_2(b)$; dann ist offenbar $B_1 = (G_1)_b^{(1)}$, $B_2 = (G_2)_b^{(1)}$.

Sind G_1, G_2 die $\mathfrak{B}_\xi$-Mengen von **33·8·5**, so gibt es nach **33·4·62** zwei fremde $\mathfrak{B}^\xi$-Mengen A_1, A_2 in $E \times R_0$, so daß $G_1 - G_2 \subseteqq A_1$, $G_2 - G_1 \subseteqq A_2$. Setzen wir $E = R_0$, so liefern die Mengen A_1, A_2 ein Beispiel zweier fremder $\mathfrak{B}^\xi$-Mengen, die nicht $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-trennbar sind. Angenommen nämlich, es gäbe zwei fremde $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-Mengen C_1, C_2 in $R_0 \times R_0$, so daß $A_1 \subseteqq C_1$, $A_2 \subseteqq C_2$: ist $B \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^\xi(R_0)$, so ist auch $R_0 - B \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^\xi(R_0)$, also gibt es ein $b \varepsilon R_0$, so daß $(G_1)_b^{(1)} = B$, $(G_2)_b^{(1)} = R_0 - B$; wegen $C_1 \supseteqq G_1 - G_2$, $C_2 \supseteqq G_2 - G_1$, $C_1 C_2 = \Lambda$ ist dann auch $(C_1)_b^{(1)} = B$; es kämen also alle $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-Mengen des R_0 unter den Schichten $(C_1)_b^{(1)}$ von C_1 vor, was nach **33·8·4** unmöglich.

9. **Existenzsätze.** Wir sagen, die Menge $A \subseteqq E$ sei genau eine $\mathfrak{B}^\xi$-Menge (bzw. $\mathfrak{B}_\xi$-Menge) in E, wenn $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi(E)$ und $A \sim\varepsilon \mathfrak{B}_\xi(E)$ $\big($bzw. $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi(E)$ und $A \sim\varepsilon \mathfrak{B}^\xi(E)\big)$; wir sagen, die Menge $A \subseteqq E$ sei genau eine $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-Menge in E, wenn $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^\xi(E)$ und $A \sim\varepsilon \mathfrak{B}^\eta(E) + \mathfrak{B}_\eta(E)$ für alle $\eta < \xi$. Wegen § **33** (4·4), (4·42) kann es eine Menge, die genau eine $\mathfrak{B}^\xi$-, oder $\mathfrak{B}_\xi$-, oder $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-Menge ist, nur für $\xi < \omega_1$ geben.

33·9·1. *Ist $\xi < \omega_1$, so gibt es im R_0 eine Menge, die genau eine $\mathfrak{B}^\xi$-Menge (bzw. $\mathfrak{B}_\xi$-Menge) ist.*

Nach **33·8·3** gibt es eine $\mathfrak{B}_\xi$-Menge G in $R_0 \times R_0$, unter deren Schichten $G_a^{(1)}$ alle $\mathfrak{B}_\xi$-Mengen in R_0 vorkommen. Sei F die Menge aller Punkte $(x, y) \varepsilon R_0 \times R_0$ $(x \varepsilon R_0, y \varepsilon R_0)$ mit $x = y$; dann ist $FG \varepsilon \mathfrak{B}_\xi (R_0 \times R_0)$, also auch $FG \varepsilon \mathfrak{B}_\xi (F)$, also $F - G \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (F)$. Ordnen wir jedem Punkte $(x, x) \varepsilon F$ den Punkt $x \varepsilon R_0$ zu, so ist dies eine homöomorphe Abbildung P von F auf den R_0; setzen wir $P(F - G) = A$, so ist also nach **33·6·2** $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (R_0)$. Um zu zeigen, daß A genau eine $\mathfrak{B}^\xi$-Menge im R_0, haben wir noch zu zeigen: $A \sim\varepsilon \mathfrak{B}_\xi (R_0)$. Nach Definition von A sind die Aussagen $a \varepsilon A$ und $(a, a) \sim\varepsilon G$ äquivalent; die Aussage $(a, a) \sim\varepsilon G$ ist aber äquivalent mit $a \sim\varepsilon G_a^{(1)}$; es sind also die Aussagen $a \varepsilon A$ und $a \sim\varepsilon G_a^{(1)}$ äquivalent, es ist also $A \neq G_a^{(1)}$ für alle $a \varepsilon R_0$, also $A \sim\varepsilon \mathfrak{B}_\xi (R_0)$, w. z. b. w.

Bezeichnen wir mit A_k die Menge aller Punkte des R_0, die dargestellt sind durch eine mit dem Gliede $k_1 = k$ beginnende Folge $((k_\nu))$ natürlicher Zahlen, so können wir **33·9·1** verschärfen zu:

33·9·11. *Ist $\xi < \omega_1$, so gibt es ein $C \subseteqq A_k$, das genau eine $\mathfrak{B}^\xi$-Menge (bzw. eine $\mathfrak{B}_\xi$-Menge) im R_0 ist, während $A_k - C$ genau eine $\mathfrak{B}_\xi$-Menge (bzw. eine $\mathfrak{B}^\xi$-Menge) im R_0 ist.*

Ordnet man dem durch die Folge $k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots$ dargestellten Punkte des R_0 den durch die Folge $k, k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots$ dargestellten Punkt des R_0 zu, so erhält man eine homöomorphe Abbildung P des R_0 auf A_k. Nach **33·9·1** gibt es ein $B \subseteqq R_0$, das genau eine $\mathfrak{B}^\xi$-Menge im R_0 ist; dann ist $R_0 - B$ genau eine $\mathfrak{B}_\xi$-Menge im R_0. Setzen wir $C = P(B)$, so ist $A_k - C = P(R_0 - B)$, also ist nach **33·6·2** C genau eine $\mathfrak{B}^\xi$-Menge in A_k, $A_k - C$ genau eine $\mathfrak{B}_\xi$-Menge in A_k. Und da nach § 33 (8): $A_k \varepsilon \mathfrak{B}_1^1 (R_0)$, ist nach **33·4·73** C eine $\mathfrak{B}^\xi$-Menge im R_0, $A_k - C$ eine $\mathfrak{B}_\xi$-Menge im R_0. Wäre nun C auch eine $\mathfrak{B}_\xi$-Menge im R_0, so wäre nach **33·4·72** C auch eine $\mathfrak{B}_\xi$-Menge in A_k, was nicht der Fall ist; also ist C genau eine $\mathfrak{B}^\xi$-Menge im R_0, und ebenso $A_k - C$ genau eine $\mathfrak{B}_\xi$-Menge im R_0.

33·9·2. *Ist $\xi < \omega_1$, so gibt es im R_0 eine Menge, die genau eine $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-Menge ist.*

Die Behauptung ist trivial für $\xi = 1$, da z. B. der R_0 selbst eine $\mathfrak{B}_1^1$-Menge ist. Wir nehmen also $\xi \geq 2$ an. Sei zunächst ξ eine i s o l i e r t e Z a h l, also $\xi = \xi^* + 1$. Nach **33·9·11** gibt es ein $C_1 \subseteqq A_1$, das genau eine $\mathfrak{B}^{\xi^*}$-Menge, und ein $C_2 \subseteqq A_2$, das genau eine $\mathfrak{B}_{\xi^*}$-Menge im R_0 ist, während $A_1 - C_1$ genau eine $\mathfrak{B}_{\xi^*}$-Menge, $A_2 - C_2$ genau eine $\mathfrak{B}^{\xi^*}$-Menge im R_0 ist. Setzen wir $C = C_1 + C_2$, so ist $C \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^\xi (R_0)$; ist $\eta < \xi$, also $\eta \leq \xi^*$, so kann nicht $C \varepsilon \mathfrak{B}_\eta (R_0)$ sein; denn dann wäre wegen $A_1 \varepsilon \mathfrak{B}_1^1 (R_0)$ und $C_1 = A_1 C$

auch $C_1 \varepsilon \mathfrak{B}_\eta(R_0)$, während doch C_1 genau eine $\mathfrak{B}^{\xi^*}$-Menge ist. Ebenso sieht man, daß $C \sim\varepsilon \mathfrak{B}^\eta(R_0)$ für $\eta < \xi$. Sei sodann ξ eine Grenzzahl, $\eta_k < \xi$ und $\lim\limits_k \eta_k = \xi$. Nach **39·9·11** gibt es ein $C_k \subseteqq A_k$, das genau eine $\mathfrak{B}^{\eta_k}$-Menge im R_0 ist, während $A_k - C_k$ genau eine $\mathfrak{B}_{\eta_k}$-Menge ist. Wir setzen $C = \mathop{S}\limits_k C_k$; dann ist $C \varepsilon \mathfrak{B}^\xi(R_0)$; wegen $R_0 - C = \mathop{S}\limits_k (A_k - C_k)$ ist aber auch $R_0 - C \varepsilon \mathfrak{B}^\xi(R_0)$, also $C \varepsilon \mathfrak{B}_\xi(R_0)$, also $C \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^\xi(R_0)$. Ist $\eta < \xi$, so gibt es ein k, so daß $\eta_k > \eta$; und da $A_k C = C_k$, und $C_k \sim\varepsilon \mathfrak{B}^\eta(R_0) + \mathfrak{B}_\eta(R_0)$, ist auch $C \sim\varepsilon \mathfrak{B}^\eta(R_0) + \mathfrak{B}_\eta(R_0)$; also ist C genau eine $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-Menge.

33·9·3. *Ist E ein Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern $\supset A$ ist, und ist $\xi < \omega_1$, so gibt es ein $A \subseteqq E$, das genau eine $\mathfrak{B}^\xi$ (eine $\mathfrak{B}_\xi$-, eine $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-) Menge in E ist.*

Die Behauptung ist richtig für $\xi = 1$; denn ist a ein Punkt des insichdichten Kernes, so ist $\{a\}$ genau eine $\mathfrak{B}_1$-Menge, $E - \{a\}$ genau eine $\mathfrak{B}^1$-Menge in E, und E selbst ist genau eine $\mathfrak{B}_1^1$-Menge in E. Die Behauptung ist auch richtig für $\xi = 2$; denn nach **19·2·1** gibt es ein dyadisches Diskontinuum $C \subseteqq E$; da nach **18·8·22** C separabel, gibt es einen abzählbaren in C dichten Teil M; nach **33·4·5** ist $M \varepsilon \mathfrak{B}^2(E)$ und nach **19·2·2** ist $M \sim\varepsilon \mathfrak{B}_2(E)$, also ist M genau eine $\mathfrak{B}^2$-Menge, somit $E - M$ genau eine $\mathfrak{B}_2$-Menge in E. Ist $a \varepsilon C - M$ und sind $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ abzählbar viele Punkte aus M mit $\lim\limits_\nu a_\nu = a$, so ist die Menge K der Punkte a_ν genau eine $\mathfrak{B}_2^2$-Menge in E; denn als abzählbare Menge ist $K \varepsilon \mathfrak{B}^2(E)$; da ferner $K = K^0(E - \{a\})$ und K^0 abgeschlossen, also nach **10·7·41** $K^0 \varepsilon \mathfrak{B}_2(E)$, und da $E - \{a\}$ offen, ist $K \varepsilon \mathfrak{B}_2(E)$, also $K \varepsilon \mathfrak{B}_2^2(E)$; und da K weder abgeschlossen, noch offen ist $K \sim\varepsilon \mathfrak{B}_1(E)$ und $K \sim\varepsilon \mathfrak{B}^1(E)$. — Sei nunmehr $\xi \geqq 3$. Sei wie beim Beweise von **33·8·31** B ein reduziertes dyadisches Diskontinuum $\subseteqq E$ und P eine homöomorphe Abbildung des R_0 auf B. Nach **33·9·1**, **33·9·2** gibt es ein $M \subseteqq R_0$, das genau eine $\mathfrak{B}^\xi$- (bzw. $\mathfrak{B}_\xi$-, bzw. $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-) Menge im R_0 ist; nach **33·6·2** ist dann $P(M)$ genau eine $\mathfrak{B}^\xi$- (bzw. $\mathfrak{B}_\xi$-, bzw. $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-) Menge in B, und da $B \varepsilon \mathfrak{B}_2(E)$, ist nach **33·4·73** und **33·4·72** $P(M)$ auch genau eine $\mathfrak{B}^\xi$- (bzw. $\mathfrak{B}_\xi$-, bzw. $\mathfrak{B}_\xi^\xi$-) Menge in E.

Literatur: H. Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 208; C. Kuratowski, C. R. 176 (1923) S. 229; W. Sierpiński, Fund. math. 6 (1924) S. 39; Fund. math. 14 (1929) S. 82; C. R. Vars. 24 (1931) S. 57; O. Nikodym, Fund. math. 14 (1929) S. 145; F. Hausdorff, Mengenlehre S. 181; N. Lusin, Leç. s. l. ensembles analytiques S. 129ff.

§ 34. Die Baireschen Funktionen.

1. Die Baireschen Funktionen über $\mathfrak{S}$. Sei wieder E eine beliebige Menge, $\mathfrak{S}$ ein System von Funktionen auf E. In § 31, 2 haben wir die

Funktionensysteme $\mathfrak{S}^1$ und $\mathfrak{S}_1$ definiert; nun definieren wir für jede Ordinalzahl $\xi > 1$ durch Induktion die Funktionensysteme $\mathfrak{S}^\xi$, $\mathfrak{S}_\xi$ vermöge der Formeln:

(1) $$\mathfrak{S}^\xi = (\mathop{S}_{\eta<\xi} (\mathfrak{S}^\eta + \mathfrak{S}_\eta))^1, \quad \mathfrak{S}_\xi = (\mathop{S}_{\eta<\xi} (\mathfrak{S}^\eta + \mathfrak{S}_\eta))_1.$$

Die Funktionen aus $\mathfrak{S}^\xi + \mathfrak{S}_\xi$ heißen die Baireschen Funktionen ξ-ter Ordnung über $\mathfrak{S}$. Die Definition (1) besagt also: Ist $\mathfrak{T}$ das System der Baireschen Funktionen über $\mathfrak{S}$ von kleinerer als ξ-ter Ordnung ($\xi > 1$), so ist $\mathfrak{S}^\xi = \mathfrak{T}^1$, $\mathfrak{S}_\xi = \mathfrak{T}_1$.

34·1·1. *Für* $\xi < \xi'$ *ist* $\mathfrak{S}^\xi \subseteqq \mathfrak{S}^{\xi'}$, $\mathfrak{S}^\xi \subseteqq \mathfrak{S}_{\xi'}$, $\mathfrak{S}_\xi \subseteqq \mathfrak{S}^{\xi'}$, $\mathfrak{S}_\xi \subseteqq \mathfrak{S}_{\xi'}$.

Dies folgt unmittelbar aus (1).

34·1·11. *Ist* ξ *eine isolierte Zahl* > 1, *so ist:*

(1·1) $$\mathop{S}_{\eta<\xi} (\mathfrak{S}^\eta + \mathfrak{S}_\eta) = \mathfrak{S}^{\xi-1} + \mathfrak{S}_{\xi-1};$$

ist ξ *eine Grenzzahl, so ist:*

(1·11) $$\mathop{S}_{\eta<\xi} (\mathfrak{S}^\eta + \mathfrak{S}_\eta) = \mathop{S}_{\eta<\xi} \mathfrak{S}^\eta = \mathop{S}_{\eta<\xi} \mathfrak{S}_\eta.$$

Dies folgt unmittelbar aus **34·1·1.**

34·1·2. *Ist* $\mathfrak{S}$ *autark, so ist für jedes* $\xi \geqq 1$ *auch* $\mathfrak{S}^\xi$ *und* $\mathfrak{S}_\xi$ *autark.*

Für $\xi = 1$ ist die Behauptung richtig nach **31·2·1.** Angenommen, sie sei richtig für alle $\eta < \xi$; wir haben zu zeigen, daß sie dann auch für ξ gilt. Sei zunächst ξ isoliert. Wegen (1) und (1·1) ist dann $\mathfrak{S}^\xi = (\mathfrak{S}^{\xi-1} + \mathfrak{S}_{\xi-1})^1$; hierin ist nach (1) und **34·1·1** $\mathfrak{S}^{\xi-1} = (\mathop{S}_{\eta<\xi-1} (\mathfrak{S}^\eta + \mathfrak{S}_\eta))^1 \subseteqq (\mathfrak{S}_{\xi-1})^1$; nach **31·2·3** ist also, da nach Annahme $\mathfrak{S}_{\xi-1}$ autark:

(1·2) $$\mathfrak{S}^\xi = (\mathfrak{S}^{\xi-1} + \mathfrak{S}_{\xi-1})^1 = (\mathfrak{S}_{\xi-1})^1,$$

und nach **31·2·1** ist also auch $\mathfrak{S}^\xi$ autark. Sei sodann ξ Grenzzahl; um zu zeigen, daß $\mathfrak{S}^\xi$ und $\mathfrak{S}_\xi$ autark sind, genügt es nach (1) und **31·2·1** nachzuweisen, daß das System $\mathfrak{T} = \mathop{S}_{n>\xi} (\mathfrak{S}^\eta + \mathfrak{S}_\eta)$ autark ist; da nach Annahme $\mathfrak{S}^\eta$, $\mathfrak{S}_\eta$ für $\eta < \xi$ autark sind, hat $\mathfrak{T}$ offenbar die Eigenschaften 1a), 2a), 3a) eines autarken Systems (§ 30, 3); bleibt nur die Eigenschaft 4a) nachzuweisen. Sei also $f_1 \,\varepsilon\, \mathfrak{T}$, $f_2 \,\varepsilon\, \mathfrak{T}$, also $f_1 \,\varepsilon\, \mathfrak{S}^{\eta_1} + \mathfrak{S}_{\eta_1}$, $f_2 \,\varepsilon\, \mathfrak{S}^{\eta_2} + \mathfrak{S}_{\eta_2}$ ($\eta_1 < \xi$, $\eta_2 < \xi$); da ξ Grenzzahl, gibt es ein $\bar\eta$, so daß $\eta_1 < \bar\eta < \xi$, $\eta_2 < \bar\eta < \xi$; nach **34·1·1** ist $f_1 \,\varepsilon\, \mathfrak{S}^{\bar\eta}$, $f_2 \,\varepsilon\, \mathfrak{S}^{\bar\eta}$; da nach Annahme $\mathfrak{S}^{\bar\eta}$ autark, ist also auch $\max(f_1, f_2) \,\varepsilon\, \mathfrak{S}^{\bar\eta}$, $\min(f_1, f_2) \,\varepsilon\, \mathfrak{S}^{\bar\eta}$, also auch $\max(f_1, f_2) \,\varepsilon\, \mathfrak{T}$, $\min(f_1, f_2) \,\varepsilon\, \mathfrak{T}$, w. z. b. w.

34·1·21. *Ist* $\mathfrak{S}$ *autark und* ξ *Grenzzahl, so ist auch das System* (1·11) *autark.*

Der Beweis wurde soeben geführt.

34·1·3. *Bei autarkem $\mathfrak{S}$ ist für jedes $\xi \geq 1$*[1]:

$$\mathfrak{S}^{\xi+1} = (\mathfrak{S}^{\xi} + \mathfrak{S}_{\xi})^1 = (\mathfrak{S}_{\xi})^1; \quad \mathfrak{S}_{\xi+1} = (\mathfrak{S}^{\xi} + \mathfrak{S}_{\xi})_1 = (\mathfrak{S}^{\xi})_1 .$$

Dies ist gleichbedeutend mit (1·2).

34·1·31. *Bei autarkem $\mathfrak{S}$ ist für jedes $\xi > 1$:*

$$\mathfrak{S}^{\xi} = (\underset{\eta<\xi}{S} \mathfrak{S}_{\eta})^1 , \quad \mathfrak{S}_{\xi} = (\underset{\eta<\xi}{S} \mathfrak{S}^{\eta})_1 .$$

Dies folgt aus **34·1·1**, **34·1·11**, **34·1·3**.

34·1·32. *Bei autarkem $\mathfrak{S}$ ist für jedes $\xi \geq 1$:*

$$(\mathfrak{S}^{\xi})^1 = \mathfrak{S}^{\xi} ; \quad (\mathfrak{S}_{\xi})_1 = \mathfrak{S}_{\xi} .$$

Ist ξ isoliert, also von der Gestalt $\xi = \eta + 1$, folgt dies nach **31·2·21** aus **34·1·3** und **34·1·2**; ist ξ Grenzzahl, so folgt es nach **31·2·21** aus (1) und **34·1·21**.

34·1·4. *Ist $\mathfrak{S}$ autark, so ist für jedes $\xi \geq 1$ $\mathfrak{S}^{\xi}$ und $\mathfrak{S}_{\xi}$ völlig autark.*

Ist ξ isoliert, also von der Gestalt $\xi = \eta + 1$, folgt dies nach **31·2·6** aus **34·1·3** und **34·1·2**; ist ξ Grenzzahl, so folgt es nach **31·2·6** aus (1) und **34·1·21**.

34·1·41. *Ist $\mathfrak{S}$ autark und ξ Grenzzahl, so ist das System* (1·11) *additiv.*

Sei $\mathfrak{T}$ das System (1·11), sei $f_1 \varepsilon \mathfrak{T}$, $f_2 \varepsilon \mathfrak{T}$ und $f_1 + f_2$ definiert auf E; dann ist $f_1 \varepsilon \mathfrak{S}^{\eta_1}$, $f_2 \varepsilon \mathfrak{S}^{\eta_2}$ $(\eta_1 < \xi,\ \eta_2 < \xi)$; ist $\bar{\eta}$ die größere der beiden Ordinalzahlen η_1, η_2, so ist also $f_1 \varepsilon \mathfrak{S}^{\bar{\eta}}$, $f_2 \varepsilon \mathfrak{S}^{\bar{\eta}}$, also, da $\mathfrak{S}^{\bar{\eta}}$ nach **34·1·4** additiv: $f_1 + f_2 \varepsilon \mathfrak{S}^{\bar{\eta}}$, also wegen $\bar{\eta} < \xi$ auch $f_1 + f_2 \varepsilon \mathfrak{T}$.

Wir setzen nun unter Beachtung von (1·11):

$$\mathfrak{S}_B = \underset{\eta < \omega_1}{S} (\mathfrak{S}^{\eta} + \mathfrak{S}_{\eta}) = \underset{\eta < \omega_1}{S} \mathfrak{S}^{\eta} = \underset{\eta < \omega_1}{S} \mathfrak{S}_{\eta} . \tag{1·3}$$

34·1·5. *Bei beliebigem $\mathfrak{S}$ ist $(\mathfrak{S}_B)^1 = \mathfrak{S}_B$, $(\mathfrak{S}_B)_1 = \mathfrak{S}_B$.*

Sei $f_n \varepsilon \mathfrak{S}_B$, $f_n \leq f_{n+1}$, $f = \lim\limits_{n} f_n$; dann ist $f_n \varepsilon \mathfrak{S}^{\eta_n} + \mathfrak{S}_{\eta_n}$ $(\eta_n < \omega_1)$. Nach 8·4·1 gibt es ein $\eta < \omega_1$, so daß alle $\eta_n < \eta$; nach **34·1·1** ist dann $f_n \varepsilon \mathfrak{S}^{\eta} + \mathfrak{S}_{\eta}$ für alle n, also $f \varepsilon (\mathfrak{S}^{\eta} + \mathfrak{S}_{\eta})^1 = \mathfrak{S}^{\eta+1}$; wegen $\eta < \omega_1$ ist auch $\eta + 1 < \omega_1$, also $\mathfrak{S}^{\eta+1} \subseteqq \mathfrak{S}_B$, also $f \varepsilon \mathfrak{S}_B$.

34·1·51. *Für $\xi \geq \omega_1$ ist $\mathfrak{S}^{\xi} = \mathfrak{S}_{\xi} = \mathfrak{S}_B$.*

Nach **34·1·5** ist $(\mathfrak{S}_B)^1 = (\mathfrak{S}_B)_1 = \mathfrak{S}_B$, also nach (1) und (1·3) $\mathfrak{S}^{\omega_1} = \mathfrak{S}_{\omega_1} = \mathfrak{S}_B$. Von hier aus schließt man weiter durch transfinite Induktion.

Es kommen also die Baireschen Funktionen aller Ordnungen über $\mathfrak{S}$ bereits unter den Baireschen Funktionen von kleinerer als ω_1-ter Ordnung vor, d. h. $\mathfrak{S}_B$ ist das System aller Baireschen Funktionen über $\mathfrak{S}$; wir nennen es: das Bairesche System über $\mathfrak{S}$.

---

[1] Hieraus folgt insbesondere: $\mathfrak{S}^2 = (\mathfrak{S}_1)^1$, $\mathfrak{S}_2 = (\mathfrak{S}^1)_1$ in Übereinstimmung mit § 31, 4.

34·1·52. *$\mathfrak{S}_B$ ist das kleinste System $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{S}$, für das $\mathfrak{T}^1 = \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}$ gilt.*
Der Beweis ist analog dem von **33·1·52.**

Von einer Eigenschaft, die, wenn sie allen Funktionen $((f_\nu))$ einer konvergenten Funktionenfolge zukommt, auch deren Grenzfunktion zukommt, sagen wir: sie bleibt bei Grenzübergang erhalten.

34·1·521. *Kommt eine Eigenschaft allen Funktionen aus $\mathfrak{S}$ zu, und bleibt sie bei Grenzübergang erhalten, so kommt sie auch allen Funktionen aus $\mathfrak{S}_B$ zu.*

Denn ist $\mathfrak{T}$ das System aller Funktionen, denen diese Eigenschaft zukommt, so ist $\mathfrak{T}^1 = \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}$; die Behauptung folgt also aus **34·1·52.**

34·1·53. *Ist $\mathfrak{S}$ autark, so ist $\mathfrak{S}_B$ völlig autark.*
Dies folgt aus **34·1·51** und **34·1·4.**

34·1·6. *Ist $\mathfrak{S}$ symmetrisch, so ist $f \varepsilon \mathfrak{S}^\xi$ gleichbedeutend mit $-f \varepsilon \mathfrak{S}_\xi$.*
Dies ist nach **31·2·7** richtig für $\xi = 1$, und folgt sodann für alle ξ durch transfinite Induktion.

34·1·61. *Ist $\mathfrak{S}$ symmetrisch, so ist für jedes $\xi \geq 1$ auch $\mathfrak{S}^\xi + \mathfrak{S}_\xi$ symmetrisch.*
Dies folgt unmittelbar aus **34·1·6.**

34·1·62. *Ist $\mathfrak{S}$ symmetrisch, so auch $\mathfrak{S}_B$.*
Dies folgt unmittelbar aus **34·1·61.**

2. **Ambige Bairesche Funktionen.** In Analogie zur Definition von $\mathfrak{S}^1_1$ (§ 31, 3) setzen wir nun $\mathfrak{S}^\xi_\xi = \mathfrak{S}^\xi \,.\, \mathfrak{S}_\xi$. Die Mengen aus $\mathfrak{S}^\xi_\xi$ heißen die ambigen Baireschen Funktionen ξ-ter Ordnung über $\mathfrak{S}$, oder, wenn ξ eine isolierte Zahl ≥ 1 ist, auch die Baireschen Funktionen $(\xi - 1)$-ter Klasse über $\mathfrak{S}$.

34·2·1. *Für $\xi < \xi'$ ist $\mathfrak{S}^\xi + \mathfrak{S}_\xi \subseteqq \mathfrak{S}^{\xi'}_{\xi'}$; $\mathfrak{S}^\xi_\xi \subseteqq \mathfrak{S}^{\xi'}_{\xi'}$.*
Dies folgt unmittelbar aus **34·1·1.**

34·2·11. *Ist ξ Grenzzahl, so ist $\mathop{S}\limits_{\eta<\xi} \mathfrak{S}^\eta_\eta = \mathop{S}\limits_{\eta<\xi} (\mathfrak{S}^\eta + \mathfrak{S}_\eta)$.*
Dies folgt aus der Definition von $\mathfrak{S}^\eta_\eta$ und **34·2·1.**

34·2·12. *Ist ξ Grenzzahl, so ist $\mathfrak{S}^\xi_\xi = (\mathop{S}\limits_{\eta<\xi} \mathfrak{S}^\eta_\eta)^1_1$.*
Der Beweis ist analog dem von **33·2·13.**

34·2·2. *Ist $\mathfrak{S}$ autark, so ist für jedes $\xi \geq 1$ $\mathfrak{S}^\xi_\xi$ völlig autark.*
Dies folgt aus **34·1·4.**

34·2·3. *Ist $\mathfrak{S}$ autark, so ist für jedes $\xi \geq 1$: $(\mathfrak{S}^\xi_\xi)^1 = \mathfrak{S}^\xi$, $(\mathfrak{S}^\xi_\xi)_1 = \mathfrak{S}_\xi$.*
Wegen $\mathop{S}\limits_{\eta<\xi} (\mathfrak{S}^\eta + \mathfrak{S}_\eta) \subseteqq \mathfrak{S}^\xi_\xi$ ist $\mathfrak{S}^\xi = (\mathop{S}\limits_{\eta<\xi} (\mathfrak{S}^\eta + \mathfrak{S}_\eta))^1 \subseteqq (\mathfrak{S}^\xi_\xi)^1$. Umgekehrt ist wegen $\mathfrak{S}^\xi_\xi \subseteqq \mathfrak{S}^\xi$ nach **34·1·32** $(\mathfrak{S}^\xi_\xi)^1 \subseteqq (\mathfrak{S}^\xi)^1 = \mathfrak{S}^\xi$.

34·2·31. *Ist $\mathfrak{S}$ autark, so ist für jedes $\xi \geq 1$: $(\mathfrak{S}_\xi^\xi)^* = \mathfrak{S}_{\xi+1}^{\xi+1}$.*

Da nach **34·2·2** $\mathfrak{S}_\xi^\xi$ autark und additiv, ist nach **31·4·4** $(\mathfrak{S}_\xi^\xi)^* = (\mathfrak{S}_\xi^\xi)_2 (\mathfrak{S}_\xi^\xi)^2$; hierin ist nach **34·2·3** und **34·1·3** $(\mathfrak{S}_\xi^\xi)_2 = \big((\mathfrak{S}_\xi^\xi)^1\big)_1 = (\mathfrak{S}^\xi)_1 = \mathfrak{S}_{\xi+1}$; ebenso ist $(\mathfrak{S}_\xi^\xi)^2 = \mathfrak{S}^{\xi+1}$.

34·2·4. *Ist $\mathfrak{S}$ symmetrisch, so ist für jedes $\xi \geq 1$ auch $\mathfrak{S}_\xi^\xi$ symmetrisch.*

Dies folgt aus **34·1·6**.

Wir setzen nun $\mathfrak{S}^{(1)} = \mathfrak{S}^*$ und definieren für $\xi > 1$ durch Induktion: $\mathfrak{S}^{(\xi)} = (\underset{\eta<\xi}{S} \mathfrak{S}^{(\eta)})^*$; da für $\xi < \xi'$ offenbar $\mathfrak{S}^{(\xi)} \subseteqq \mathfrak{S}^{(\xi')}$, ist für jedes isolierte $\xi > 1$: $\mathfrak{S}^{(\xi)} = (\mathfrak{S}^{(\xi-1)})^*$. Wir setzen ferner: $\mathfrak{S}_{B*} = \underset{\eta<\omega_1}{S} \mathfrak{S}^{(\eta)}$.

34·2·5. *$\mathfrak{S}_{B*}$ ist das kleinste System $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{S}$, für das $\mathfrak{T}^* = \mathfrak{T}$ ist.*

Der Beweis ist analog dem von **33·2·8**.

34·2·51. *Für $\xi \geq \omega_1$ ist $\mathfrak{S}^{(\xi)} = \mathfrak{S}_{B*}$.*

Der Beweis ist analog dem von **33·2·81**.

34·2·6. *Ist $\mathfrak{S}$ autark und additiv, so ist $\mathfrak{S}^{(\xi)} = \mathfrak{S}_{\xi+1}^{\xi+1}$.*

Die Behauptung ist nach **31·4·4** richtig für $\xi = 1$. Angenommen, sie sei richtig für alle $\eta < \xi$; ist dann ξ isoliert, so ist $\mathfrak{S}^{(\xi-1)} = \mathfrak{S}_\xi^\xi$, also $\mathfrak{S}^{(\xi)} = (\mathfrak{S}^{(\xi-1)})^* = (\mathfrak{S}_\xi^\xi)^* = \mathfrak{S}_{\xi+1}^{\xi+1}$ nach **34·2·31**; ist hingegen ξ Grenzzahl, so ist $\mathfrak{S}^{(\xi)} = (\underset{\eta<\xi}{S} \mathfrak{S}^{(\eta)})^*$; hierin ist nach **34·2·11**: $\underset{\eta<\xi}{S} \mathfrak{S}^{(\eta)} = \underset{\eta<\xi}{S} \mathfrak{S}_{\eta+1}^{\eta+1} = \underset{\eta<\xi}{S} \mathfrak{S}_\eta^\eta = \underset{\eta<\xi}{S} (\mathfrak{S}^\eta + \mathfrak{S}_\eta)$; dieses System ist nach **34·1·21**, **34·1·41** autark und additiv, also ist nach **31·4·5** und **34·2·12**: $\mathfrak{S}^{(\xi)} = (\underset{\eta<\xi}{S} \mathfrak{S}_\eta^\eta)^* = \big((\underset{\eta<\xi}{S} \mathfrak{S}_\eta^\eta)_1^1\big)^* = (\mathfrak{S}_\xi^\xi)^*$, also nach **34·2·31** wieder $\mathfrak{S}^{(\xi)} = \mathfrak{S}_{\xi+1}^{\xi+1}$.

34·2·61. *Ist $\mathfrak{S}$ autark und additiv, so ist $\mathfrak{S}_{B*} = \mathfrak{S}_B$.*

Denn nach **34·2·6** und **34·2·11** ist $\mathfrak{S}_{B*} = \underset{\eta<\omega_1}{S} \mathfrak{S}^{(\eta)} = \underset{\eta<\omega_1}{S} \mathfrak{S}_{\eta+1}^{\eta+1} = \underset{\eta<\omega_1}{S} \mathfrak{S}_\eta^\eta = \underset{\eta<\omega_1}{S} (\mathfrak{S}^\eta + \mathfrak{S}_\eta) = \mathfrak{S}_B$.

Literatur: R. Baire, Ann. di mat. (3) 3 (1899) S. 68.

3. Bairesche Funktionen und Borelsche Mengen. Sei $\mathfrak{T}$ ein Funktionensystem auf E und seien $\mathfrak{T}^\xi$, $\mathfrak{T}_\xi$, $\mathfrak{T}_\xi^\xi$, $\mathfrak{T}_B$, die in Nr. 1, 2 eingeführten Systeme Bairescher Funktionen über $\mathfrak{T}$. Wir setzen zur Abkürzung:

$$(3) \qquad \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^\xi) = \overline{\mathfrak{G}}^\xi, \quad \underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}_\xi) = \underline{\mathfrak{G}}_\xi, \quad \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}^\xi) = \overline{\mathfrak{F}}^\xi, \quad \underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}_\xi) = \underline{\mathfrak{F}}_\xi;$$

dann gilt:

34·3·1. *Ist $\mathfrak{T}$ autark, so ist $\mathfrak{T}^\xi = \mathfrak{S}(\overline{\mathfrak{G}}^\xi, *)$, $\mathfrak{T}_\xi = \mathfrak{S}(*, \underline{\mathfrak{G}}_\xi)$.*

Nach **34·1·2** ist $\mathfrak{T}^\xi$ autark, nach **34·1·32** ist $(\mathfrak{T}^\xi)^1 = \mathfrak{T}^\xi$, die Behauptung folgt also aus **31·2·512**.

34·3·11. *Ist $\mathfrak{T}$ autark, so ist $\overline{\mathfrak{F}}^\xi = (\overline{\mathfrak{G}}^\xi)_1$, $\underline{\mathfrak{F}}_\xi = (\underline{\mathfrak{G}}_\xi)_1$.*

Nach **34·1·2** ist $\mathfrak{T}^\xi$ autark; nach **30·3·3** ist also $\overline{\mathfrak{G}}^\xi$ ein Ring, und die Behauptung folgt aus **34·3·1** und **30·2·3.**

34·3·2. *Ist* $\mathfrak{T}$ *autark und* $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{N}$, $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{P}$, $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{Q}$, *so ist für alle endlichen* n:

(3·1) $\overline{\mathfrak{G}}^{2n-1} = \mathfrak{M}^{2n-1}$, $\underline{\mathfrak{G}}_{2n-1} = \mathfrak{N}^{2n-1}$; $\overline{\mathfrak{F}}^{2n-1} = \mathfrak{M}_{2n}$, $\underline{\mathfrak{F}}_{2n-1} = \mathfrak{N}_{2n}$;

(3·11) $\overline{\mathfrak{G}}^{2n} = \mathfrak{P}^{2n}$, $\underline{\mathfrak{G}}_{2n} = \mathfrak{Q}^{2n}$; $\overline{\mathfrak{F}}^{2n} = \mathfrak{P}_{2n+1}$, $\underline{\mathfrak{F}}_{2n} = \mathfrak{Q}_{2n+1}$.

Nach **31·2·5** ist $\overline{\mathfrak{G}}^1 = \mathfrak{M}^1$, $\underline{\mathfrak{G}}_1 = \mathfrak{N}^1$, also nach **34·3·11** $\overline{\mathfrak{F}}^1 = (\mathfrak{M}^1)_1 = \mathfrak{M}_2$, ebenso $\underline{\mathfrak{F}}_1 = \mathfrak{N}_2$; also ist (3·1) richtig für $n = 1$. Nach **31·4·21** ist $\overline{\mathfrak{G}}^2 = \mathfrak{P}^2$, $\underline{\mathfrak{G}}_2 = \mathfrak{Q}^2$, also nach **34·3·11** $\overline{\mathfrak{F}}^2 = \mathfrak{P}_3$, $\underline{\mathfrak{F}}_2 = \mathfrak{Q}_3$; also ist (3·11) richtig für $n = 1$. Aus $\underline{\mathfrak{F}}_2 = \mathfrak{Q}_3$ erhalten wir durch Komplementbildung nach **33·1·7**: $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}_2) = \mathfrak{M}^3$, und da nach **34·1·2** $\mathfrak{T}_2$ autark, und $\mathfrak{T}^3 = (\mathfrak{T}_2)^1$, ist nach **31·2·5** $\overline{\mathfrak{G}}^3 = (\mathfrak{M}^3)^1 = \mathfrak{M}^3$, also nach **34·3·11** $\overline{\mathfrak{F}}^3 = \mathfrak{M}_4$, und ebenso $\underline{\mathfrak{G}}_3 = \mathfrak{N}^3$, $\underline{\mathfrak{F}}_3 = \mathfrak{N}_4$; also ist (3·1) richtig für $n = 2$. Aus $\underline{\mathfrak{F}}_3 = \mathfrak{N}_4$ erhalten wir sodann durch Komplementbildung $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}_3) = \mathfrak{P}^4$, also nach **31·2·5** $\overline{\mathfrak{G}}^4 = (\mathfrak{P}^4)^1 = \mathfrak{P}^4$, und nach **34·3·11** $\overline{\mathfrak{F}}^4 = \mathfrak{P}_5$, und ebenso: $\underline{\mathfrak{G}}_4 = \mathfrak{Q}^4$, $\underline{\mathfrak{F}}_4 = \mathfrak{Q}_5$; also ist (3·11) richtig für $n = 2$. Indem man so weiter schließt, beweist man die Behauptung.

Aus **34·3·2** folgt wegen **34·1·1**: $\mathfrak{M}^1 \subseteqq \mathfrak{P}^2 \subseteqq \mathfrak{M}^3 \subseteqq \mathfrak{P}^4 \subseteqq \ldots$, $\mathfrak{N}^1 \subseteqq \mathfrak{Q}^2 \subseteqq \mathfrak{N}^3 \subseteqq \mathfrak{Q}^4 \subseteqq \ldots$; also ist:

(3·2) $$\underset{n}{S}\, \overline{\mathfrak{G}}^n = \underset{n}{S}\, \mathfrak{M}^n = \underset{n}{S}\, \mathfrak{P}^n, \quad \underset{n}{S}\, \underline{\mathfrak{G}}_n = \underset{n}{S}\, \mathfrak{N}^n = \underset{n}{S}\, \mathfrak{Q}^n.$$

34·3·21. *Ist* $\mathfrak{T}$ *autark und* $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{N}$, $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{P}$, $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{Q}$, *so ist für alle* $\xi \geqq \omega$:

$$\overline{\mathfrak{G}}^\xi = \mathfrak{M}^\xi = \mathfrak{P}^\xi, \quad \underline{\mathfrak{G}}_\xi = \mathfrak{N}^\xi = \mathfrak{Q}^\xi.$$

Nach (1) und (1·11) ist $\mathfrak{T}^\omega = (\underset{n}{S}\, \mathfrak{T}^n)^1$; nach **34·1·21** ist $\underset{n}{S}\, \mathfrak{T}^n$ autark; nach (3·2) ist $\overline{\mathfrak{G}}(\underset{n}{S}\, \mathfrak{T}^n) = \underset{n}{S}\, \mathfrak{M}^n = \underset{n}{S}\, \mathfrak{P}^n$; nach **31·2·5** ist also $\overline{\mathfrak{G}}^\omega = (\underset{n}{S}\, \mathfrak{M}^n)^1 = (\underset{n}{S}\, \mathfrak{P}^n)^1$, also nach § 33 (1) und (1·11): $\overline{\mathfrak{G}}^\omega = \mathfrak{M}^\omega = \mathfrak{P}^\omega$; ebenso ist $\underline{\mathfrak{G}}_\omega = \mathfrak{N}^\omega = \mathfrak{Q}^\omega$; die Behauptung ist also richtig für $\xi = \omega$. Angenommen, sie gelte für alle der Ungleichung $\omega \leqq \eta < \xi$ genügenden η. Ist dann ξ isoliert, so ist $\underline{\mathfrak{G}}_{\xi-1} = \mathfrak{N}^{\xi-1} = \mathfrak{Q}^{\xi-1}$, also nach **34·3·11** $\underline{\mathfrak{F}}_{\xi-1} = \mathfrak{N}_\xi = \mathfrak{Q}_\xi$, also durch Komplementbildung $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}_{\xi-1}) = \mathfrak{P}^\xi = \mathfrak{M}^\xi$, und nach **31·2·5** $\overline{\mathfrak{G}}^\xi = (\mathfrak{P}^\xi)^1 = (\mathfrak{M}^\xi)^1$, und daher nach **33·1·2** $\overline{\mathfrak{G}}^\xi = \mathfrak{P}^\xi = \mathfrak{M}^\xi$. Ist hingegen ξ Grenzzahl, so ist $\mathfrak{T}^\xi = (\underset{\eta<\xi}{S}\, \mathfrak{T}^\eta)^1$; da nach Annahme $\overline{\mathfrak{G}}^\eta = \mathfrak{M}^\eta = \mathfrak{P}^\eta$ für

$\omega \leq \eta < \xi$, ist zufolge (3·2): $\overline{\mathfrak{G}}(\underset{\eta<\xi}{S}\mathfrak{T}^\eta) = \underset{\eta<\xi}{S}\mathfrak{M}^\eta = \underset{\eta<\xi}{S}\mathfrak{P}^\eta$; da nach **34·1·21** $\underset{\eta<\xi}{S}\mathfrak{T}^\eta$ autark, ist also nach **31·2·5** $\overline{\mathfrak{G}}^\xi = (\underset{\eta<\xi}{S}\mathfrak{M}^\eta)^1 = (\underset{\eta<\xi}{S}\mathfrak{P}^\eta)^1$, also nach § 33 (1) und (1·11): $\overline{\mathfrak{G}}^\xi = \mathfrak{M}^\xi = \mathfrak{P}^\xi$.

34·3·22. *Ist $\mathfrak{T}$ autark, so ist $\overline{\mathfrak{G}}^{\xi-1}$ (bzw. $\underline{\mathfrak{G}}_{\xi+1}$) das System der Komplemente von $(\underline{\mathfrak{G}}_\xi)_1$ (bzw. von $(\overline{\mathfrak{G}}^\xi)_1$) bezüglich E.*

Dies folgt unmittelbar aus **34·3·2** und **34·3·21.**

34·3·23. *Ist $\mathfrak{T}$ autark und ξ Grenzzahl, so ist $\overline{\mathfrak{G}}^\xi = (\underset{\eta<\xi}{S}\overline{\mathfrak{G}}^\eta)^1$, $\underline{\mathfrak{G}}_\xi = (\underset{\eta<\xi}{S}\underline{\mathfrak{G}}_\eta)^1$.*

Dies folgt bei Beachtung von (3·2) aus **34·3·21.**

34·3·3. *Ist $\mathfrak{T}$ autark, so ist $\mathfrak{T}^\xi_\xi = \mathfrak{S}(\overline{\mathfrak{G}}^\xi, \underline{\mathfrak{G}}_\xi)$.*

Setzen wir $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{N}$, so ist nach **31·3·41** $\mathfrak{T}^1_1 = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}^1, \mathfrak{N}^1)$, und nach **31·2·5** ist $\mathfrak{M}^1 = \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^1) = \overline{\mathfrak{G}}^1$, ebenso $\mathfrak{N}^1 = \underline{\mathfrak{G}}_1$; die Behauptung ist also richtig für $\xi = 1$. Angenommen, sie sei richtig für alle $\eta < \xi$. Ist dann ξ isoliert, so ist nach **34·2·31** $\mathfrak{T}^\xi_\xi = (\mathfrak{T}^{\xi-1}_{\xi-1})^*$; nach **34·2·2** ist $\mathfrak{T}^{\xi-1}_{\xi-1}$ völlig autark; setzen wir also: $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}^{\xi-1}_{\xi-1}) = \mathfrak{K}$, $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}^{\xi-1}_{\xi-1}) = \mathfrak{L}$, so ist nach **31·4·31**: $\mathfrak{T}^\xi_\xi = \mathfrak{S}(\mathfrak{K}^1, \mathfrak{L}^1)$; nach Annahme ist $\mathfrak{T}^{\xi-1}_{\xi-1} = \mathfrak{S}(\overline{\mathfrak{G}}^{\xi-1}, \underline{\mathfrak{G}}_{\xi-1})$, also $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^{\xi-1}_{\xi-1}) = \underline{\mathfrak{G}}_{\xi-1}$, also ist $\mathfrak{K}$ das System der Komplemente der Mengen von $\underline{\mathfrak{G}}_{\xi-1}$, also $\mathfrak{K}^1$ das System der Komplemente der Mengen von $(\underline{\mathfrak{G}}_{\xi-1})_1$, also nach **34·3·22** $\mathfrak{K}^1 = \overline{\mathfrak{G}}^\xi$; ebenso ist $\mathfrak{L}^1 = \underline{\mathfrak{G}}_\xi$, also $\mathfrak{T}^\xi_\xi = \mathfrak{S}(\overline{\mathfrak{G}}^\xi, \underline{\mathfrak{G}}_\xi)$. Ist ξ Grenzzahl, so ist nach **34·2·12** $\mathfrak{T}^\xi_\xi = (\underset{\eta<\xi}{S}\mathfrak{T}^\eta_\eta)^1_1$; nach **34·2·11** und **34·1·21** ist $\underset{\eta<\xi}{S}\mathfrak{T}^\eta_\eta$ autark; setzen wir also $\mathfrak{K} = \overline{\mathfrak{G}}(\underset{\eta<\xi}{S}\mathfrak{T}^\eta_\eta)$, $\mathfrak{L} = \underline{\mathfrak{G}}(\underset{\eta<\xi}{S}\mathfrak{T}^\eta_\eta)$, so ist nach **31·3·41** $\mathfrak{T}^\xi_\xi = \mathfrak{S}(\mathfrak{K}^1, \mathfrak{L}^1)$; nach Annahme ist nun $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}^\eta_\eta) = \overline{\mathfrak{G}}^\eta$ für $\eta < \xi$, also $\mathfrak{K} = \underset{\eta<\xi}{S}\overline{\mathfrak{G}}^\eta$, also nach **34·3·23** $\mathfrak{K}^1 = \overline{\mathfrak{G}}^\xi$, und ebenso $\mathfrak{L}^1 = \underline{\mathfrak{G}}_\xi$; also ist $\mathfrak{T}^\xi_\xi = \mathfrak{S}(\overline{\mathfrak{G}}^\xi, \underline{\mathfrak{G}}_\xi)$.

34·3·4. *Ist $\mathfrak{T}$ autark und $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{N}$, $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{P}$, $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{Q}$, so ist: $\mathfrak{M}_B = \mathfrak{P}_B$, $\mathfrak{N}_B = \mathfrak{Q}_B$.*

Dies folgt wegen **33·1·51** aus **34·3·21** für $\xi = \omega_1$.

34·3·41. *Ist $\mathfrak{T}$ autark, und $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{N}$, so ist $\mathfrak{T}_B = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}_B, *) = \mathfrak{S}(*, \mathfrak{N}_B) = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}_B, \mathfrak{N}_B)$.*

Nach **34·1·51** ist $\mathfrak{T}_B = \mathfrak{T}^{\omega_1} = \mathfrak{T}_{\omega_1} = \mathfrak{T}^{\omega_1}_{\omega_1}$, also nach **34·3·1** und **34·3·3**: $\mathfrak{T}_B = \mathfrak{S}(\overline{\mathfrak{G}}^{\omega_1}, *) = \mathfrak{S}(*, \underline{\mathfrak{G}}_{\omega_1}) = \mathfrak{S}(\overline{\mathfrak{G}}^{\omega_1}, \underline{\mathfrak{G}}_{\omega_1})$, und die Behauptung folgt aus **33·1·51** und **34·3·21.**

Literatur: H. Lebesgue, Journ. de math. (8) 1 (1905) S. 139; W. H. Young, Lond. Proc. (2) 12 (1912) S. 260; F. Hausdorff, Mengenlehre § 43.

4. Einschiebung und Erweiterung. Sei wieder $\mathfrak{T}$ ein Funktionensystem auf E. Für die Baireschen Funktionen über $\mathfrak{T}$ gilt folgender Einschiebungssatz:

34·4·1. *Ist $\mathfrak{T}$ autark, $g \varepsilon \mathfrak{T}_\xi$, $h \varepsilon \mathfrak{T}^\xi$ und $g \leq h$, so gibt es ein $f \varepsilon \mathfrak{T}^\xi_\xi$, so daß $g \leq f \leq h$.*

Nach **34·2·2** ist $\mathfrak{T}^\xi_\xi$ völlig autark; nach **34·2·3** ist $(\mathfrak{T}^\xi_\xi)^1 = \mathfrak{T}^\xi$, $(\mathfrak{T}^\xi_\xi)_1 = \mathfrak{T}_\xi$; die Behauptung folgt also aus **32·2·11.**

Nehmen wir wieder die Bezeichnungsweise (3) auf, so gilt:

34·4·2. *Ist $\mathfrak{T}$ autark, so ist für jedes $E' \subseteqq E$: $\overline{\mathfrak{G}}\left((E' \,1\, \mathfrak{T})^\xi\right) = E' \,1\, \overline{\mathfrak{G}}^\xi$, $\underline{\mathfrak{G}}\left((E' \,1\, \mathfrak{T})_\xi\right) = E' \,1\, \underline{\mathfrak{G}}_\xi$.*

Dies folgt aus **34·3·2, 34·3·21** und **33·3·2.**

34·4·21. *Ist $\mathfrak{T}$ autark und $E' \subseteqq E$, so ist $(E' \,1\, \mathfrak{T})^\xi = E' \,1\, \mathfrak{T}^\xi$, $(E' \,1\, \mathfrak{T})_\xi = E' \,1\, \mathfrak{T}_\xi$.*

Nach **34·3·1** und **34·4·2** ist $(E' \,1\, \mathfrak{T})^\xi = \mathfrak{S}\,(E' \,1\, \overline{\mathfrak{G}}^\xi, *)$, $\mathfrak{T}^\xi = \mathfrak{S}\,(\overline{\mathfrak{G}}^\xi, *)$. Da nach **34·3·2, 34·3·21** und **33·1·2** $\overline{\mathfrak{G}}^\xi$ ein σ-System, ist also nach **32·4·11** $(E' \,1\, \mathfrak{T})^\xi = E' \,1\, \mathfrak{T}^\xi$.

34·4·211. *Ist $\mathfrak{T}$ autark und $E' \subseteqq E$, so ist $E' \,1\, \mathfrak{T}^\xi_\xi \subseteqq (E' \,1\, \mathfrak{T})^\xi_\xi$.*

Dies folgt aus **34·4·21.**

34·4·22. *Ist $\mathfrak{T}$ autark und $E - E' \varepsilon\, \overline{\mathfrak{G}}^\xi\, \underline{\mathfrak{G}}_\xi$, so ist $(E' \,1\, \mathfrak{T})^\xi_\xi = E' \,1\, \mathfrak{T}^\xi_\xi$.*

Nach **34·3·3** und **34·4·2** ist $(E' \,1\, \mathfrak{T})^\xi_\xi = \mathfrak{S}\,(E' \,1\, \overline{\mathfrak{G}}^\xi, E' \,1\, \underline{\mathfrak{G}}_\xi)$, $\mathfrak{T}^\xi_\xi = \mathfrak{S}\,(\overline{\mathfrak{G}}^\xi, \underline{\mathfrak{G}}_\xi)$. Nach **34·2·2** ist $\mathfrak{T}^\xi_\xi$ völlig autark; also ist nach **32·4·13:** $E' \,1\, \mathfrak{T}^\xi_\xi = (E' \,1\, \mathfrak{T})^\xi_\xi$.

34·4·23. *Ist $\mathfrak{T}$ autark und $E' \subseteqq E$, so ist $(E' \,1\, \mathfrak{T})_B = E' \,1\, \mathfrak{T}_B$.*

Dies folgt unmittelbar aus **34·4·21.**

34·4·3. *Ist $\mathfrak{T}$ autark, so gibt es in $\mathfrak{T}^\xi$ (bzw. in $\mathfrak{T}_\xi$) zu jedem $f \varepsilon \mathfrak{T}^\xi$ (bzw. $f \varepsilon \mathfrak{T}_\xi$) eine gleichmäßig gegen f konvergierende Folge von Treppenfunktionen.*

Nach **34·1·32** *ist* $\mathfrak{T}^\xi = (\mathfrak{T}^\xi)^1$; nach **34·1·2** ist $\mathfrak{T}^\xi$ autark; die Behauptung folgt also aus **32·5·2.**

34·4·31. *Ist $\mathfrak{T}$ autark und $\xi > 1$, so gibt es in $\mathfrak{T}^\xi_\xi$ zu jedem $f \varepsilon \mathfrak{T}^\xi_\xi$ eine gleichmäßig gegen f konvergierende Folge von Treppenfunktionen.*

Ist ξ isoliert, also $\xi = \eta + 1$, so ist nach **34·2·31:** $\mathfrak{T}^\xi_\xi = (\mathfrak{T}^\eta_\eta)^*$; nach **34·2·2** ist $\mathfrak{T}^\eta_\eta$ autark und additiv; die Behauptung folgt also aus **32·5·31.** Ist ξ Grenzzahl, so ist nach **34·3·3** und **34·3·21** $\overline{\mathfrak{G}}\,(\mathfrak{T}^\xi_\xi) = \mathfrak{M}^\xi$, $\underline{\mathfrak{G}}\,(\mathfrak{T}^\xi_\xi) = \mathfrak{Q}^\xi$, also durch Komplementbildung $\overline{\mathfrak{F}}\,(\mathfrak{T}^\xi_\xi) = \mathfrak{M}_\xi$; hierin ist $\mathfrak{M}^\xi = \left(\underset{\eta<\xi}{S}\,(\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta)\right)^1$,

$\mathfrak{M}_\xi = (\underset{\eta<\xi}{S}(\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta))_1$, und da nach **34·2·2** $\mathfrak{T}_\xi^\xi$ völlig autark, folgt die Behauptung aus **32·5·3**.

34·4·4. *Ist $\mathfrak{T}$ autark und symmetrisch, so gibt es zu jeder Treppenfunktion $f \varepsilon \mathfrak{T}_{\xi+1}^{\xi+1}$ ein $g \varepsilon \mathfrak{T}^\xi$ und ein $h \varepsilon \mathfrak{T}_\xi$, so daß $f = g + h$.*

Nach **34·2·31** ist $\mathfrak{T}_{\xi-1}^{\xi+1} = (\mathfrak{T}_\xi^\xi)^*$; nach **34·2·3** ist $(\mathfrak{T}_\xi^\xi)^1 = \mathfrak{T}^\xi$, $(\mathfrak{T}_\xi^\xi)_1 = \mathfrak{T}_\xi$. Nach **34·2·2** und **34·2·4** ist $\mathfrak{T}_\xi^\xi$ autark, additiv und symmetrisch. Die Behauptung folgt also aus **32·5·4**.

§ 35. Die Baireschen Funktionen eines metrischen Raumes.

1. **Die Baireschen Funktionen eines metrischen Raumes.** Sei E ein metrischer Raum, $\mathfrak{C}$ das System der stetigen Funktionen in E. Wir bezeichnen dann die Baireschen Funktionen über $\mathfrak{C}$ als die Baireschen Funktionen in E, die Funktionen aus $\mathfrak{C}^\xi$ und $\mathfrak{C}_\xi$ als die Baireschen Funktionen ξ-ter Ordnung in E, die Funktionen aus $\mathfrak{C}_\xi^\xi$ als die ambigen Baireschen Funktionen ξ-ter Ordnung in E, oder, wenn ξ eine isolierte Zahl ≥ 1 ist, auch als die Funktionen $(\xi-1)$-ter Klasse in E. Die Funktionen aus $\mathfrak{C}^\xi$ (bzw. $\mathfrak{C}_\xi$, $\mathfrak{C}_\xi^\xi$) bezeichnen wir auch als $\mathfrak{C}^\xi$-Funktionen (bzw. $\mathfrak{C}_\xi$-Funktionen, $\mathfrak{C}_\xi^\xi$-Funktionen).

35·1·1. *Für jedes $\xi \geq 1$ gelten die Formeln:*

$$(\mathfrak{C}^\xi)^1 = \mathfrak{C}^\xi, \quad (\mathfrak{C}_\xi)_1 = \mathfrak{C}_\xi;$$

$$(\mathfrak{C}^\xi)_1 = (\mathfrak{C}^\xi + \mathfrak{C}_\xi)_1 = \mathfrak{C}_{\xi+1}, \quad (\mathfrak{C}_\xi)^1 = (\mathfrak{C}^\xi + \mathfrak{C}_\xi)^1 = \mathfrak{C}^{\xi+1}.$$

Dies folgt, da das System $\mathfrak{C}$ der stetigen Funktionen autark ist, aus **34·1·32** und **34·1·3**.

35·1·11. *Für jedes $\xi > 1$ ist:*

$$\mathfrak{C}^\xi = (\underset{\eta<\xi}{S}\mathfrak{C}_\eta)^1, \quad \mathfrak{C}_\xi = (\underset{\eta<\xi}{S}\mathfrak{C}^\eta)_1.$$

Dies folgt aus **34·1·31**.

35·1·2. *Für jedes $\xi \geq 1$ ist $\mathfrak{C}^\xi$ und $\mathfrak{C}_\xi$ völlig autark.*

Dies folgt aus **34·1·4**.

35·1·21. *Ist ξ Grenzzahl, so ist das System $\underset{\eta<\xi}{S}(\mathfrak{C}^\eta + \mathfrak{C}_\eta) = \underset{\eta<\xi}{S}\mathfrak{C}^\eta = \underset{\eta<\xi}{S}\mathfrak{C}_\eta$ autark und additiv.*

Dies folgt aus **34·1·21** und **34·1·41**.

35·1·3. *Es ist $f \varepsilon \mathfrak{C}^\xi$ gleichbedeutend mit $-f \varepsilon \mathfrak{C}_\xi$.*

Dies folgt, da $\mathfrak{C}$ symmetrisch, aus **34·1·6**.

35·1·31. *Für jedes $\xi \geq 1$ ist $\mathfrak{C}^\xi + \mathfrak{C}_\xi$ symmetrisch.*

Da $\mathfrak{C}$ völlig autark, ist nach **31·3·23**:

$$\mathfrak{C}_1^1 = \mathfrak{C}.$$

35·1·4. *Für jedes $\xi \geq 1$ ist $\mathfrak{C}_\xi^\xi$ völlig autark und symmetrisch.*

Dies folgt aus **34·2·2, 34·2·4.**

35·1·5. *Für jedes $\xi \geq 1$ gelten die Formeln:*

$$(\mathfrak{C}_\xi^\xi)^1 = \mathfrak{C}^\xi, \quad (\mathfrak{C}_\xi^\xi)_1 = \mathfrak{C}_\xi, \quad (\mathfrak{C}_\xi^\xi)^* = \mathfrak{C}_{\xi+1}^{\xi+1}.$$

Dies folgt aus **34·2·3, 34·2·31.**

35·1·6. *Das System $\mathfrak{C}_B$ ist völlig autark und symmetrisch.*

Dies folgt aus **34·1·53, 34·1·62.**

35·1·61. *$\mathfrak{C}_B$ ist das kleinste alle stetigen Funktionen in E enthaltende System $\mathfrak{T}$, für das $\mathfrak{T}^1 = \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}$ gilt.*

Dies folgt aus **34·1·52.**

35·1·62. *$\mathfrak{C}_B$ ist das kleinste alle stetigen Funktionen in E enthaltende System $\mathfrak{T}$, für das $\mathfrak{T}^* = \mathfrak{T}$ gilt.*

Dies folgt aus **34·2·5, 34·2·61.**

35·1·7. *Eine Eigenschaft, die allen stetigen Funktionen in E zukommt und bei Grenzübergang erhalten bleibt, kommt auch allen Baireschen Funktionen in E zu.*

Dies folgt aus **34·1·521.**

2. **Bairesche Funktionen und Borelsche Mengen eines metrischen Raumes.** Sei $\mathfrak{G}$ das System der offenen, $\mathfrak{F}$ das System der abgeschlossenen Mengen des metrischen Raumes E. Für das System $\mathfrak{C}$ der stetigen Funktionen in E gilt dann nach **25·8·1, 25·8·11, 25·8·14:**

$$\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}) = \underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{G}, \quad \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}) = \underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{F}. \tag{2}$$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{S}(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}). \tag{2·1}$$

Machen wir Gebrauch von der in § 33 (4) eingeführten Bezeichnungsweise, so gilt:

35·2·1. *Für alle $\xi \geq 1$ ist:* $\mathfrak{C}^\xi = \mathfrak{S}(\mathfrak{B}^\xi, *)$, $\mathfrak{C}_\xi = \mathfrak{S}(*, \mathfrak{B}^\xi)$.

Dies folgt wegen (2) aus **34·3·1, 34·3·2, 34·3·21, 33·4·1, 33·4·11.**

35·2·11. *Für alle $\xi \geq 1$ ist:* $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}^\xi) = \mathfrak{B}^\xi$, $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}_\xi) = \mathfrak{B}^\xi$, $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}^\xi) = \mathfrak{B}_{\xi-1}$, $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}_\xi) = \mathfrak{B}_{\xi+1}$.

Dies folgt aus **35·2·1** und **34·3·11.**

35·2·2. *Für alle $\xi \geq 1$ ist:* $\mathfrak{C}_\xi^\xi = \mathfrak{S}(\mathfrak{B}^\xi, \mathfrak{B}^\xi)$.

Dies folgt aus **34·3·3, 35·2·11.**

35·2·21. *Für alle $\xi \geq 1$ ist:* $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}_\xi^\xi) = \underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}_\xi^\xi) = \mathfrak{B}^\xi$, $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}_\xi^\xi) = \underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}_\xi^\xi) = \mathfrak{B}_\xi$.

Dies folgt aus **35·2·2** und **33·4·2.**

35·2·3. *Das System* $\mathfrak{C}_B$ *aller Baireschen Funktionen in* E *ist gegeben durch* $\mathfrak{C}_B = \mathfrak{S}(\mathfrak{B}_B, *) = \mathfrak{S}(*, \mathfrak{B}_B) = \mathfrak{S}(\mathfrak{B}_B, \mathfrak{B}_B)$.

Dies folgt wegen § 33 (4·41) aus **34·3·41.**

35·2·31. *Ist* f *eine Bairesche Funktion in* E *und* B *eine Borelsche Menge im* $\bar{R}^1$, *so ist die Menge* $[f(\hat{x}) \varepsilon B]$ *aller* $x \varepsilon E$ *mit* $f(x) \varepsilon B$ *eine Borelsche Menge in* E.

Nach § 2 (1·9) und **2·1·3** gilt:

$$(2{\cdot}2) \quad \begin{gathered} [f(\hat{x}) \varepsilon \underset{\nu}{S} B_\nu] = \underset{\nu}{S} [f(\hat{x}) \varepsilon B_\nu], \ [f(\hat{x}) \varepsilon \underset{\nu}{D} B_\nu] = \underset{\nu}{D} [f(\hat{x}) \varepsilon B_\nu], \\ [f(\hat{x}) \varepsilon \bar{R}_1 - B] = E - [f(\hat{x}) \varepsilon B]. \end{gathered}$$

Ist B eine offene Halbgerade $y > a$ (bzw. $y < b$) des $\bar{R}_1$, so ist $[f(\hat{x}) \varepsilon B] = [f(\hat{x}) > a]$ (bzw. $= [f(\hat{x}) < b]$); dann ist nach **35·2·3** also $[f(\hat{x}) \varepsilon B]$ eine Borelsche Menge in E; da das Intervall (a, b) des $\bar{R}_1$ der Durchschnitt der Halbgeraden $y > a$ und $y < b$ ist, gilt dies nach der zweiten Formel (2·2) auch, wenn B ein Intervall (a, b) ist; da jede offene Menge des $\bar{R}_1$ Summe abzählbar vieler offener Intervalle und höchstens zweier offener Halbgeraden des $\bar{R}_1$ ist, gilt es nach der ersten Formel (2·2) auch, wenn B eine offene Menge des $\bar{R}_1$ ist, und wegen der dritten Formel (2·2) gilt es auch, wenn B eine abgeschlossene Menge des $\bar{R}_1$ ist; die Behauptung ist also richtig für alle $B \varepsilon \mathfrak{B}^1 + \mathfrak{B}_1$. Sei nun $\xi < \omega_1$ und es gelte die Behauptung für alle $B \varepsilon \mathfrak{B}^\eta + \mathfrak{B}_\eta$ $(\eta < \xi)$; wegen der ersten und zweiten Formel (2·2) gilt sie dann auch für alle $B \varepsilon \mathfrak{B}^\xi + \mathfrak{B}_\xi$, sie gilt also für alle $B \varepsilon \mathfrak{B}_B$.

Für die charakteristischen Funktionen (§ 1, 5) der Borelschen Mengen des Raumes E gelten die Sätze:

35·2·4. *Ist* $M \subseteqq E$, *so ist, damit die charakteristische Funktion* f *von* M *zu* $\mathfrak{C}^\xi$ *(bzw. zu* $\mathfrak{C}_\xi$*) gehöre, notwendig und hinreichend, daß* $M \varepsilon \mathfrak{B}^\xi$ *(bzw.* $M \varepsilon \mathfrak{B}_\xi$*) sei.*

Die Mengen $[f(\hat{x}) > y]$ sind: Λ, M, E, gehören also zu $\mathfrak{B}^\xi$ dann und nur dann, wenn $M \varepsilon \mathfrak{B}^\xi$; die Mengen $[f(\hat{x}) < y]$ sind: Λ, $E - M$, E, gehören also nach **33·4·2** zu $\mathfrak{B}^\xi$ dann und nur dann, wenn $M \varepsilon \mathfrak{B}_\xi$. Die Behauptung folgt also aus **35·2·1.**

35·2·41. *Ist* $M \subseteqq E$, *so ist, damit die charakteristische Funktion von* M *zu* $\mathfrak{C}^\xi_\xi$ *gehöre, notwendig und hinreichend, daß* $M \varepsilon \mathfrak{B}^\xi_\xi$ *sei.*

Dies folgt aus **35·2·4.**

35·2·42. *Ist* $M \subseteqq E$, *so ist, damit die charakteristische Funktion von* M *zu* $\mathfrak{C}_B$ *gehöre, notwendig und hinreichend, daß* $M \varepsilon \mathfrak{B}_B$ *sei.*

Dies folgt aus **35·2·4.**

35·2·5. *Ist f eine Treppenfunktion aus $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$, so ist für alle y: $[f(\hat{x}) = y] \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}_{\xi}$.*

Seien $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ die endlich vielen Werte von f. Da $[f(\hat{x}) = c_\nu] = [f(\hat{x}) \geq c_\nu] \cdot [f(\hat{x}) \leq c_\nu]$, ist nach **35·2·21** und **33·4·31**: $[f(\hat{x}) = c_\nu] \varepsilon \mathfrak{B}_{\xi}$; da für hinlänglich kleines $h > 0$: $[f(\hat{x}) = c_\nu] = [f(\hat{x}) > c_\nu - h] \cdot [f(\hat{x}) < c_\nu + h]$, ist nach **35·2·21** und **33·4·31**: $[f(\hat{x}) = c_\nu] \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}$. Also ist $[f(\hat{x}) = c_\nu] \varepsilon \mathfrak{B}_{\xi} \mathfrak{B}^{\xi} = \mathfrak{B}^{\xi}_{\xi}$.

35·2·6. *Ist $\xi \geq 3$, $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}$ (bzw. $f \varepsilon \mathfrak{C}_{\xi}$, $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$), so gilt auch für jede Funktion g auf E, die sich von f nur in abzählbar vielen Punkten unterscheidet: $g \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}$ (bzw. $g \varepsilon \mathfrak{C}_{\xi}$, $g \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$).*

Nach **35·2·11** ist $[f(\hat{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}$, also nach **33·4·51** auch $[g(\hat{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}$, also $g \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}$ nach **35·2·1**.

Ist es erforderlich, den bei Bildung der Systeme $\mathfrak{C}^{\xi}$, $\mathfrak{C}_{\xi}$, $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$, $\mathfrak{C}_B$ zugrunde gelegten Raum in Evidenz zu setzen, so schreiben wir ausführlicher $\mathfrak{C}^{\xi}(E)$, $\mathfrak{C}_{\xi}(E)$, $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)$, $\mathfrak{C}_B(E)$.

35·2·7. *Ist f eine Funktion auf E, ist $E = \underset{\nu}{S} E_\nu$ mit $E_\nu \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}$, und ist $E_\nu 1 f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}(E_\nu)$ $\big($bzw. $\varepsilon \mathfrak{C}_{\xi}(E_\nu)$, $\varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E_\nu)\big)$, so ist $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}(E)$ $\big($bzw. $\varepsilon \mathfrak{C}_{\xi}(E)$, $\varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)\big)$.*

Setzen wir $E_\nu 1 f = f_\nu$, so ist $[f(\hat{x}) > y] = \underset{\nu}{S} [f_\nu(\hat{x}) > y]$; hierin ist nach **35·2·11** $[f_\nu(\hat{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E_\nu)$, also nach **33·4·73** auch $[f_\nu(\hat{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E)$, und da $\mathfrak{B}^{\xi}(E)$ nach § 33 (4·3) ein σ-System, ist auch $[f(\hat{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E)$; also ist $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}(E)$ nach **35·2·1**.

35·2·71. *Ist f eine Funktion auf E, ist $E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n$ mit $E_\nu \varepsilon \mathfrak{B}_{\xi}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), und ist $E_\nu 1 f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}(E_\nu)$, $\big($bzw. $\varepsilon \mathfrak{C}_{\xi}(E_\nu)$, $\varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E_\nu)\big)$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n$, so ist $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}(E)$ $\big($bzw. $\varepsilon \mathfrak{C}_{\xi}(E)$, $\varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)\big)$.*

Setzen wir $E_\nu 1 f = f_\nu$, so ist $[f(\hat{x}) \leq y] = \overset{n}{\underset{\nu=1}{S}} [f_\nu(\hat{x}) \leq y]$; da nach **35·2·11** $[f_\nu(x) > y] \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E_\nu)$, ist hierin $[f_\nu(\hat{x}) \leq y] \varepsilon \mathfrak{B}_{\xi}(E_\nu)$, also nach **33·4·73**: $[f_\nu(\hat{x}) \leq y] \varepsilon \mathfrak{B}_{\xi}(E)$; da nach **33·4·31** $\mathfrak{B}_{\xi}(E)$ ein Ring, ist also auch $[f(\hat{x}) \leq y] \varepsilon \mathfrak{B}_{\xi}(E)$, mithin $[f(\hat{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E)$; also ist $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}(E)$ nach **35·2·1**.

35·2·72. *Ist f eine Funktion auf E, ist $E = \underset{\nu}{S} E_\nu$ mit $E_\nu \varepsilon \mathfrak{B}_B$, und ist $E_\nu 1 f \varepsilon \mathfrak{C}_B(E_\nu)$, so ist $f \varepsilon \mathfrak{C}_B(E)$.*

Die ist für $\xi = \omega_1$ enthalten in **35·2·7**.

3. Einschiebung und Erweiterung. Wir bezeichnen wieder mit $\mathfrak{C}^{\xi}$, $\mathfrak{C}_{\xi}$, $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$, $\mathfrak{C}_B$ die Systeme Bairescher Funktionen in E.

35·3·1. *Ist $g \varepsilon \mathfrak{C}_{\xi}$, $h \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}$ und $g \leq h$, so gibt es ein $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$, so daß $g \leq f \leq h$.*

Dies folgt aus **34·4·1**.

35·3·2. *Für jedes* $E' \subseteqq E$ *ist* $\mathfrak{C}^\xi(E') = (E' \, 1 \, \mathfrak{C})^\xi = E' \, 1 \, \mathfrak{C}^\xi$, $\mathfrak{C}_\xi(E') = (E' \, 1 \, \mathfrak{C})_\xi = E' \, 1 \, \mathfrak{C}_\xi$.

Nach **34·4·2** ist $\overline{\mathfrak{G}}\left((E' \, 1 \, \mathfrak{C})^\xi\right) = E' \, 1 \, \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}^\xi)$, also nach **35·2·11** und **33·4·7** $\overline{\mathfrak{G}}\left((E' 1 \mathfrak{C})^\xi\right) = E' \, 1 \, \mathfrak{B}^\xi = \mathfrak{B}^\xi(E')$; nach **34·3·1** ist also $(E' 1 \mathfrak{C})^\xi = \mathfrak{S}(\mathfrak{B}^\xi(E'), *)$, somit nach **35·2·1** $(E' \, 1 \, \mathfrak{C})^\xi = \mathfrak{C}^\xi(E')$. Und nach **34·4·21** ist $(E' \, 1 \, \mathfrak{C})^\xi = E' \, 1 \, \mathfrak{C}^\xi$.

35·3·3. *Für jedes* $E' \subseteqq E$ *ist* $\mathfrak{C}^\xi_\xi(E') = (E' \, 1 \, \mathfrak{C})^\xi_\xi \supseteqq E' \, 1 \, \mathfrak{C}^\xi_\xi$.

Dies folgt aus **35·3·2** und **34·4·211.**

35·3·31. *Ist* $E' \varepsilon \mathfrak{B}_\xi$, *so ist* $\mathfrak{C}^\xi_\xi(E') = (E' \, 1 \, \mathfrak{C})^\xi_\xi = E' \, 1 \, \mathfrak{C}^\xi_\xi$.

Ist $E' \varepsilon \mathfrak{B}_\xi$, so ist $E - E' \varepsilon \mathfrak{B}^\xi$, also nach **35·2·11**: $E - E' \varepsilon \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}^\xi) \,.\, \mathfrak{G}(\mathfrak{C}_\xi)$. Nach **34·4·22** ist also $(E' \, 1 \, \mathfrak{C})^\xi_\xi = E' \, 1 \, \mathfrak{C}^\xi_\xi$, und nach **35·3·3** ist auch $\mathfrak{C}^\xi_\xi(E') = (E' \, 1 \, \mathfrak{C})^\xi_\xi$.

35·3·4. *Für jedes* $E' \subseteqq E$ *ist* $\mathfrak{C}_B(E') = (E' \, 1 \, \mathfrak{C})_B = E' \, 1 \, \mathfrak{C}_B$.

Dies folgt aus **35·3·2.**

Literatur: G. v. Alexits, Fund. math. 15 (1930) S. 51. W. Sierpiński, Fund. math. 16 (1930) S. 81.

4. **Zusammensetzung.** Für die Zusammensetzung Bairescher Funktionen gelten folgende Sätze:

35·4·1. *Ist* $\varphi(z)$ *eine stetige Funktion im* $\overline{R}_1$ *und* $f \varepsilon \mathfrak{C}^\xi_\xi(E)$, *so ist auch* $\varphi(f) \varepsilon \mathfrak{C}^\xi_\xi(E)$.

Nach **35·1·4** ist $\mathfrak{C}^\xi_\xi(E)$ symmetrisch und völlig autark; nach **31·3·23** ist also $(\mathfrak{C}^\xi_\xi(E))^1_1 = \mathfrak{C}^\xi_\xi(E)$; die Behauptung folgt also aus **31·3·6.**

35·4·2. *Ist* ζ *endlich,* $\varphi(z) \varepsilon \mathfrak{C}^\zeta(\overline{R}_1)$ (*bzw.* $\varphi(z) \varepsilon \mathfrak{C}_\zeta(\overline{R}_1)$) *und* $f \varepsilon \mathfrak{C}^\xi_\xi(E)$, *so ist* $\varphi(f) \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi+\zeta-1}(E)$ (*bzw.* $\varphi(f) \varepsilon \mathfrak{C}_{\xi+\zeta-1}(E)$).

Die Behauptung ist richtig für $\zeta = 1$; denn ist $\varphi(z) \varepsilon \mathfrak{C}^1(\overline{R}_1)$, so ist $\varphi = \lim\limits_n \varphi_n$, wo φ_n stetig im $\overline{R}_1$ und $\varphi_n \leq \varphi_{n-1}$; dann gilt auch $\varphi(f) = \lim\limits_n \varphi_n(f)$, $\varphi_n(f) \leq \varphi_{n-1}(f)$, und da nach **35·4·1** $\varphi_n(f) \varepsilon \mathfrak{C}^\xi_\xi(E)$, ist $\varphi(f) \varepsilon (\mathfrak{C}^\xi_\xi)^1$, also nach **35·1·5** $\varphi(f) \varepsilon \mathfrak{C}^\xi(E)$. Angenommen, die Behauptung gelte für ζ; wir haben zu zeigen, daß sie dann auch für $\zeta + 1$ gilt; sei also $\varphi \varepsilon \mathfrak{C}^{\zeta+1}(\overline{R}_1)$; dann ist $\varphi = \lim\limits_n \varphi_n$, wo $\varphi_n \varepsilon \mathfrak{C}_\zeta(\overline{R}_1)$ und $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$; dann gilt auch $\varphi(f) = \lim\limits_n \varphi_n(f)$, $\varphi_n(f) \leq \varphi_{n+1}(f)$, und da nach Annahme $\varphi_n(f) \varepsilon \mathfrak{C}_{\xi+\zeta-1}(E)$, ist $\varphi_n(f) \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi+\zeta}(E)$.

35·4·21. *Ist* $\varphi(z) \varepsilon \mathfrak{C}^\zeta(\overline{R}_1)$ (*bzw.* $\varphi(z) \varepsilon \mathfrak{C}_\zeta(\overline{R}_1)$) *und* $f \varepsilon \mathfrak{C}^\xi_\xi(E)$, *so ist* (*für alle* ζ): $\varphi(f) \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi+\zeta}(E)$ (*bzw.* $\varphi(f) \varepsilon \mathfrak{C}_{\xi+\zeta}(E)$).

Nach **35·4·2** ist die Behauptung richtig für $\zeta < \omega$. Angenommen, sie sei richtig für alle $\eta < \zeta$; ist dann $\varphi \varepsilon \mathfrak{C}^\zeta(\overline{R}_1)$, so ist nach **35·1·11** $\varphi = \lim\limits_n \varphi_n$,

wo $\varphi_n \varepsilon \mathfrak{C}_{\eta_n}(R_1)$ $(\eta_n < \zeta)$ und $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$; da $\varphi(f) = \lim\limits_n \varphi_n(f)$, $\varphi_n(f) \leq \varphi_{n+1}(f)$, und da nach Annahme $\varphi_n(f) \varepsilon \mathfrak{C}_{\xi+\eta_n}(E)$ $(\xi + \eta_n < \xi + \zeta)$, ist $\varphi(f) \varepsilon (\underset{\eta < \xi+\zeta}{S} \mathfrak{C}_{\eta}(E))^1$, d. h. nach **35·1·11** $\varphi(f) \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi+\zeta}(E)$.

35·4·3. *Ist* $\varphi(z) \varepsilon \mathfrak{C}_{\zeta}^{\zeta}(R_1)$ *und* $f \varepsilon \mathfrak{C}_{\xi}^{\xi}(E)$, *so ist* $\varphi(f) \varepsilon \mathfrak{C}_{\xi+\zeta}^{\xi+\zeta}(E)$ *und, wenn* ζ *endlich, auch* $\varphi(f) \varepsilon \mathfrak{C}_{\xi+\zeta-1}^{\xi+\zeta-1}(E)$.

Dies folgt aus **35·4·21** und **35·4·2.**

35·4·31. *Ist* φ *eine Bairesche Funktion im* $\overline{R}_1$, *und* f *eine Bairesche Funktion in* E, *so ist auch* $\varphi(f)$ *eine Bairesche Funktion in* E.

Dies folgt aus **35·4·3.**

5. Stetigkeitseigenschaften der Baireschen Funktionen. Sei E ein metrischer Raum, und seien f und f_ν Funktionen auf E; dann gilt:

35·5·1. *Ist* $f = \lim\limits_\nu f_\nu$, *und ist* f_ν *stetig bis auf eine Menge erster Kategorie, so ist auch* f *stetig bis auf eine Menge erster Kategorie.*

Nach Annahme gibt es eine Menge erster Kategorie C_ν, so daß $(E - C_\nu) \mathbin{1} f_\nu$ stetig. Setzen wir $C = \underset{\nu}{S}\, C_\nu$, so ist nach **19·4·2** auch C von erster Kategorie, und es ist auch $(E - C) \mathbin{1} f_\nu$ stetig. Nach **28·8·11** ist die Menge B aller Punkte ungleichmäßiger Konvergenz von $((E - C \mathbin{1} f_\nu))$ von erster Kategorie in $E - C$, also nach **19·4·3** auch in E. Nach **28·3·2** ist $(E - (B + C)) \mathbin{1} f$ stetig, und nach **19·4·2** ist $B + C$ von erster Kategorie.

35·5·2. *Jede Bairesche Funktion in* E *ist stetig bis auf eine Menge erster Kategorie.*

Dies folgt aus **35·5·1** und **35·1·7.**

35·5·21. *Ist* f *eine Bairesche Funktion in* E *und* $A \subseteqq E$, *so ist* $A \mathbin{1} f$ *stetig bis auf eine Menge erster Kategorie.*

Nach **35·3·4** ist $A \mathbin{1} f$ eine Bairesche Funktion in A; die Behauptung folgt also aus **35·5·2.**

35·5·22. *Ist* E *eine Youngsche Menge,* A *ein* G_δ *in* E *und* f *eine Bairesche Funktion in* E, *so ist* $A \mathbin{1} f$ *punktweise unstetig bei Vernachlässigung von Mengen erster Kategorie.*

Nach **35·5·21** ist $A \mathbin{1} f$ stetig bis auf eine Menge erster Kategorie. Nach **19·1·2** ist A eine Youngsche Menge, so daß in **27·4·9** unter den $\mathfrak{M}$-Mengen die Mengen erster Kategorie in A verstanden werden können; die Behauptung folgt also aus **27·4·9.**

Wir werden in § 41, 1 sehen, daß die Umkehrung von **35·5·21** und **35·5·22** nicht gilt.

35·5·3. *Damit $f = \lim\limits_n f_n$ sei, wo die Unstetigkeitspunkte von f_n eine Menge erster Kategorie bilden, ist notwendig und hinreichend, daß f stetig sei bis auf eine Menge erster Kategorie.*

Notwendig: Bilden die Unstetigkeitspunkte von f_n eine Menge erster Kategorie, so ist f_n stetig bis auf eine Menge erster Kategorie, und die Behauptung folgt aus **35·5·1**. Hinreichend: Nach Annahme gibt es eine Menge B erster Kategorie, so daß $(E - B) \rceil f$ stetig; da B von erster Kategorie, ist $B = \underset{n}{S}\, B_n$, wo B_n nirgends dicht; indem wir B_n ersetzen durch $B_1 + B_2 + \ldots + B_n$, können wir noch annehmen: $B_n \subseteqq B_{n+1}$. Nach **11·2·12** ist auch B_n^0 nirgends dicht; setzen wir $C = \underset{n}{S}\, B_n^0$, so ist also auch C von erster Kategorie. Wir zerlegen nun nach § 19, 5: $E = E_{II\,i} + (E - E_{II\,i})$; dann ist $E = (E_{II\,i} - C) + E_{II\,i}\,(C - B_n^0) + E_{II\,i}\,B_n^0 + (E - E_{II\,i})$. Hierin ist $E_{II\,i} - C$ dicht in $E_{II\,i}$; denn anderenfalls gäbe es nach **11·1·8** eine (in $E_{II\,i}$, also auch in E) offene Menge G, so daß $\Lambda \subset G \subseteqq E_{II\,i}$ und $(E_{II\,i} - C)G = \Lambda$; dann aber wäre $\Lambda \subset G \subseteqq C$, also wäre G von erster Kategorie, im Widerspruche mit **19·5·2**. Wir setzen nun $(E_{II\,i} - C) \rceil f = g$; dann ist g stetig; da $E_{II\,i} - C$ dicht in $E_{II\,i}$, also nach **11·3·1** $E_{II\,i} \subseteqq (E_{II\,i} - C)^0$, ist die obere Schrankenfunktion (§ 26, 2) $\bar{g}$ von g definiert in allen Punkten von $E_{II\,i}$. Wir definieren nun eine Funktion f_n auf E durch: $f_n = f$ auf $(E_{II\,i} - C) + E_{II\,i}\,B_n^0 + (E - E_{II\,i})$, $f_n = \bar{g}$ auf $E_{II\,i}\,(C - B_n^0)$. Ist $a \,\varepsilon\, E$, so ist, wegen $C = \underset{n}{S}\, B_n^0$, $B_n^0 \subseteqq B_{n+1}^0$, für fast alle n: $a \sim\varepsilon\, C - B_n^0$, also gilt $f_n(a) = f(a)$ für fast alle n; also gilt auf ganz E: $\lim\limits_n f_n = f$. Es ist also nur mehr zu zeigen, daß die Unstetigkeitspunkte von f_n eine Menge erster Kategorie bilden. Da C von erster Kategorie und nach **19·5·83** $E - E_{II\,i}$ von erster Kategorie, genügt es, zu zeigen: f_n ist stetig in jedem Punkte von $E_{II\,i} - C$. Sei $a \,\varepsilon\, E_{II\,i} - C$; da $E_{II\,i} - B_n^0$ offen und $g = (E_{II\,i} - C) \rceil f$ stetig, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U_a \subseteqq E_{II\,i} - B_n^0$, so daß:

$$\|g(x) - g(a)\| < \varepsilon \text{ für alle } x \,\varepsilon\, (E_{II\,i} - C)\, U_a; \tag{5}$$

dann ist, da $E_{II\,i} - C$ dicht in $E_{II\,i}$, also $(E_{II\,i} - C)\, U_a$ nach **11·3·8** dicht in U_a:

$$\|\bar{g}(x) - g(a)\| \leqq \varepsilon \text{ für alle } x \,\varepsilon\, U_a; \tag{5·1}$$

nach Definition von f_n ist $f_n(x) = f(x) = g(x)$ für alle $x \,\varepsilon\, U_a - C$, insbesondere also $f_n(a) = g(a)$, und wegen $U_a \subseteqq E_{II\,i} - B_n^0$ ist $f_n(x) = \bar{g}(x)$ für alle $x \,\varepsilon\, U_a C$; aus (5) und (5·1) folgt also: $\|f_n(x) - f_n(a)\| \leqq \varepsilon$ für alle $x \,\varepsilon\, U_a$, d. h. f_n ist stetig in a, w. z. b. w.

35·5·31. *Ist f eine Bairesche Funktion in E, so ist $f = \lim\limits_n f_n$, wo die Unstetigkeitspunkte von f_n eine Menge erster Kategorie in E bilden.*

Dies folgt aus **35·5·2** und **35·5·3**.

35·5·32. *Ist f eine Bairesche Funktion in der Youngschen Menge E, so ist $f = \lim_n f_n$, wo f_n punktweise unstetig.*

Dies folgt aus **35·5·31** und **26·5·23**.

Literatur: R. Baire, Acta math. 30 (1906) S. 27; C. Kuratowski, Fund. math. 5 (1924) S. 75.

6. **Näherungseigenschaften.** Sei E ein metrischer Raum, $A \subseteqq E$, f eine Funktion auf A, und ϱ eine positive Zahl: dann sagen wir: f ist mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion, wenn es eine Funktion $g \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(A)$ gibt, so daß $\|f(x) - g(x)\| \leq \varrho$ für alle $x \varepsilon A$. Ist dann $A' \subseteqq A$, so ist nach **35·3·8** auch $A' \mathbin{1} f$ mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion.

35·6·1. *Ist f eine Funktion auf E, und ist f für jedes $\varrho > 0$ mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion, so ist $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)$.*

Nach Annahme gibt es ein $g_n \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)$, so daß $\|g_n(x) - f(x)\| \leq \frac{1}{n}$ für alle $x \varepsilon E$. Da $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)$ nach **35·1·4** geschlossen (§ 30, 4), ist auch $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)$.

35·6·2. *Ist f eine Funktion auf E, ist $E = \underset{\nu}{S} A_\nu$, wo $A_\nu \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}_{\xi}(E)$, und ist $A_\nu \mathbin{1} f$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion, so ist auch f mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion.*

Da nach **33·4·32** $\mathfrak{B}^{\xi}_{\xi}(E)$ ein Körper, können wir wegen **3·3·11** ohne weiteres annehmen, die A_ν seien disjunkt. Nach Annahme gibt es eine Funktion $g_\nu \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(A_\nu)$, so daß $\|g_\nu(x) - f(x)\| \leq \varrho$ für alle $x \varepsilon A_\nu$. Definieren wir eine Funktion g auf E durch: $g = g_\nu$ auf A_ν, so ist $\|g(x) - f(x)\| \leq \varrho$ für alle $x \varepsilon E$, und da $A_\nu \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}_{\xi}(E) \subseteqq \mathfrak{B}^{\xi}(E)$, ist nach **35·2·7** $g \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)$.

35·6·21. *Ist f eine Funktion auf E und gibt es für jedes $\varrho > 0$ eine Darstellung $E = \underset{\nu}{S} A_\nu$ mit $A_\nu \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}_{\xi}(E)$, so daß $A_\nu \mathbin{1} f$ mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion, so ist $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)$.*

Dies folgt aus **35·6·2** und **35·6·1**.

35·6·3. *Ist $\xi > 1$, so ist, damit $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)$ sei, notwendig und hinreichend, daß es für jedes $\varrho > 0$ endlich viele Mengen $A_{\varrho\nu} \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}_{\xi}(E)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n_\varrho)$ und endlich viele endliche Zahlen c_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n_\varrho)$ gebe, so daß $E = \overset{n_\varrho}{\underset{\nu=1}{S}} A_{\varrho\nu}$ und $\|f(x) - c_\nu\| \leq \varrho$ für alle $x \varepsilon A_{\varrho\nu}$.*

Notwendig: Ist $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)$, so gibt es nach **34·4·31** eine Treppenfunktion $g_\varrho \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)$, so daß $\|f(x) - g_\varrho(x)\| \leq \varrho$ für alle $x \varepsilon E$; seien $c_1, c_2, \ldots, c_{n_\varrho}$ die endlich vielen Werte, die g_ϱ annimmt, und sei $A_{\varrho\nu} = [g_\varrho(\hat{x}) = c_\nu]$; dann ist nach **35·2·5**: $A_{\varrho\nu} \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}_{\xi}(E)$, $E = \overset{n_\varrho}{\underset{\nu=1}{S}} A_{\varrho\nu}$, $\|f(x) - c_\nu\| \leq \varrho$ für

alle $x \varepsilon A_{\varrho\nu}$. Hinreichend: Da jede Konstante eine $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion ist, folgt dies aus **35·6·21.**

35·6·4. *Ist $\xi \geq 1$, so ist, damit $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)$ sei, notwendig und hinreichend, daß es für jedes $\varrho > 0$ eine Folge von Mengen $A_{\varrho\nu} \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ und eine Folge von Zahlen c_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ gebe, so daß $E = \underset{\nu}{S} A_{\varrho\nu}$ und $\| f(x) - c_\nu \| < \varrho$ für alle $x \varepsilon A_{\varrho\nu}$.*

Notwendig: Man wähle die c_ν so, daß es zu jedem $y \varepsilon \ddot{R}_1$ ein c_ν mit $\| y - c_\nu \| < \varrho$ gibt; da, wenn S die Schränkungstransformation bedeutet, nach **35·1·4** auch $S(f) \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)$, ist nach **35·2·2** $[S(f(\hat{x})) < S(c_\nu) + \varrho] \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E)$, $[S(f(\hat{x})) > S(c_\nu) - \varrho] \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E)$, also, wenn $[S(f(\hat{x})) < S(c_\nu) + \varrho] \cdot [S(f(\hat{x})) > S(c_\nu) - \varrho] = A_{\varrho\nu}$ gesetzt wird, auch $A_{\varrho\nu} \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E)$. Diese Mengen $A_{\varrho\nu}$ leisten das Verlangte. Hinreichend: Setzen wir $\varrho = \frac{1}{n}$, so erhalten wir nach Voraussetzung eine Folge von Mengen $A_{\frac{1}{n}\nu} \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E)$, so daß $E = \underset{\nu}{S} A_{\frac{1}{n}\nu}$ und $\| f(x) - f(x') \| < \frac{2}{n}$ für $x \varepsilon A_{\frac{1}{n}\nu}$, $x' \varepsilon A_{\frac{1}{n}\nu}$. Sei $x \varepsilon [f(\hat{x}) > y]$, d. h. $f(x) > y$; wir wählen n so, daß $\frac{2}{n} < \| f(x) - y \|$; es gibt ein ν^*, so daß $x \varepsilon A_{\frac{1}{n}\nu^*}$, und da $\| f(x) - f(x') \| < \frac{2}{n}$ für alle $x' \varepsilon A_{\frac{1}{n}\nu^*}$, ist $f(x') > y$ für alle $x' \varepsilon A_{\frac{1}{n}\nu^*}$, also $A_{\frac{1}{n}\nu^*} \subseteqq [f(\hat{x}) > y]$. Zu jedem $x \varepsilon [f(\hat{x}) > y]$ gibt es also eine Menge $A_{\frac{1}{n}\nu}$, die $\subseteqq [f(\hat{x}) > y]$ ist. Also ist $[f(\hat{x}) > y]$ Summe abzählbar vieler Mengen $A_{\frac{1}{n}\nu}$, und wegen $A_{\frac{1}{n}\nu} \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E)$ ist auch $[f(\hat{x}) > y]$ $\varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E)$. Ebenso sieht man, daß $[f(\hat{x}) < y] \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E)$; also ist $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)$ nach **35·2·2**.

7. **Verhalten in einem Punkte.** Sei E ein metrischer Raum, $A \subseteqq E$, f eine Funktion auf A, und ϱ eine positive Zahl; dann sagen wir: f ist im Punkte $a \varepsilon A$ mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion, wenn es eine Umgebung U_a gibt, so daß $U_a A \rceil f$ mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion ist. Wir sagen: f ist im Punkte $a \varepsilon A$ eine $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion, wenn f für jedes $\varrho > 0$ im Punkte a mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion ist.

35·7·1. *Damit die Funktion f auf E im Punkte a eine $\mathfrak{C}^{1}_{1}$-Funktion sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie stetig in a sei.*

Notwendig: Nach Annahme gibt es zu jedem $\varrho > 0$ eine Umgebung U_a und eine Funktion $g \varepsilon \mathfrak{C}^{1}_{1}(U_a)$ (d. h. eine stetige Funktion auf U_a), so daß $\| f(x) - g(x) \| \leq \varrho$ für alle $x \varepsilon U_a$; da g stetig, gibt es eine Umgebung $U'_a \subseteqq U_a$, so daß $\| g(x) - g(a) \| < \varrho$ für alle $x \varepsilon U'_a$; für alle

$x \varepsilon U'_a$ ist dann auch: $\| f(x) - f(a) \| \le \| f(x) - g(x) \| + \| g(x) - g(a) \| + \| g(a) - f(a) \| < 3\varrho$, d. h. f ist stetig in a. Hinreichend: Ist f stetig in a, so gibt es eine Umgebung U_a, so daß $\| f(x) - f(a) \| < \varrho$ für $x \varepsilon U_a$; setzen wir $g(x) = f(a)$ für alle $x \varepsilon U_a$, so ist $g(x) \varepsilon \mathfrak{C}^1_1 (U_a)$ und $\| f(x) - g(x) \| < \varrho$ für alle $x \varepsilon U_a$.

Ist $f \varepsilon \mathfrak{C}^\xi_\xi (E)$, so ist offenbar f eine $\mathfrak{C}^\xi_\xi$-Funktion in jedem Punkte von E. Umgekehrt gilt:

35·7·2. *Ist $\xi > 1$, ist f eine Funktion im separablen Raume E und ist f in jedem Punkte von E mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^\xi_\xi$-Funktion, so ist f mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^\xi_\xi$-Funktion*[1]).

Nach Annahme gibt es zu jedem $\varrho > 0$ und jedem $a \varepsilon$ ~ eine Umgebung U_a und eine Funktion $g_a \varepsilon \mathfrak{C}^\xi_\xi (U_a)$, so daß $\| f(x) - g_a(x) \| \le \varrho$ für $x \varepsilon U_a$; nach **13·3·1** gibt es unter diesen U_a abzählbar viele: U_{a_ν} $(\nu = 1, 2, \ldots)$, so daß $E = \underset{\nu}{S}\, U_{a_\nu}$; weil U_a offen, ist $U_a \varepsilon \mathfrak{B}^1 (E)$, also wegen $\xi > 1$ auch $U_a \varepsilon \mathfrak{B}^\xi_\xi (E)$; nun folgt die Behauptung aus **35·6·2.**

35·7·21. *Ist f eine Funktion im separablen Raume E, und ist f eine $\mathfrak{C}^\xi_\xi$-Funktion in jedem Punkte von E, so ist $f \varepsilon \mathfrak{C}^\xi_\xi (E)$.*

Dies folgt für $\xi = 1$ aus **35·7·1**, für $\xi > 1$ aus **35·7·2** und **35·6·1.**

35·7·3. *Ist f eine Funktion auf E, so ist die Menge G_ϱ aller $a \varepsilon E$, in denen f mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^\xi_\xi$-Funktion ist, offen in E.*

Ist $a \varepsilon G_\varrho$, so gibt es eine Umgebung U_a und eine Funktion $g \varepsilon \mathfrak{C}^\xi_\xi (U_a)$, so daß $\| f(x) - g(x) \| \le \varrho$ für $x \varepsilon U_a$; da U_a für jedes $x \varepsilon U_a$ auch eine Umgebung U_x ist, ist f auch in jedem Punkte $x \varepsilon U_a$ mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^\xi_\xi$-Funktion, also ist $U_a \subseteq G_\varrho$, d. h. G_ϱ ist offen.

Sei f eine Funktion auf E und P_ϱ die Menge aller $a \varepsilon E$, in denen f nicht mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^\xi_\xi$-Funktion ist. Dann gelten die Sätze[2]):

35·7·31. *Ist $\xi > 1$, ist E separabel und $P_\varrho \supset \Lambda$, so ist die Funktion $P_\varrho \,1\, f$ in keinem Punkte von P_ϱ mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^\xi_\xi$-Funktion.*

Angenommen, $P_\varrho \,1\, f$ sei im Punkte $b \varepsilon P_\varrho$ mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^\xi_\xi$-Funktion; dann gibt es eine Umgebung U_b, so daß $(U_b P_\varrho) \,1\, f$ mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^\xi_\xi$-Funktion. Da f in jedem Punkte $x \varepsilon U_b - P_\varrho$ mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^\xi_\xi$-Funktion ist, ist nach **35·7·2** $(U_b - P_\varrho) \,1\, f$ mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^\xi_\xi$-Funktion. Nach **35·7·3** ist $P_\varrho = E - G_\varrho$ abgeschlossen, also $U_b - P_\varrho$ ebenso wie U_b offen; wegen $\xi > 1$ ist also $U_b - P_\varrho \varepsilon \mathfrak{B}^\xi_\xi (E)$, und wegen $U_b \varepsilon \mathfrak{B}^\xi_\xi (E)$, $P_\varrho \varepsilon \mathfrak{B}^\xi_\xi (E)$ ist auch

---

[1]) Der Satz ist auch für $\xi = 1$ richtig, wie aus **36·3·3** folgt.

[2]) Für $\xi = 1$ gelten die Sätze **35·7·31**, **35·7·32**, **35·7·4** nicht.

$U_b P_\varrho \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}_{\xi}(E)$; nach **35·6·2** ist also $U_b \mid f$ mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion, d. h. f ist im Punkte $b \varepsilon P_\varrho$ mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion. Das aber widerspricht der Definition von P_ϱ.

35·7·32. *Ist $\xi > 1$ und ist E separabel, so ist P_ϱ perfekt.*

Nach **35·7·3** ist P_ϱ abgeschlossen. In einem isolierten Punkte von P_ϱ wäre $P_\varrho \mid f$ stetig, also nach **35·7·1** eine $\mathfrak{C}^1_1$-Funktion, also auch eine $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion, entgegen **35·7·31.**

35·7·4. *Ist $\xi > 1$, und ist f eine Funktion im separablen Raume E, so ist, damit $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)$ sei, notwendig und hinreichend, daß es in jeder in E perfekten Menge $P \supset \Lambda$ einen Punkt gebe, in dem $P \mid f$ eine $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion ist.*

Notwendig: Ist $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)$, so ist nach **35·3·3** $P \mid f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(P)$, mithin ist $P \mid f$ in jedem Punkte von P eine $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion. Hinreichend: Ist $f \sim \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)$, so gibt es nach **35·6·1** ein $\varrho > 0$, so daß f nicht mit der Annäherung ϱ eine $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion ist; nach **35·7·2** ist dann $P_\varrho \supset \Lambda$; nach **35·7·32** ist P_ϱ perfekt, und nach **35·7·31** ist $P_\varrho \mid f$ in keinem Punkte von P_ϱ eine $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion.

Für $\xi = 2$ wird **35·7·4** ergänzt durch **37·1·2.**

Literatur zu Nr. 6 und 7: H. Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 170ff.

8. **Existenzsatz.** Wir sagen, die Funktion f auf E sei genau eine $\mathfrak{C}^{\xi}$-Funktion (bzw. $\mathfrak{C}_{\xi}$-Funktion), wenn $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}(E)$ und $f \sim \varepsilon \mathfrak{C}_{\xi}(E)$ (bzw. wenn $f \varepsilon \mathfrak{C}_{\xi}(E)$ und $f \sim \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}(E)$); wir sagen, f sei genau eine $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion, wenn $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)$ und $f \sim \varepsilon \mathfrak{C}^{\eta}(E) + \mathfrak{C}_{\eta}(E)$ für alle $\eta < \xi$. Wegen **34·1·51** und § 34 (1·3) kann es eine Funktion, die genau eine $\mathfrak{C}^{\xi}$- oder $\mathfrak{C}_{\xi}$- oder $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion ist, nur für $\xi < \omega_1$ geben.

35·8·1. *Ist E ein Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern $\supset \Lambda$ ist, und ist $\xi < \omega_1$, so gibt es eine Funktion f auf E, die genau eine $\mathfrak{C}^{\xi}$ (eine $\mathfrak{C}_{\xi}$-, eine $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-) Funktion ist.*

Dies folgt aus **33·9·3** und **35·2·4, 35·2·41.**

Literatur: H. Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 205ff. Ch. J. de la Valleé-Poussin, Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensemble, Classes de Baire S. 145ff. E. Szpilrajn, Fund. math. 15 (1930) S. 212; G. Poprougénko, Fund. math. 15 (1930) S. 284.

9. **Die eine Funktion darstellende Menge.** Sei E ein metrischer Raum, $f(x)$ eine Funktion auf E. Wir betrachten den Produktraum $E \times \overline{R}_1$ der Punkte (x, y), wo $x \varepsilon E$, $y \varepsilon \overline{R}_1$. Wir bezeichnen mit $[f(\acute{x}) > \acute{y}]$ die Menge aller $(x, y) \varepsilon E \times \overline{R}_1$, für die $f(x) > y$ ist; analog ist die Bedeutung von $[f(\acute{x}) < \acute{y}]$, $[f(\acute{x}) \geq \acute{y}]$, $[f(\acute{x}) \leq \acute{y}]$, $[f(\acute{x}) = \acute{y}]$, $[f(\acute{x}) < g(\acute{y})]$ usf. Die

Menge $[f(\hat{x}) = \hat{y}]$ nennen wir die die Funktion f darstellende Menge. Wir wollen nun die die Baireschen Funktionen darstellenden Mengen betrachten. Wir schicken folgenden Hilfssatz voraus:

35·9·1. *Ist $h(x) \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}(E)$ (bzw. $h(x) \varepsilon \mathfrak{C}_{\xi}(E)$, bzw. $h(x) \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)$) und ist $h(x, y)$ diejenige Funktion in $E \times \overline{R}_1$, die jedem Punkte $(x, y) \varepsilon E \times \overline{R}_1$ den Funktionswert $h(x)$ zuordnet, so ist $h(x, y) \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}(E \times \overline{R}_1)$ (bzw. $h(x, y) \varepsilon \mathfrak{C}_{\xi}(E \times \overline{R}_1)$, bzw. $h(x, y) \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E \times \overline{R}_1)$).*

Ist $h(x)$ stetig, so offenbar auch $h(x, y)$: von hier aus beweist man die Behauptung ohne Schwierigkeit durch transfinite Induktion.

35·9·2. *Ist f eine Funktion auf E, so ist, damit $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}(E)$ (bzw. $f \varepsilon \mathfrak{C}_{\xi}(E)$) sei, notwendig und hinreichend, daß $[f(\hat{x}) > \hat{y}] \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E \times \overline{R}_1)$ (bzw. $[f(\hat{x}) < \hat{y}] \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E \times \overline{R}_1)$) sei.*

Notwendig: Bedeutet S die Schränkungstransformation, so ist $[f(\hat{x}) > \hat{y}] = [S(f(\hat{x})) > S(\hat{y})]$. Setzen wir $S(f(x)) - S(y) = g(x, y)$, so ist daher auch $[f(\hat{x}) > \hat{y}] = [g(\hat{x}, \hat{y}) > 0]$. Fassen wir $S(f(x))$ und $-S(y)$ auf als diejenigen Funktionen in $E \times \overline{R}_1$, die dem Punkte $(x, y) \varepsilon E \times \overline{R}_1$ den Funktionswert $S(f(x))$ bzw. $-S(y)$ zuordnen, so ist nach **35·1·2** und **35·9·1** $S(f(x)) \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}(E \times \overline{R}_1)$ und $-S(y)$ ist eine stetige Funktion in $E \times \overline{R}_1$, also ebenfalls $-S(y) \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}(E \times \overline{R}_1)$. Nach **35·1·2** ist also auch $S(f(x)) - S(y) \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}(E \times \overline{R}_1)$, somit nach **35·2·1** $[g(\hat{x}, \hat{y}) > 0] \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E \times \overline{R}_1)$, d. h. $[f(\hat{x}) > \hat{y}] \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E \times \overline{R}_1)$. Hinreichend: Sei $[f(\hat{x}) > \hat{y}] = M$; nach Annahme ist $M \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E \times \overline{R}_1)$. Für jedes $z \varepsilon R_1$ besteht die Schicht $M^{(1)}_z$ von M (§ 20, 4) aus allen $x \varepsilon E$ mit $f(x) > z$, d. h. es ist $M^{(1)}_z = [f(\hat{x}) > z]$; nach **33·7·1** ist $M^{(1)}_z \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E)$; also ist $[f(\hat{x}) > z] \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E)$ für alle $z \varepsilon R_1$; nach **35·2·1** ist somit $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}(E)$.

35·9·21. *Ist f eine Funktion auf E, so ist, damit $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)$ sei, notwendig und hinreichend, daß $[f(\hat{x}) > \hat{y}] \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E \times \overline{R}_1)$ und $[f(\hat{x}) < \hat{y}] \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}(E \times \overline{R}_1)$ sei.*

Dies folgt unmittelbar aus **35·9·2**.

35·9·3. *Ist $f \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}(E)$, so ist $[f(\hat{x}) = \hat{y}] \varepsilon \mathfrak{B}_{\xi}(E \times \overline{R}_1)$.*

Denn $[f(\hat{x}) = \hat{y}] = [f(\hat{x}) \leq \hat{y}] \cdot [f(\hat{x}) \geq \hat{y}]$, und aus **35·9·21** folgt durch Komplementbildung nach **33·4·2**:

$$[f(\hat{x}) \leq \hat{y}] \varepsilon \mathfrak{B}_{\xi}(E \times \overline{R}_1), \quad [f(\hat{x}) \geq \hat{y}] \varepsilon \mathfrak{B}_{\xi}(E \times \overline{R}_1).$$

Um zu beweisen, daß für $\xi = 1$ hiervon auch die Umkehrung gilt, zeigen wir zunächst:

35·9·4. *Ist P eine eindeutige Abbildung von E auf eine Punktmenge des metrischen Raumes E', so ist, damit P stetig sei, notwendig und,*

wenn E' in sich kompakt ist, auch hinreichend, daß die Menge M aller Punkte $(x, P(x))$ $(x \varepsilon E)$ von $E \times E'$ abgeschlossen sei in $E \times E'$.

Notwendig: Sei $(x, y) \varepsilon M^0$; wir haben zu zeigen: $(x, y) \varepsilon M$. Nach 17·3·6 gibt es in M eine Folge von Punkten (x_n, y_n), so daß $(x_n, y_n) \to (x, y)$; wegen $(x_n, y_n) \varepsilon M$ ist $y_n = P(x_n)$, und nach 20·1·1 gilt somit: $x_n \to x$, $P(x_n) \to y$; weil P stetig, gilt aber nach 23·1·21: $P(x_n) \to P(x)$, also ist $y = P(x)$, mithin $(x, y) \varepsilon M$. Hinreichend: Sei $x \varepsilon E$, $x_n \varepsilon E$ und $x_n \to x$; setzen wir $y_n = P(x_n)$, so ist $(x_n, y_n) \varepsilon M$. Sei y ein Häufungspunkt von $((y_n))$ in E'; nach 17·3·53 gibt es in $((y_n))$ eine Teilfolge $((y_{n_\nu}))$ mit $y_{n_\nu} \to y$. Nach 20·1·1 gilt dann $\lim\limits_{\nu} (x_{n_\nu}, y_{n_\nu}) = (x, y)$; und da M abgeschlossen und $(x_{n_\nu}, y_{n_\nu}) \varepsilon M$, ist auch $(x, y) \varepsilon M$, d. h. es ist $y = P(x)$. Die Folge $((y_n))$ hat also den einzigen Häufungspunkt $P(x)$, nach 17·3·4 gilt also $y_n \to P(x)$, d. h. $P(x_n) \to P(x)$, also ist P stetig nach 23·1·21.

Für $E' = \overline{R}_1$ erhalten wir aus 35·9·4, folgenden Satz, der die Umkehrung von 35·9·3 für $\xi = 1$ enthält:

35·9·41. *Ist f eine Funktion auf E, so ist, damit f stetig sei, notwendig und hinreichend, daß die Menge $[f(\acute{x}) = \acute{y}]$ abgeschlossen in $E \times \overline{R}_1$ sei.*

Wir kommen auf die eine Funktion f darstellende Menge $[f(\acute{x}) = \acute{y}]$ in § 43, 2 zurück; dort werden wir auch sehen, daß für $\xi > 1$ die Umkehrung von 35·9·3 nicht gilt.

Literatur: W. Sierpiński, Fund. math. 2 (1921) S. 74. A. Lindenbaum, Ann. soc. Pol. 10 (1931).

§ 36. Halbstetige Funktionen.

1. **Halbstetigkeit in einem Punkte.** Sei E ein metrischer Raum, $A \subseteqq E$ und f eine Funktion auf A. Anschließend an 25·6·1 definieren wir: f heißt oberhalb (bzw. unterhalb) stetig[1]) im Punkte $a \varepsilon A$, wenn für jede Folge $((a_n))$ aus a mit $a_n \to a$ gilt: $\overline{\lim\limits_{n}} f(a_n) \leq f(a)$ (bzw. $\underline{\lim\limits_{n}} f(a_n) \geq f(a)$). Ist f oberhalb (bzw. unterhalb) stetig in a, so auch $S(f)$, wo S die Schränkungstransformation (§ 25, 2) bedeutet.

[1]) Die Aussage: „die Funktion f ist oberhalb (unterhalb) stetig im Punkte a" besagt demnach keineswegs, daß die eindeutige Abbildung, die jedem Punkte $x \varepsilon A$ den Punkt $f(x) \varepsilon \overline{R}_1$ zuordnet, oberhalb (unterhalb) stetig ist im Sinne von § 21. Vielmehr ist nach 23·1·1 diese Abbildung dann und nur dann oberhalb (unterhalb) stetig im Punkte a, wenn die Funktion f stetig ist im Punkte a.

36·1·1. *Damit f oberhalb (bzw. unterhalb) stetig sei im Punkte $a \varepsilon A$, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem $y > f(a)$ (bzw. zu jedem $y < f(a)$) eine Umgebung U_a gebe, so daß $f(x) < y$ (bzw. $f(x) > y$) für alle $x \varepsilon A\,U_a$.*

Notwendig: Ist y eine Zahl $> f(a)$, zu der es keine solche Umgebung gibt, so gibt es ein $a_n \varepsilon A\,K_{a\frac{1}{n}}$ mit $f(a_n) \geq y$; dann ist $a_n \to a$, $\overline{\lim\limits_n} f(a_n) \geq y > f(a)$; also ist f nicht oberhalb stetig in a. Hinreichend: Ist $((a_n))$ eine Folge aus A mit $a_n \to a$, so gilt $a_n \varepsilon U_a$ für fast alle n, also $f(a_n) < y$ für fast alle n, also $\overline{\lim\limits_n} f(a_n) \leq y$. Da dies für jedes $y > f(a)$ gilt, ist $\overline{\lim\limits_n} f(a_n) \leq f(a)$.

Als Analogon zu **26·2·4** erhalten wir:

36·1·2. *Damit f oberhalb (bzw. unterhalb) stetig sei im Punkte $a \varepsilon A$, ist notwendig und hinreichend, daß $f(a) = \bar{f}(a)$ (bzw. $f(a) = \underline{f}(a)$) sei.*

Notwendig: Ist $f(a) < \bar{f}(a)$, so gibt es ein y, so daß $f(a) < y < \bar{f}(a)$; nach **26·2·11** gibt es dann in jeder Umgebung U_a ein $x \varepsilon A$, so daß $f(x) > y$, also ist f nach **36·1·1** nicht oberhalb stetig in a. Hinreichend: Dies folgt unmittelbar aus **36·1·1** und **26·2·11**.

36·1·21. *Damit f oberhalb (bzw. unterhalb) stetig sei im Punkte $a \varepsilon A_h$, ist notwendig und hinreichend, daß $f(a) \geq \bar{f}^1(a)$ (bzw. $f(a) \leq \underline{f}^1(a)$) sei.*

Dies folgt aus **36·1·1** und **27·2·11**.

36·1·3. *Damit f stetig sei im Punkte $a \varepsilon A$, ist notwendig und hinreichend, daß f sowohl oberhalb als unterhalb stetig sei in a.*

Dies folgt aus **26·2·4** und **36·1·2**.

36·1·4. *Die Aussage „f ist oberhalb stetig in a“ ist gleichbedeutend mit „$-f$ ist unterhalb stetig in a“.*

Dies folgt unmittelbar aus der Definition oder aus **36·1·1**.

36·1·5. *Sind f, g Funktionen auf A, die oberhalb (bzw. unterhalb) stetig sind im Punkte $a \varepsilon A$, so sind auch die Funktionen* max $(f(x), g(x))$, min $(f(x), g(x))$ *oberhalb (bzw. unterhalb) stetig in a.*

Dies folgt unmittelbar aus **36·1·1**.

36·1·51. *Sind f, g Funktionen auf A, ist B der Bereich von $f + g$, und sind f, g oberhalb (bzw. unterhalb) stetig im Punkte $a \varepsilon B$, so ist auch $f + g$ oberhalb (bzw. unterhalb) stetig in a.*

Sei $y > f(a) + g(a)$; dann gibt es Zahlen y', y'', so daß $y' > f(a)$, $y'' > g(a)$, $y' + y'' \leq y$; nach **36·1·1** gibt es ein U_a, so daß $f(x) < y'$, $g(x) < y''$ für alle $x \varepsilon A\,U_a$; dann ist $f(x) + g(x) < y' + y'' \leq y$ für alle $x \varepsilon B\,U_a$, also ist $f + g$ oberhalb stetig in a nach **36·1·1**.

36·1·52. *Sind f, g Funktionen auf A, ist B der Bereich von fg, sind f, g oberhalb (bzw. unterhalb) stetig im Punkte $a \varepsilon B$, und gibt es eine Umgebung U_a, so daß $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ für alle $x \varepsilon B U_a$, so ist fg oberhalb (bzw. unterhalb) stetig in a.*

Der Beweis ist analog dem von **36·1·51.**

Sei $\mathfrak{M}$ eine Menge von Funktionen auf A. Dann gilt in Ergänzung zu **29·2·3**:

36·1·6. *Sind alle $f \varepsilon \mathfrak{M}$ unterhalb (bzw. oberhalb) stetig im Punkte $a \varepsilon A$, so ist auch $\sup\limits_{f \varepsilon \mathfrak{M}} f(x)$ unterhalb (bzw. $\inf\limits_{f \varepsilon \mathfrak{M}} f(x)$ oberhalb) stetig in a.*

Sei $g(x) = \sup\limits_{f \varepsilon \mathfrak{M}} f(x)$: ist $y < g(a)$, so gibt es ein $f \varepsilon \mathfrak{M}$, so daß auch $y < f(a)$; nach **36·1·1** gibt es ein U_a, so daß $f(x) > y$ für alle $x \varepsilon A U_a$; dann ist auch $g(x) > y$ für alle $x \varepsilon A U_a$, also ist g unterhalb stetig in a nach **36·1·1.**

36·1·61. *Sind alle $f \varepsilon \mathfrak{M}$ stetig im Punkte $a \varepsilon A$, so ist $\sup\limits_{f \varepsilon \mathfrak{M}} f(x)$ unterhalb, $\inf\limits_{f \varepsilon \mathfrak{M}} f(x)$ oberhalb stetig in a.*

Dies folgt aus **36·1·3** und **36·1·6.**

36·1·7. *Ist $((f_n))$ eine monoton wachsende (bzw. abnehmende) Funktionenfolge auf A, und sind alle f_n unterhalb (bzw. oberhalb) stetig im Punkte $a \varepsilon A$, so ist auch $\lim\limits_n f_n$ unterhalb (bzw. oberhalb) stetig in a.*

Dies folgt unmittelbar aus **36·1·6.**

2. **Halbstetige Funktionen.** Die Funktion f auf A heißt oberhalb (bzw. unterhalb) stetig, wenn sie oberhalb (bzw. unterhalb) stetig ist in jedem Punkte $a \varepsilon A$. Satz **25·8·1** ist enthalten in:

36·2·1. *Ist f eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion auf A, so ist für jedes y die Menge $[f(\hat{x}) < y]$ (bzw. $[f(\hat{x}) > y]$) offen in A, und die Menge $[f(\hat{x}) \geq y]$ (bzw. $[f(\hat{x}) \leq y]$) abgeschlossen in A.*

Sei $M = [f(\hat{x}) < y]$ und $a \varepsilon M$, d. h. $y > f(a)$; nach **36·1·1** gibt es ein U_a, so daß $f(x) < y$ für alle $x \varepsilon A U_a$; also ist $A U_a \subseteqq M$, also ist M offen in A, und somit $A - M = [f(\hat{x}) \geq y]$ abgeschlossen in A.

Bezeichnet wie in § 35 $\mathfrak{C}(A)$ das System der stetigen Funktionen auf A, so gilt:

36·2·2. *Damit die Funktion f auf A oberhalb (bzw. unterhalb) stetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß $f \varepsilon \mathfrak{C}_1(A)$ (bzw. $f \varepsilon \mathfrak{C}^1(A)$) sei.*

Notwendig: Sei f oberhalb stetig. Nach **36·2·1** ist $[f(\hat{x}) < y]$ offen in A, d. h. $[f(\hat{x}) < y] \varepsilon \mathfrak{B}^1(A)$; nach **35·2·1** ist also $f \varepsilon \mathfrak{C}_1(A)$. Hinreichend:

Ist $f \varepsilon \mathfrak{C}_1(A)$, so ist $f = \lim_n f_n$, wo $f_{n-1} \leq f_n$ und f_n stetig; nach **36·1·7** ist dann f oberhalb stetig.

Aus **36·2·2** folgt vermöge **35·2·1** die Umkehrung von **36·2·1**:

36·2·21. *Ist f eine Funktion auf A, und ist $[f(\acute{x}) < y]$ (bzw. $[f(\acute{x}) > y]$) offen in A für alle $y \varepsilon R_1$, so ist f oberhalb (bzw. unterhalb) stetig.*

Satz **25·7·21** ist enthalten in:

36·2·3. *Ist A in sich kompakt und f eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion auf A, so gibt es einen Punkt $a \varepsilon A$, in dem $f(a)$ ein absolutes Maximum (bzw. Minimum) ist.*

Sei $z = \sup_{x \varepsilon A} f(x)$; dann gibt es in A eine Folge $((a_n))$ mit $f(a_n) \to z$. Nach **17·2·31** hat $((a_n))$ einen Häufungspunkt $a \varepsilon A$, und nach **17·3·53** gibt es in $((a_n))$ eine Teilfolge $((a_{n_\nu}))$, so daß $a_{n_\nu} \to a$; da $f(a_{n_\nu}) \to z$, und f oberhalb stetig, ist dann $f(a) \geq z$, also, da $z = \sup_{x \varepsilon A} f(x)$ war: $f(a) = z$, d. h. $f(a)$ ist absolutes Maximum von f.

36·2·31. *Ist A in sich kompakt, so ist jede oberhalb (bzw. unterhalb) stetige, endliche Funktion auf A nach oben (bzw. unten) beschränkt.*

Dies ist enthalten in **36·2·3**.

36·2·4. *Ist A in sich kompakt, ist f eine nach oben beschränkte oberhalb stetige, g eine nach unten beschränkte unterhalb stetige Funktion auf A, und ist $f \leq g$, so gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $\sigma > 0$, so daß für je zwei Punkte $a \varepsilon A$, $a' \varepsilon A$ mit $a\,a' < \sigma$ gilt: $f(a) < g(a') + \delta$.*

Anderenfalls gäbe es ein $\delta > 0$ und für jedes n zwei Punkte $a_n \varepsilon A$, $a'_n \varepsilon A$ mit $a_n a'_n < \frac{1}{n}$ und $f(a_n) \geq g(a'_n) + \delta$. Da A in sich kompakt, hat $((a_n))$ einen Häufungspunkt $a \varepsilon A$, und durch Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen: $a_n \to a$; wegen $a_n a'_n < \frac{1}{n}$ gilt dann auch $a'_n \to a$. Weil f oberhalb stetig, ist $f(a) \geq \overline{\lim_n}\, f(a_n)$, wegen $f(a_n) \geq g(a'_n) + \delta$ also auch $f(a) \geq \overline{\lim_n}\, g(a'_n) + \delta$; weil g unterhalb stetig, ist $g(a) \leq \underline{\lim_n}\, g(a'_n) \leq \overline{\lim_n}\, g(a'_n)$; es wäre also $f(a) \geq g(a) + \delta$; da nach Annahme $f(a) < +\infty$, $g(a) > -\infty$, müssen hierin $f(a)$ und $g(a)$ endlich sein, so daß daraus $f(a) > g(a)$ folgen würde, entgegen der Annahme $f \leq g$.

Setzen wir in **36·2·4** $f = g$, so ist f stetig, und die Aussage von **36·2·4** geht über in die Aussage, daß f gleichmäßig stetig ist (vgl. **25·7·31**).

36·2·5. *Ist A eine Youngsche Menge, und ist f eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion auf A, so ist f punktweise unstetig.*

Dies folgt wegen **36·2·2** aus **28·8·2**.

36·2·6. *Ist g eine oberhalb, h eine unterhalb stetige Funktion auf A und $g \leq h$, so gibt es eine stetige Funktion f auf A, so daß $g \leq f \leq h$.*

Dies folgt wegen **36·2·2** und § 35 (1) aus **35·3·1.**

36·2·7. *Ist $A \subseteqq E$ und φ eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion auf A, so gibt es eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion f auf E, so daß $\varphi = A \,\rceil\, f$.*

Dies folgt wegen **36·2·2** aus **35·3·2.**

Literatur: Die Grundzüge der Theorie der halbstetigen Funktionen, insbesondere auch Satz **36·2·2**, stammen von R. Baire, Ann. di mat (3) 3 (1899) S. 6; Bull. soc. math. 32 (1904) S. 125. Satz **36·2·4** stammt von W. Sierpiński, Fund. math. 9 (1927) S. 1, Satz **36·2·6** von H. Hahn, Wien Ber. 126 (1917) S. 103.

3. **Beispiele halbstetiger Funktionen.** Sei wieder E ein metrischer Raum und $A \subseteqq E$.

36·3·1. *Ist f eine Funktion auf A, so ist ihre obere (bzw. untere) Schrankenfunktion $\bar{f}$ (bzw. $\underline{f}$) eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion auf A^0.*

Aus **26·1·5** folgt: ist $y > \bar{f}(a)$, (bzw. $y < \underline{f}(a)$), so gibt es eine Umgebung U_a, so daß $\bar{f}(x) < y$ (bzw. $\underline{f}(x) > y$) für alle $x \varepsilon A^0 U_a$. Die Behauptung folgt nun aus **36·1·1.**

36·3·11. *Ist f eine Funktion auf A, so ist ihre Schwankung ω eine oberhalb stetige Funktion auf A^0.*

Nach § 26, 3 ist $\omega(x) = \|\bar{f}(x) - \underline{f}(x)\| = S(\bar{f}(x)) - S(\underline{f}(x))$, wo S die Schränkungstransformation bedeutet. Nach **36·3·1** ist $\bar{f}(x)$ oberhalb, $\underline{f}(x)$ unterhalb stetig; also ist auch $S(\bar{f}(x))$ oberhalb, $S(\underline{f}(x))$ unterhalb stetig; nach **36·1·4** ist $-S(\underline{f}(x))$ oberhalb stetig, also nach **36·1·51** auch $S(\bar{f}(x)) - S(\underline{f}(x))$.

36·3·12. *Ist f eine Funktion auf A, so ist ihre reduzierte obere (bzw. untere) Schrankenfunktion $\bar{f}^1$ (bzw. $\underline{f}^1$) eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion auf A^1, und ihre reduzierte Schwankung ω^1 eine oberhalb stetige Funktion auf A^1.*

Dies folgt aus **27·1·5.**

36·3·13. *Ist f eine Funktion auf A, so ist ihre obere (bzw. untere) Schrankenfunktion bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen $\bar{f}^{(\mathfrak{M})}$ (bzw. $\underline{f}^{(\mathfrak{M})}$) eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion auf A^0, und ihre Schwankung bei Vernachlässigung von $\mathfrak{M}$-Mengen $\omega^{(\mathfrak{M})}$ eine oberhalb stetige Funktion auf A^0.*

Dies folgt aus **27·4·3.**

36·3·2. *Ist f eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion auf A, ist B dicht in A und $\underline{f}(x) \leq y$ (bzw. $\bar{f}(x) \geq y$) für alle $x \varepsilon B$, so ist die Menge $[f(\hat{x}) > y]$ (bzw. die Menge $[f(\hat{x}) < y]$) von erster Kategorie in A.*

Sei $y = \lim\limits_n y_n$, $y_n > y$; nach **30·1·2** ist dann $[f(\hat{x}) > y] = \underset{n}{S}\,[f(\hat{x}) \geq y_n]$; es genügt also, zu zeigen: die Menge $[f(\hat{x}) \geq y_n]$ ist nirgends dicht in A; und da sie nach **36·2·1** abgeschlossen in A ist, genügt es nach **11·2·111** zu zeigen, daß $[f(\hat{x}) \geq y_n]$ keinen in A offenen Teil $\supset A$ hat. Wäre G ein nicht leerer, in A offener Teil von $[f(\hat{x}) \geq y_n]$, so gäbe es nach **11·1·3** ein $a \varepsilon B G$ und, weil G offen in A, ein U_a, so daß $A U_a \subseteqq G$, also $f(x) \geq y_n$ für alle $x \varepsilon A U_a$; dann wäre nach **26·2·11** $\underline{f}(a) \geq y_n > y$, entgegen der Voraussetzung.

36·3·3. *Ist f eine Funktion auf A, so ist, damit ihre Schwankung $\omega(x) \leq k$ sei für alle $x \varepsilon A$, notwendig und hinreichend, daß es eine stetige Funktion f^* auf A gebe, so daß $\|f^*(x) - f(x)\| \leq \frac{k}{2}$ für alle $x \varepsilon A$.*

Notwendig: Nach **36·3·1** ist $\bar{f}$ oberhalb, $\underline{f}$ unterhalb stetig, also auch $S(\bar{f})$ oberhalb, $S(\underline{f})$ unterhalb stetig. Wegen $\omega = S(\bar{f}) - S(\underline{f}) \leq k$ ist $S(\bar{f}) - \frac{k}{2} \leq S(\underline{f}) + \frac{k}{2}$. Da hierin $S(\bar{f}) - \frac{k}{2}$ oberhalb, $S(\underline{f}) + \frac{k}{2}$ unterhalb stetig, gibt es nach **36·2·6** eine stetige Funktion f^{**}, so daß $S(\bar{f}) - \frac{k}{2} \leq f^{**} \leq S(\underline{f}) + \frac{k}{2}$; indem wir nach § 30 (3·1) f^{**} ersetzen durch $(f^{**})_{-1}^{1}$, können wir annehmen: $-1 \leq f^{**} \leq 1$. Setzen wir $S^{-1}(f^{**}) = f^*$, so ist f^* stetig und $S(\bar{f}) - \frac{k}{2} \leq S(f^*) \leq S(\underline{f}) + \frac{k}{2}$, und da $S(\underline{f}) \leq S(f) \leq S(\bar{f})$, ist $S(f) - \frac{k}{2} \leq S(f^*) \leq S(f) + \frac{k}{2}$, d. h. $\|f^* - f\| \leq \frac{k}{2}$. Hinreichend: Sei $x \varepsilon A$ und $z > k$; wir wählen $\varepsilon > 0$ so klein, daß $k + \varepsilon < z$; wegen der Stetigkeit von f^* gibt es ein U_x, so daß $|S(f^*(x')) - S(f^*(x))| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x' \varepsilon A U_x$; nach Annahme ist $\|f^*(x') - f(x')\| \leq \frac{k}{2}$, d. h. $|S(f^*(x')) - S(f(x'))| \leq \frac{k}{2}$; also ist $|S(f(x') - S(f^*(x))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{k}{2}$ für alle $x' \varepsilon A U_x$, also auch $|S(f(x'')) - S(f^*(x))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{k}{2}$ für alle $x'' \varepsilon A U_x$, also $|S(f(x')) - S(f(x''))| < \varepsilon + k < z$ für alle $x' \varepsilon A U_x$, $x'' \varepsilon A U_x$, d. h. $\|f(x') - f(x'')\| < z$ für alle $x' \varepsilon A U_x$, $x'' \varepsilon A U_x$; nach **26·3·11** ist demnach $\omega(x) \leq z$, also auch $\omega(x) \leq k$.

Literatur: R. Baire, Ann. di mat. (3) 3 (1899) S. 6. Zu Satz **36·3·3**: H. Hahn, Wien Ber. 126 (1917) S. 91.

4. **Bairesche Funktionen und halbstetige Funktionen.** Sei E ein metrischer Raum, f eine Funktion auf E. Dann gilt:

36·4·1. *Ist f stetig bis auf eine $\mathfrak{M}$-Menge, so gibt es eine oberhalb (bzw. eine unterhalb) stetige Funktion auf E, die sich von f nur in den Punkten einer $\mathfrak{M}$-Menge unterscheidet.*

Sei M eine $\mathfrak{M}$-Menge und $(E - M)\,1\,f$ stetig; da nach Eigenschaft 1.) und 3.) der $\mathfrak{M}$-Mengen (§ 27, 4): $(E - M)\,G \supset A$ für jede in E offene Menge $G \supset A$, ist nach **11·1·3** $E - M$ dicht, also nach: **11·1·1** $(E - M)^0 = E$. Setzen wir $(E - M)\,1\,f = g$, so ist also nach **36·3·1** die obere (bzw. untere) Schrankenfunktion $\bar{g}$ (bzw. $\underline{g}$) von g eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion auf E. Da nach Annahme g stetig, ist nach **26·2·4** $\bar{g}(x) = \underline{g}(x) = g(x) = f(x)$ für alle $x \varepsilon E - M$, also ist $[\bar{g}(\hat{x}) \neq f(\hat{x})] \subseteq M$, somit nach Eigenschaft 1.) der $\mathfrak{M}$-Mengen eine $\mathfrak{M}$-Menge, ebenso $[\underline{g}(\hat{x}) \neq f(\hat{x})]$. Also leistet $\bar{g}$ (bzw. $\underline{g}$) das Verlangte.

36·4·2. *Ist f eine Bairesche Funktion im Youngschen Raume E, so gibt es eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion auf E, die mit f in allen Punkten einer Residualmenge übereinstimmt.*

Nach **35·5·2** ist f stetig bis auf eine Menge erster Kategorie; die Behauptung folgt also aus **36·4·1**, indem man dort unter den $\mathfrak{M}$-Mengen die Mengen erster Kategorie versteht.

§ 37. Funktionen erster, zweiter und dritter Klasse.

1. **Funktionen erster Klasse.** Ist E ein metrischer Raum, so sind nach § 35 (1) oder nach **36·2·2** und **36·1·3** die $\mathfrak{G}^1_1$-Funktionen in E nichts anderes als die stetigen Funktionen. Wir betrachten nun die $\mathfrak{G}^2_2$-Funktionen in E, die wir wie in § 35, 1 auch als die Funktionen e r s t e r K l a s s e in E bezeichnen.

37·1·1. *Ist f eine Funktion erster Klasse im Youngschen Raume E und ist A ein G_δ in E, so ist $A\,1\,f$ punktweise unstetig.*

Nach **19·1·2** ist A eine Youngsche Menge; nach **35·3·3** ist $A\,1\,f$ eine Funktion erster Klasse in A, d. h. $A\,1\,f \,\varepsilon\, \mathfrak{G}^2_2(A)$, also nach **35·1·5** $A\,1\,f \,\varepsilon\, \mathfrak{G}^*(A)$; die Behauptung folgt also aus **28·8·2**.

37·1·2. *Ist f eine Funktion im separablen Youngschen Raume E, so ist, damit f von erster Klasse sei, notwendig und hinreichend, daß es in jeder in E perfekten Menge $P \supset A$ einen Stetigkeitspunkt von $P\,1\,f$ gebe.*

N o t w e n d i g: Dies ist enthalten in **37·1·1**. H i n r e i c h e n d: Nach Annahme gibt es in jeder perfekten Menge $P \supset A$ einen Punkt, in dem $P\,1\,f$ stetig, also nach **35·7·1** eine $\mathfrak{G}^1_1$-Funktion, mithin auch eine $\mathfrak{G}^2_2$-Funktion ist; nach **35·7·4** ist also f eine $\mathfrak{G}^2_2$-Funktion, d. h. von erster Klasse in E.

Aus **35·7·4** folgt nur, daß, wenn f von erster Klasse in E, d. h. $f \varepsilon \mathfrak{C}_2^2(E)$ ist, es in jeder perfekten Menge $P \supset A$ einen Punkt gibt, in dem $P \rceil f$ eine $\mathfrak{C}_2^2$-Funktion ist, während es nach **37·1·2** in P sogar einen Punkt gibt, in dem $P \rceil f$ stetig, d. h. eine $\mathfrak{C}_1^1$-Funktion ist. Für $\xi > 2$ gilt eine solche Verschärfung von **35·7·4** nicht; denn ist $1 < \eta < \xi < \omega_1$ und gibt es in jeder perfekten Menge $P \supset A$ einen Punkt, in dem $P \rceil f$ eine $\mathfrak{C}_\eta^\eta$-Funktion ist, so ist nach **35·7·4** $f \varepsilon \mathfrak{C}_\eta^\eta(E)$, während es nach **35·8·1** $\mathfrak{C}_\xi^\xi$-Funktionen gibt, die nicht $\mathfrak{C}_\eta^\eta$-Funktionen sind. Diese Sonderstellung des Falles $\xi = 2$ beruht darauf, daß **35·7·4** nur für $\xi > 1$ gilt.

37·1·21. *Ist f eine Funktion im separablen Youngschen Raume E, die nur abzählbar viele Unstetigkeitspunkte hat, so ist f von erster Klasse.*

Nach **19·3·1** hat jede in E perfekte Menge $P \supset A$ die Mächtigkeit $\aleph$, enthält also gewiß einen Stetigkeitspunkt von $P \rceil f$; die Behauptung folgt also aus **37·1·2.**

37·1·3. *In einem abzählbaren Raume E ist jede Funktion von erster Klasse.*

Jeder Teil A von E ist abzählbar, also ein F_σ, also $A \varepsilon \mathfrak{B}^2(E)$; insbesondere ist also $[f(\hat{x}) > y] \varepsilon \mathfrak{B}^2(E)$, $[f(\hat{x}) < y] \varepsilon \mathfrak{B}^2(E)$, also nach **35·2·2** $f \varepsilon \mathfrak{C}_2^2(E)$.

37·1·4. *Ist E ein separabler Youngscher Raum und $M \subseteqq E$, so ist, damit $M \varepsilon \mathfrak{B}_2^2(E)$ sei, notwendig und hinreichend, daß für jede in E perfekte Menge $P \supset A$ die Begrenzung C von $M\,P$ in P nirgends dicht in P sei.*

Notwendig: Ist f die charakteristische Funktion von M, so sind die Aussagen: $M \varepsilon \mathfrak{B}_2^2(E)$ und $f \varepsilon \mathfrak{C}_2^2(E)$ nach **35·2·41** gleichbedeutend. Offenbar ist C identisch mit der Menge der Unstetigkeitspunkte von $P \rceil f$. Nach **10·6·4** ist C abgeschlossen in P; wäre C nicht nirgends dicht in P, gäbe es also nach **11·2·111** eine nicht leere, in P offene Menge $G \subseteqq C$; da P ein G_δ in E, steht dies im Widerspruche mit **37·1·1.** Hinreichend: Ist C nirgends dicht in P, so gibt es einen Punkt $a \varepsilon P - C$; da a Stetigkeitspunkt von $P \rceil f$, folgt die Behauptung aus **37·1·2.**

37·1·41. *Ist E ein separabler Youngscher Raum und A eine abzählbare Menge $\subseteqq E$, so ist, damit $A \varepsilon \mathfrak{B}_2^2(E)$ sei, notwendig und hinreichend, daß A separiert sei.*

Notwendig: Sei B ein nicht leerer insichdichter Teil von A; nach **12·5·3** ist B^0 perfekt; nach **11·3·12** ist B dicht in B^0, also auch $A\,B^0$ dicht in B^0; und da $A\,B^0$ abzählbar, also nach **19·4·5** von erster Kategorie in B^0, und da B^0 nach **19·1·2** eine Youngsche Menge, ist nach **19·7·51** auch $B^0 - A$ dicht in B^0; also ist jeder Punkt $b \varepsilon B^0$ Begrenzungspunkt von $A\,B^0$ in B^0, also ist nach **37·1·4** $A \sim\varepsilon \mathfrak{B}_2^2(E)$. Hinreichend: Sei P eine perfekte Menge $\supset A$. Ist A separiert, so ist nach **12·6·2** auch $A\,P$ separiert, und nach **12·6·4** ist $A\,P$ nirgends dicht in P; also ist nach **11·2·12** auch $(A\,P)^0$

nirgends dicht in P, und da $(A\,P)^0$ die Begrenzung von $A\,P$ in P ist, folgt die Behauptung aus **37·1·4**.

Literatur: Satz **37·1·2** stammt von R. Baire, Ann. di mat (3) 3 (1899) S. 16; Bull. soc. math. 28 (1900) S. 173. Näheres über $\mathfrak{B}\frac{2}{2}$-Mengen: F. Hausdorff, Mengenlehre S. 170.

2. **Funktionen erster Klasse und halbstetige Funktionen.** Wegen $\mathfrak{C}^1 \subseteqq \mathfrak{C}^2_2$, $\mathfrak{C}_1 \subseteqq \mathfrak{C}^2_2$ sind nach **36·2·2** die halbstetigen Funktionen auch $\mathfrak{C}^2_2$-Funktionen, d. h. Funktionen erster Klasse. Nach **35·1·4** ist demnach auch die Summe einer oberhalb und einer unterhalb stetigen Funktion, oder, was nach **36·1·4** dasselbe heißt, die Differenz zweier oberhalb stetiger Funktionen eine Funktion erster Klasse; umgekehrt ist nach **34·4·4** jede Treppenfunktion erster Klasse eine solche Differenz, also ist nach **34·4·31** jede Funktion erster Klasse durch Funktionen, die Differenz zweier oberhalb stetiger Funktionen sind, gleichmäßig approximierbar. Hingegen ist, wie wir nun an einem Beispiel im R_1 zeigen wollen, nicht jede Funktion erster Klasse Differenz zweier oberhalb stetiger Funktionen.

Nach **12·9·8** gibt es im Intervalle $[a, b]$ des R_1 eine abzählbare, abgeschlossene Punktmenge A_n, so daß $(A_n)^i \supset A$ für $i \leq 2n$, $(A_n)^{2n-1} = A$. Nach § 12 (8·2) ist, da nach § 12, 9 für abgeschlossene Mengen die i-te Ableitung mit der i-ten Kohärenz übereinstimmt: $A_n = \underset{i=0}{\overset{2n}{S}} \left((A_n)^i - (A_n)^{i+1}\right)$. Da nach **12·8·21** der insichdichte Kern von A_n leer ist, ist A_n separiert, also nach **12·6·2** wegen $(A_n)^i \subseteqq A_n$ auch $(A_n)^i$; nach **12·7·2** ist also die Menge $(A_n)^i - (A_n)^{i-1}$ der isolierten Punkte von $(A_n)^i$ dicht in $(A_n)^i$; ist $a\,\varepsilon\,(A_n)^{i+1}$, d. h. ist a Häufungspunkt von $(A_n)^i$, so gibt es also in jeder Umgebung U_a einen Punkt $x\,\varepsilon\,(A_n)^i - (A_n)^{i-1}$.

Wir definieren nun, wenn k eine positive Zahl bedeutet, eine Funktion auf A_n durch:

$$f(x, k, A_n) = \begin{cases} 0 \text{ auf } (A_n)^{2\nu} - (A_n)^{2\nu+1} \\ k \text{ auf } (A_n)^{2\nu+1} - (A_n)^{2\nu+2}. \end{cases} \tag{2}$$

37·2·1. *Ist $f(x, k, A_n) = g_1(x) - g_2(x)$, wo g_1, g_2 oberhalb stetige Funktionen auf A_n bedeuten, so gibt es zwei Punkte $x' \,\varepsilon\, A_n$, $x'' \,\varepsilon\, A_n$, so daß $g_1(x') - g_1(x'') > (n-1)\,k$.*

Sei $x_{2n}\,\varepsilon\,(A_n)^{2n}$; dann gibt es, wie eben bemerkt, in jeder Umgebung von x_{2n} ein $x\,\varepsilon\,(A_n)^{2n-1} - (A_n)^{2n}$, und da g_1, g_2 oberhalb stetig, gibt es somit ein $x_{2n-1}\,\varepsilon\,(A_n)^{2n-1} - (A_n)^{2n}$, so daß $g_j(x_{2n-1}) < g_j(x_{2n}) + \frac{k}{2n}$ $(j = 1, 2)$; ebenso gibt es ein $x_{2n-2}\,\varepsilon\,(A_n)^{2n-2} - (A_n)^{2n-1}$, so daß $g_j(x_{2n-2}) < g_j(x_{2n-1}) + \frac{k}{2n}$ $(j = 1, 2)$ usf.; es gibt also ein $x_i\,\varepsilon\,(A_n)^i - (A_n)^{i+1}$,

so daß $g_j(x_{i-1}) < g_j(x_i) + \frac{k}{2n}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$. Wegen $g_1(x) - g_2(x) = f(x, k, A_n)$ ist dann: $g_1(x_{2i-2}) = g_2(x_{2i-2}) < g_2(x_{2i-1}) + \frac{k}{2n} = g_1(x_{2i-1}) - k + \frac{k}{2n} < g_1(x_{2i}) - k + \frac{k}{n}$, also $g_1(x_{2i-2}) < g_1(x_{2i}) - k + \frac{k}{n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; durch Addition dieser n Ungleichungen erhält man $g_1(x_0) < g_1(x_{2n}) - nk + k$, oder, indem man $x_{2n} = x'$, $x_0 = x''$ setzt: $g_1(x') - g_1(x'') > (n-1)k$.

37·2·2. *Es gibt eine Funktion erster Klasse im R_1, die nicht Differenz zweier oberhalb stetiger Funktionen ist.*

Seien $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ die sämtlichen rationalen Punkte des R_1, und sei A_n eine abzählbare abgeschlossene Punktmenge in $\left[r_n - \frac{1}{n}, r_n + \frac{1}{n}\right]$, so daß $(A_n)^i \supset \Lambda$ für $i \leq 2n$, $(A_n)^{2n+1} = \Lambda$. Da die A_n nirgends dicht sind, können sie ohne weiteres als disjunkt angenommen werden. Wir setzen $\underset{n}{S} A_n = B$, und definieren, indem wir von (2) Gebrauch machen, eine Funktion $f(x)$ im R_1 durch:

$$f(x) = f\left(x, \frac{1}{n}, A_n\right) \text{ für } x \,\varepsilon\, A_n, \quad f(x) = 0 \text{ für } x \,\varepsilon\, R_1 - B.$$

Dann ist f stetig in allen Punkten von $R_1 - B$, und da B abzählbar, ist f von erster Klasse nach 37·1·21. Wir zeigen nun, daß f nicht Differenz zweier oberhalb stetiger Funktionen ist. Angenommen, es wäre $f = f_1 - f_2$, wo f_1, f_2 oberhalb stetig; dann sind $A_n \rceil f_1$, $A_n \rceil f_2$ oberhalb stetige Funktionen auf A_n, und wegen $A_n \rceil f_1 - A_n \rceil f_2 = f\left(x, \frac{1}{n}, A_n\right)$ gibt es nach 37·2·1 zwei Punkte $x' \,\varepsilon\, A_n$, $x'' \,\varepsilon\, A_n$, so daß $f_1(x') - f_1(x'') > \frac{n-1}{n}$. Und da es zu jedem noch so kleinen Intervall $[a, b]$ unendlich viele n gibt, so daß $A_n \subseteqq [a, b]$, kann f_1 in keinem Punkte des R_1 stetig sein; wegen 36·2·5 aber ist dies ein Widerspruch gegen die Annahme, f_1 sei oberhalb stetig.

Literatur: W. Sierpiński, Fund. math. 2 (1921) S. 15; St. Mazurkiewicz, Fund. math. 2 (1921) S. 28.

3. Funktionen zweiter Klasse. Ist E ein metrischer Raum, so haben wir die Funktionen aus $\mathfrak{C}_3^3(E)$ als Funktionen zweiter Klasse in E bezeichnet. Wegen $\mathfrak{C}^2(E) \subseteqq \mathfrak{C}_3^3(E)$, $\mathfrak{C}_2(E) \subseteqq \mathfrak{C}_3^3(E)$ sind insbesondere die $\mathfrak{C}^2$-Funktionen und die $\mathfrak{C}_2$-Funktionen von zweiter Klasse.

37·3·1. *Ist $((f_n))$ eine Folge stetiger Funktionen auf E, so ist* $\overline{\lim_n} f_n \,\varepsilon\, \mathfrak{C}_2(E)$, $\underline{\lim_n} f_n \,\varepsilon\, \mathfrak{C}^2(E)$.

Setzen wir $\bar{f}_n = \sup_{\nu \geqq n} f_\nu$, so ist nach **36·1·6** $\bar{f}_n$ unterhalb stetig, also nach **36·2·2** $\bar{f}_n \,\varepsilon\, \mathfrak{C}^1(E)$; da $\overline{\lim_n} f_n = \lim_n \bar{f}_n$, und $\bar{f}_{n+1} \leqq \bar{f}_n$, ist also $\overline{\lim_n} f_n \,\varepsilon\, \mathfrak{C}_2(E)$.

37·3·11. *Ist $f(x, t)$ für jedes t aus (a, b) eine stetige Funktion von x auf E, so ist $\overline{\lim_{t \to a-0}} f(x, t) \,\varepsilon\, \mathfrak{C}_2(E)$, $\underline{\lim_{t \to a+0}} f(x, t) \,\varepsilon\, \mathfrak{C}^2(E)$, ebenso $\overline{\lim_{t \to b-0}} f(x, t) \,\varepsilon\, \mathfrak{C}_2(E)$, $\underline{\lim_{t \to b-0}} f(x, t) \,\varepsilon\, \mathfrak{C}^2(E)$.*

Sei $((b_n))$ eine abnehmende Folge aus (a, b) mit $b_n \to a$, und sei $f_n(x) = \sup_{t \,\varepsilon\, (a, b_n)} f(x, t)$; nach **36·1·6** ist $f_n(x)$ unterhalb stetig, also $f_n \,\varepsilon\, \mathfrak{C}^1(E)$; da $\overline{\lim_{t \to a+0}} f(x, t) = \lim_n f_n(x)$, und $f_{n+1}(x) \leqq f_n(x)$, ist $\overline{\lim_{t \to a+0}} f(x, t) \,\varepsilon\, \mathfrak{C}_2(E)$.

37·3·2. *Unterscheidet sich g von einer Funktion f erster Klasse in E nur in abzählbar vielen Punkten, so ist g von zweiter Klasse in E.*

Denn ist $f \,\varepsilon\, \mathfrak{C}_2^2$, so ist auch $f \,\varepsilon\, \mathfrak{C}_3^3$, also nach **35·2·6** auch $g \,\varepsilon\, \mathfrak{C}_3^3$.

Z. B. ist nach **37·3·2** die Funktion $g(x)$, die $= 0$ ist für alle irrationalen x und $= 1$ für alle rationalen x des R_1, von zweiter Klasse im R_1; und zwar ist sie, da die Menge der rationalen Punkte nach **33·4·5** eine $\mathfrak{B}^2$-Menge und nach **19·2·2** keine $\mathfrak{B}_2$-Menge ist, nach **35·2·4** genau eine $\mathfrak{C}^2$-Funktion. Sind $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ die sämtlichen rationalen Punkte des R_1, so ist $g(x) = \lim_n \lim_\nu \sum_{i=1}^{n} e^{-\nu(x-r_i)^2}$.

Sei E ein Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern $\supset A$ ist; nach **19·2·1** gibt es ein in E nirgends dichtes reduziertes (§ 24, 2) dyadisches Diskontinuum B; nach **24·2·4** ist B eine $\mathfrak{B}_2$-Menge in E; hingegen ist B nicht $\mathfrak{B}^2$-Menge in E; denn dann wäre, wenn A das dyadische Diskontinuum bezeichnet, aus dem B durch Weglassen abzählbar vieler Punkte entstanden ist, nach **33·4·72** auch $B \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^2(A)$, also $A - B \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_2(A)$; es wäre also die abzählbare, insichdichte Menge $A - B$ eine Youngsche Menge, im Widerspruche zu **19·2·2**. Da somit $\mathfrak{B}$ genau eine $\mathfrak{B}_2$-Menge in E, ist die charakteristische Funktion g von B nach **35·2·4** genau eine $\mathfrak{C}_2$-Funktion in E, also von zweiter, aber nicht von erster Klasse; und weil B nirgends dicht, ist sie punktweise unstetig in E.

37·3·3. *Auf jedem separablen, insichdichten Youngschen Raume E gibt es Funktionen zweiter Klasse, die nicht aus einer Funktion erster Klasse durch Abänderung der Funktionswerte in abzählbar vielen Punkten entstehen.*

Sei $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ ein ausgezeichnetes System in E offener Mengen (§ 13, 1): nach **19·1·2** und **12·4·21** ist H_n eine insichdichte Youngsche Menge; nach **19·2·1** gibt es also ein in H_n nirgends dichtes dyadisches Diskonti-

nuum B_n; wir setzen $\underset{n}{S} B_n = B$ und bezeichnen mit f die charakteristische Funktion von B. Da nach **18·9·3** B_n abgeschlossen, ist $B \varepsilon \mathfrak{B}^2(E)$, also ist nach **35·2·4** $f \varepsilon \mathfrak{C}^2(E)$, mithin ist f von zweiter Klasse. Entstehe nun g aus f durch Abänderung der Werte von f in den Punkten der abzählbaren Menge A; wir haben zu zeigen, daß g nicht von erster Klasse sein kann; nach **37·1·1** genügt es, zu zeigen, daß g keinen Stetigkeitspunkt besitzt; und da $g(x) = 1$ für $x \varepsilon B - A$, $g(x) = 0$ für $x \varepsilon (E - B) - A$, genügt es weiter zu zeigen, daß $B - A$ und $(E - B) - A$ dicht in E sind. Sei $G \supset A$ eine in E offene Menge; es gibt ein $H_n \subseteqq G$, also auch ein $B_n \subseteqq G$; da nach **18·9·1** B_n die Mächtigkeit $\aleph$ hat, ist $B_n - A \supset A$, also auch $G(B - A) \supset A$, also ist $B - A$ dicht in E nach **11·1·3**. Da B_n nirgends dicht, ist B von erster Kategorie, also auch $A + B$ von erster Kategorie, also $E - (A + B) = (E - B) - A$ nach **19·7·51** dicht in E.

Literatur: Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß f aus einer Funktion erster Klasse durch Abänderung der Funktionswerte in abzählbar vielen Punkten entstehe, findet man bei R. Baire, Ann. di mat. (3) 3 (1899) S. 75 und H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen (Berlin 1921) S. 368.

4. **Funktionen dritter Klasse.** Sei E ein separabler, insichdichter Youngscher Raum. Wir geben ein Beispiel einer Menge $B \subseteqq E$, die genau eine $\mathfrak{B}_3$-Menge in E ist; ihre charakteristische Funktion f ist dann nach **35·2·4** genau eine $\mathfrak{C}_3$-Funktion in E, also von dritter, aber nicht von zweiter Klasse.

Da nach **24·4·3** jeder Youngsche Raum homöomorph einem vollständigen Raume ist, können wir nach **33·6·2** E als vollständig voraussetzen. Sei $H_1, H_2, \ldots, H_i, \ldots$ ein ausgezeichnetes System in E offener Mengen (§ 13, 1); nach **19·2·1** gibt es ein in H_1 nirgends dichtes dyadisches Diskontinuum A_1, und da $H_i - (A_1 + A_2 + \cdots + A_{i-1})$ offen in E, also nach **12·4·21** eine insichdichte Youngsche Menge, gibt es ebenso ein in $H_i - (A_1 + A_2 + \ldots + A_{i-1})$ nirgends dichtes dyadisches Diskontinuum A_i; dann sind die A_i disjunkt; da es zu jeder in E offenen Menge $G \supset A$ ein $H_i \subseteqq G$ gibt, gibt es auch ein $A_i \subseteqq G$; und weil A_i nirgends dicht, so ist $A^* = \underset{i}{S} A_i$ von erster Kategorie in E. Da A_i nach **18·9·3** und **18·5·11** insichdicht und vollständig, erhält man genau so eine Folge $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik}, \ldots$ disjunkter, in A_i nirgends dichter dyadischer Diskontinua, so daß es zu jeder in A_i offenen Menge $G \supset A$ ein $A_{ik} \subset G$ gibt; dann ist $A_i^* = \underset{k}{S} A_{ik}$ von erster Kategorie in A_i. Ebenso gibt es eine Folge $A_{ik1}, A_{ik2}, \ldots, A_{ikl}, \ldots$ disjunkter, in A_{ik} nirgends dichter dyadischer Diskontinua, so daß es zu jeder in A_{ik} offenen Menge $G \supset A$ ein $A_{ikl} \subseteqq G$

gibt; dann ist $A_{ik}^* = \underset{l}{S} A_{ikl}$ von erster Kategorie in A_{ik} usf. — Wir setzen nun $A^{(1)} = A^*$, $A^{(2)} = \underset{i}{S} A_i^*$, $A^{(3)} = \underset{ik}{S} A_{ik}^*$ usf., und setzen weiter $B = \underset{n}{D} A^{(n)}$. Da $B \subseteqq A^*$, ist B von erster Kategorie in E; da $B A_i \subseteqq A_i^*$, ist $B A_i$ von erster Kategorie in A_i usf. Da die Mengen $A_i, A_{ik}, A_{ikl}, \ldots$ abgeschlossen, also $\mathfrak{B}_1$-Mengen in E sind, sind die Mengen A^*, A_i^*, A_{ik}^*, ... $\mathfrak{B}^2$-Mengen, also sind auch die Mengen $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, ... $\mathfrak{B}^2$-Mengen, und somit ist $B \varepsilon \mathfrak{B}_3(E)$. Es ist noch zu zeigen, daß $B \sim\varepsilon \mathfrak{B}_3^3(E)$, d. h. nach § 33 (4·32), daß nicht

(4) $$B = \operatorname*{Lim}_{\nu} B_\nu \text{ mit } B_\nu \varepsilon \mathfrak{B}_2^2(E)$$

sein kann. — Angenommen, es gelte (4), und sei f_ν die charakteristische Funktion von B_ν, f die charakteristische Funktion von B; nach 35·2·41 ist dann $f_\nu \varepsilon \mathfrak{C}_2^2(E)$, und (4) ist gleichbedeutend mit:

(4·1) $$f = \lim_{\nu} f_\nu .$$

Sei A_{i_0} eine der Mengen A_i und C_ν die Menge der Unstetigkeitspunkte von $A_{i_0} 1 f_\nu$; nach 37·1·1 und 26·5·11 ist C_ν von erster Kategorie in A_{i_0}, und da auch $B A_{i_0}$ von erster Kategorie in A_{i_0}, so ist auch $C = B A_{i_0} + \underset{\nu}{S} C_\nu$ von erster Kategorie in A_{i_0}, also ist nach 19·7·511 $A_{i_0} - C \supset \Lambda$. Sei $a_1 \varepsilon A_{i_0} - C$; dann ist $a_1 \sim\varepsilon B$, also nach (4) auch $a_1 \sim\varepsilon B_\nu$ für fast alle ν; sei ν_1 so gewählt, daß $a_1 \sim\varepsilon B_{\nu_1}$; dann ist $f_{\nu_1}(a_1) = 0$, und da $a_1 \sim\varepsilon C_{\nu_1}$, also a_1 Stetigkeitspunkt von $A_{i_0} 1 f_{\nu_1}$, gibt es ein positives $\varrho_1 \leqq \frac{1}{2}$, so daß $f_{\nu_1}(x) = 0$ für alle $x \varepsilon A_{i_0} K_{a_1 \varrho_1}$. — Nun gibt es unter den Mengen $A_{i_0 k}$ eine $A_{i_0 k_0} \subseteqq K_{a_1 \varrho_1}$; ersetzt man in der eben durchgeführten Überlegung A_{i_0} durch $A_{i_0 k_0}$, so sieht man: es gibt ein $a_2 \varepsilon A_{i_0 k_0}$, einen Index $\nu_2 \geqq 2$ und ein positives $\varrho_2 \leqq \frac{1}{2^2}$, so daß $a_2 \sim\varepsilon B$ und $f_{\nu_2}(x) = 0$ für alle $x \varepsilon A_{i_0 k_0} K_{a_2 \varrho_2}$. Ebenso gibt es ein $A_{i_0 k_0 l_0} \subseteqq K_{a_2 \varrho_2}$, ein $a_3 \varepsilon A_{i_0 k_0 l_0}$, einen Index $\nu_3 \geqq 3$ und ein positives $\varrho_3 \leqq \frac{1}{2^3}$, so daß $a_3 \sim\varepsilon B$ und $f_{\nu_3}(x) = 0$ für alle $x \varepsilon A_{i_0 k_0 l_0} K_{a_3 \varrho_3}$ usf. Wir gelangen so zu einer Punktfolge $((a_n))$, die wegen $a_n a_{n+1} < \varrho_n \leqq \frac{1}{2^n}$ eine Cauchysche Folge ist; da E vollständig, gibt es also ein $a \varepsilon E$, so daß $a_n \to a$. Da $a_n \varepsilon A_{i_0}$ für $n \geqq 1$, $a_n \varepsilon A_{i_0 k_0}$ für $n \geqq 2$, $a_n \varepsilon A_{i_0 k_0 l_0}$ für $n \geqq 3$ usf., und da die Mengen A_{i_0}, $A_{i_0 k_0}$, $A_{i_0 k_0 l_0}$, ... abgeschlossen, ist $a \varepsilon A_{i_0}$, $a \varepsilon A_{i_0 k_0}$, $a \varepsilon A_{i_0 k_0 l_0}$, ..., also $a \varepsilon A^{(n)}$ für alle n, also $a \varepsilon B$, mithin $f(a) = 1$. Andererseits folgt aus $A_{i_0 k_0} \subseteqq K_{a_1 \varrho_1}$, $A_{i_0 k_0 l_0} \subseteqq K_{a_2 \varrho_2}$, ..., daß $a \varepsilon K_{a_1 \varrho_1}$, $a \varepsilon K_{a_2 \varrho_2}$, ...; nun war $f_{\nu_1}(x) = 0$ für $x \varepsilon A_{i_0} K_{a_1 \varrho_1}$, $f_{\nu_2}(x) = 0$ für $x \varepsilon A_{i_0 k_0} K_{a_2 \varrho_2}$ usf. Also ist $f_{\nu_1}(a) = 0$, $f_{\nu_2}(a) = 0$, ..., $f_{\nu_n}(a) = 0$, ...;

dies aber steht wegen $f(a) = 1$ und $\nu_n \geq n$ in Widerspruch mit (4·1). Also kann (4) nicht bestehen, w. z. b. w.

Literatur: R. Baire, Acta math. 30 (1906) S. 30; N. Lusin, Leç. s. l. ensembles analytiques S. 92ff.

§ 38. Folgen Bairescher Funktionen.

1. Konvergente Folgen Bairescher Funktionen. Sei E ein metrischer Raum, $((f_n))$ eine konvergente Folge von $\mathfrak{C}_\xi^\xi$-Funktionen in E, und $\lim\limits_n f_n = f$; dann ist nach **35·1·5** $f \varepsilon \mathfrak{C}_{\xi+1}^{\xi+1}$; wenn aber $((f_n))$ gleichmäßig konvergiert, ist nach **35·1·4** $f \varepsilon \mathfrak{C}_\xi^\xi$; gleichmäßige Konvergenz ist also eine hinreichende, keineswegs aber notwendige Bedingung dafür, daß $f \varepsilon \mathfrak{C}_\xi^\xi$ sei. Wir geben eine Bedingung an, die notwendig und hinreichend ist. Wir setzen $S(f_n) - S(f) = r_n$, wo S die Schränkungstransformation bedeutet; dann sagen wir: die Folge $((f_n))$ ist im Punkte $a \varepsilon E$ $\mathfrak{C}_\xi^\xi$-konvergent gegen f, wenn es zu jedem $\varrho > 0$ eine Umgebung U_a, einen Index n und ein $g \varepsilon \mathfrak{C}_\xi^\xi(E)$ gibt, so daß $|r_n(x) - g(x)| < \varrho$ für alle $x \varepsilon U_a$.

38·1·1. *Ist $((f_n))$ eine konvergente Folge von $\mathfrak{C}_\xi^\xi$-Funktionen ($\xi > 1$) im separablen Raume E, und $f = \lim\limits_n f_n$, so ist, damit auch $f \varepsilon \mathfrak{C}_\xi^\xi(E)$ sei, notwendig und hinreichend, daß es in jeder in E perfekten Menge $P \supset A$ einen Punkt gebe, in dem $((P \,1\, f_n))$ $\mathfrak{C}_\xi^\xi$-konvergent gegen $P \,1\, f$ ist.*

Notwendig: Ist $f_n \varepsilon \mathfrak{C}_\xi^\xi(E)$, $f \varepsilon \mathfrak{C}_\xi^\xi(E)$, so ist nach **35·1·4** auch $r_n = S(f_n) - S(f) \varepsilon \mathfrak{C}_\xi^\xi(E)$, also nach **35·3·3** auch $P \,1\, r_n \varepsilon \mathfrak{C}_\xi^\xi(P)$; somit ist $((P \,1\, f_n))$ in jedem Punkte von P $\mathfrak{C}_\xi^\xi$-konvergent gegen $P \,1\, f$. Hinreichend: Ist $((P \,1\, f_n))$ im Punkte $a \varepsilon P$ $\mathfrak{C}_\xi^\xi$-konvergent gegen $P \,1\, f$, so gibt es zu jedem $\varrho > 0$ eine Umgebung U_a, einen Index n und ein $g \varepsilon \mathfrak{C}_\xi^\xi(P)$, so daß $|r_n(x) - g(x)| < \varrho$ für alle $x \varepsilon P U_a$, d. h. $|(P \,1\, S(f_n) - g) - P \,1\, S(f)| < \varrho$ für alle $x \varepsilon P U_a$; da $P \,1\, S(f_n) - g \varepsilon \mathfrak{C}_\xi^\xi(P)$, besagt das: $P \,1\, S(f)$ ist im Punkte a eine $\mathfrak{C}_\xi^\xi$-Funktion (§ 35, 7); nach **35·7·4** ist also $S(f) \varepsilon \mathfrak{C}_\xi^\xi(E)$, also auch $f \varepsilon \mathfrak{C}_\xi^\xi(E)$.

Wie **35·7·4** für $\xi = 2$ ergänzt wird durch **37·1·2**, wird **38·1·1** für $\xi = 2$ ergänzt durch:

38·1·2. *Ist $((f_n))$ eine konvergente Folge von Funktionen erster Klasse im separablen Youngschen Raume E, und $f = \lim\limits_n f_n$, so ist, damit auch f von erster Klasse sei, notwendig und hinreichend, daß es in jeder in E perfekten Menge $P \supset A$ einen Punkt gebe, in dem $((P \,1\, f_n))$ uniform gegen $P \,1\, f$ konvergiert.*

Notwendig: Nach **37·1·1** sind $P \,1\, f_n$ und $P \,1\, f$ punktweise unstetig; ist also A_n bzw. A die Menge der Unstetigkeitspunkte von $P \,1\, f_n$ bzw. $P \,1\, f$,

so sind nach **26·5·11** A_n und A von erster Kategorie in P, also auch $B = \underset{n}{S} A_n + A$: also ist nach **19·7·511** $P - B \supset A$; in jedem Punkte $b \varepsilon P - B$ sind aber alle $P \, 1 \, f_n$ und $P \, 1 \, f$ stetig, also ist nach **28·1·1** die Konvergenz von $((P \, 1 \, f_n))$ gegen $P \, 1 \, f$ uniform in b. Hinreichend: Konvergiert die Folge $((P \, 1 \, f_n))$ im Punkte $b \varepsilon P$ uniform gegen $P \, 1 \, f$, so ist sie in b auch $\mathfrak{C}_2^2$-konvergent gegen f: die Behauptung folgt also aus **38·1·1** für $\xi = 2$.

38·1·3. *Ist* $((f_n))$ *eine konvergente Folge von* $\mathfrak{C}_\xi^\xi$-*Funktionen im metrischen Raume* E, *und* $f = \lim\limits_n f_n$, *so ist, damit auch* $f \varepsilon \mathfrak{C}_\xi^\xi (E)$ *sei, notwendig und hinreichend, daß es zu jedem* $\delta > 0$ *eine Folge von Mengen* $E_\nu \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (E)$ *und eine Indizesfolge* $((n_\nu))$ *gebe, so daß* $E = \underset{\nu}{S} E_\nu$ *und* $\|f_{n_\nu}(x) - f(x)\| < \delta$ *für alle* $x \varepsilon E_\nu$.

Notwendig: Ist $f \varepsilon \mathfrak{C}_\xi^\xi (E)$, so ist auch $S(f_\nu) - S(f) \varepsilon \mathfrak{C}_\xi^\xi (E)$, also nach **30·5·1** auch $\|f_\nu - f\| \varepsilon \mathfrak{C}_\xi^\xi (E)$; setzen wir $[\|f_\nu(\mathfrak{x}) - f(\mathfrak{x})\| < \delta] = E_\nu$, so ist also nach **35·2·2** $E_\nu \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (E)$, und wegen $f = \lim\limits_\nu f_\nu$ ist $E = \underset{\nu}{S} E_\nu$. Hinreichend: Nach **35·6·4** gibt es eine Folge von Mengen $A_{ni} \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (E)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ und von Zahlen c_{ni} $(i = 1, 2, \ldots)$, so daß $E = \underset{i}{S} A_{ni}$ und $\|f_n - c_{ni}\| < \delta$ auf A_{ni}. Dann ist $\|f - c_{n_\nu i}\| \leq \|f_{n_\nu} - f\| + \|f_{n_\nu} - c_{n_\nu i}\| < 2\delta$ auf $A_{n_\nu i} E_\nu$. Und da $E = \underset{\nu}{S} E_\nu = \underset{i,\nu}{S} A_{n_\nu i} E_\nu$ und $A_{n_\nu i} E_\nu \varepsilon \mathfrak{B}^\xi (E)$, ist $f \varepsilon \mathfrak{C}_\xi^\xi (E)$ nach **35·6·4**.

Im Falle $\xi = 1$ sind die Mengen E_ν von Satz **38·1·3** als $\mathfrak{B}^1$-Mengen offen in E; ist E in sich kompakt, so gibt es also nach **15·5·1** unter den E_ν endlich viele, die E überdecken; beachtet man noch, daß, wenn f und die f_n stetig sind, die Mengen $[\|f_n(\mathfrak{x}) - f(\mathfrak{x})\| < \delta]$ nach **25·8·1** offen in E sind, so erkennt man, daß sich **38·1·3** für $\xi = 1$ auf **28·2·2** reduziert.

Literatur zu Satz **38·1·1**: H. Fried, Monatsh. f. Math. u. Phys. 38 (1931) S. 301; zu Satz **38·1·2**: C. Burstin, Monatsh. f. Math. u. Phys. 27 (1916) S. 292; zu Satz **38·1·3**: B. Gagaeff, Fund. math. 18 (1932) S. 182.

2. **Kompakte Mengen von $\mathfrak{C}_\xi^\xi$-Funktionen.** Gebrauchen wir den Begriff der kompakten Funktionenmenge in dem in § 29, 4 eingeführten Sinne, so gilt:

38·2·1. *Damit die Menge* $\mathfrak{M}$ *von* $\mathfrak{C}_\xi^\xi$-*Funktionen in* E $(\xi > 1)$ *kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem* $\varrho > 0$ *endlich viele Mengen* $A_\nu \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^\xi (E)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *und zu jedem* $f \varepsilon \mathfrak{M}$ n *Zahlen* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *gibt, so daß* $E = \overset{n}{\underset{\nu=1}{S}} A_\nu$ *und* $\|f(x) - c_\nu\| < \varrho$ *für alle* $x \varepsilon A_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

Notwendig: Sei $\mathfrak{M}$ kompakt; nach **9·7·1** und **15·1·4** gibt es endlich viele Funktionen $g_\iota \varepsilon \mathfrak{M}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, die ein $\frac{\varrho}{2}$-Netz in $\mathfrak{M}$ bilden. Nach **35·6·3** gibt es endlich viele Mengen $A_{i\nu} \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^\xi(E)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n_\iota)$ und Zahlen $c_{\iota\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n_\iota)$, so daß $E = \underset{\nu=1}{\overset{n_\iota}{S}} A_{i\nu}$ und $\| g_\iota(x) - c_{i\nu} \| < \frac{\varrho}{2}$ für alle $x \varepsilon A_{i\nu}$. Wir bilden die sämtlichen (endlich vielen) Durchschnitte $A_{1\nu_1} A_{2\nu_2} \ldots A_{k\nu_k}$ $(\nu_1 = 1, 2, \ldots, n_1;\ \nu_2 = 1, 2, \ldots, n_2; \ldots;\ \nu_k = 1, 2, \ldots, n_k)$ und bezeichnen die nicht leeren unter ihnen mit A_1, $A_2, \ldots, A_n$; dann ist $A_\nu \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^\xi(E)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ und $E = \underset{\nu=1}{\overset{n}{S}} A_\nu$. Da $g_1, g_2, \ldots, g_k$ ein $\frac{\varrho}{2}$-Netz in $\mathfrak{M}$ bilden, gehört zu jedem $f \varepsilon \mathfrak{M}$ ein g_ι, so daß $\| f(x) - g_\iota(x) \| < \frac{\varrho}{2}$ für alle $x \varepsilon E$; nach Definition der Mengen A_ν gibt es eine Zahl c_ν, so daß $\| g_\iota(x) - c_\nu \| < \frac{\varrho}{2}$ für alle $x \varepsilon A_\nu$; also ist $\| f(x) - c_\nu \| \leq \| f(x) - g_\iota(x) \| + \| g_\iota(x) - c_\nu \| < \varrho$ für alle $x \varepsilon A_\nu$.
Hinreichend: Um zu zeigen, daß $\mathfrak{M}$ kompakt, genügt es nach **17·3·531** zu zeigen: in jeder Folge $((f_\iota))$ aus $\mathfrak{M}$ gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge. Nach Annahme gibt es für jede natürliche Zahl k endlich viele Mengen $A_{k\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n_k)$ und Konstanten $c_{ik\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n_k)$, so daß $E = \underset{\nu=1}{\overset{n_k}{S}} A_{k\nu}$ und $\| f_\iota(x) - c_{ik\nu} \| < \frac{1}{k}$ für $x \varepsilon A_{k\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n_k)$. Jeder Funktion f_i unserer Folge ist so für jedes k ein System von Zahlen $(c_{ik1}, c_{ik2}, \ldots, c_{ikn_k})$ zugeordnet. Nun gibt es in der Folge $((f_\iota))$ eine Teilfolge $f_1^1, f_2^1, \ldots, f_j^1, \ldots$, so daß die zugeordneten Zahlen c_{i11} gegen einen Grenzwert c_{11}^* im $\overline{R_1}$ konvergieren, die zugeordneten Zahlen c_{i12} gegen einen Grenzwert $c_{12}^*, \ldots$, die zugeordneten Zahlen c_{i1n_1} gegen einen Grenzwert $c_{1n_1}^*$; in $((f_j^1))$ gibt es wieder eine Teilfolge $((f_j^2))$, so daß die zugehörigen Zahlen c_{i21} gegen einen Grenzwert c_{21}^* im $\overline{R_1}$ konvergieren, die zugehörigen Zahlen c_{i22} gegen einen Grenzwert $c_{22}^*, \ldots$, die zugehörigen Zahlen c_{i2n_2} gegen einen Grenzwert $c_{2n_2}^*$ usf. Bilden wir aus den so erhaltenen Folgen $((f_j^1)), ((f_j^2)), ((f_j^3)), \ldots$ die Diagonalfolge $f_1^1, f_2^2, \ldots, f_j^j, \ldots$, so ist dies eine Teilfolge aus $((f_i))$ von folgender Eigenschaft: ist $\tilde{c}_{jk\nu}$ die der Funktion f_j^j zugeordnete Zahl $c_{ik\nu}$, so gilt $\lim\limits_j \tilde{c}_{jk\nu} = c_{k\nu}^*$ für alle k und $\nu = 1, 2, \ldots, n_k$. Es gibt also ein j_k, so daß $\| \tilde{c}_{jk\nu} - \tilde{c}_{j'k\nu} \| < \frac{1}{k}$ für $j > j_k$, $j' > j_k$, $\nu = 1, 2, \ldots, n_k$. Zufolge der

Bedeutung der Zahlen $c_{ik\nu}$ gelten aber in jedem Punkte $x \varepsilon E$ für mindestens ein ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n_k$) die beiden Ungleichungen: $\|f_j^j(x) - \bar{c}_{jk\nu}\| < \frac{1}{k}$, $\|f_{j'}^{j'}(x) - \bar{c}_{j'k\nu}\| < \frac{1}{k}$; für $j > j_k$, $j' > j_k$ und alle $x \varepsilon E$ ist also $\|f_j^j(x) - f_{j'}^{j'}(x)\| < \frac{3}{k}$; es ist also $((f_j^j))$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge aus $((f_\iota))$.

Literatur: P. Veress, Fund. math. 7 (1925) S. 244.

3. Folgen Borelscher Mengen. Ist $((B_\nu))$ eine Folge von $\mathfrak{B}_\xi$-Mengen, so ist $\underset{\nu}{S}\, B_\nu \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^{\xi+1}$. In Ergänzung hierzu gilt:

38·3·1. *Ist $((B_\nu))$ eine Folge disjunkter $\mathfrak{B}_\xi$-Mengen ($\xi > 1$) und $B = \underset{\nu}{S}\, B_\nu$, so ist damit $B \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\xi+1}^{\xi+1}$ sei, notwendig und hinreichend, daß es Mengen $A_\nu \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_\xi^\xi$ gebe, so daß $B_\nu \subseteqq A_\nu$ und $\underset{\nu}{\mathrm{Lim}}\, A_\nu = \Lambda$.*

Notwendig: Ist $B \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\xi+1}^{\xi+1}$, so ist nach **38·4·21** auch $E - B \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\xi+1}^{\xi+1}$, also $E - B = \underset{\nu}{S}\, B'_\nu$ mit $B'_\nu \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_\xi$. Da B_ν fremd zu $(B_1 + B'_1) + \ldots + (B_{\nu-1} + B'_{\nu-1})$, gibt es nach **38·4·61** ein $A_\nu \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_\xi^\xi$, so daß $B_\nu \subseteqq A_\nu$, $(B_1 + B'_1) + \ldots + (B_{\nu-1} + B'_{\nu-1}) \subseteqq E - A_\nu$. Da $E = \underset{\nu}{S}\,(B_\nu + B'_\nu)$, gibt es zu jedem $a \,\varepsilon\, E$ ein n, so daß $a \,\varepsilon\, B_n + B'_n$; da $B_n + B'_n \subseteqq E - A_\nu$ für $\nu > n$, ist $a \sim\varepsilon\, A_\nu$ für fast alle ν, d. h. $\underset{\nu}{\mathrm{Lim}}\, A_\nu = \Lambda$. Hinreichend[1]): Da $B_\nu \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_\xi$, ist auch $B_\nu \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\xi+1}^{\xi+1}$, also gibt es nach § 33 (4·32) in $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ eine Folge $B_{\nu 1}, B_{\nu 2}, \ldots, B_{\nu\lambda}, \ldots$, so daß $B_\nu = \underset{\lambda}{\mathrm{Lim}}\, B_{\nu\lambda}$. Wir setzen: $C_\lambda = B_{1\lambda} A_1 + B_{2\lambda} A_2 + \ldots + B_{\lambda\lambda} A_\lambda$; dann ist $C_\lambda \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_\xi^\xi$. Um zu zeigen, daß $B \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\xi+1}^{\xi+1}$, genügt es also nach § 33 (4·32) zu zeigen, daß $B = \underset{\lambda}{\mathrm{Lim}}\, C_\lambda$; d. h. wir haben zu zeigen: ist $a \,\varepsilon\, B$, so auch $a \,\varepsilon\, C_\lambda$ für fast alle λ; ist $a \sim\varepsilon\, B$, so auch $a \sim\varepsilon\, C_\lambda$ für fast alle λ. Sei also $a \,\varepsilon\, B$; dann gibt es ein n, so daß $a \,\varepsilon\, B_n$; dann ist auch $a \,\varepsilon\, A_n$, und es gibt ein λ^*, so daß $a \,\varepsilon\, B_{n\lambda}$ für $\lambda > \lambda^*$; also ist $a \,\varepsilon\, C_\lambda$, sobald $\lambda > \lambda^*$ und $\lambda > n$. Sei sodann $a \sim\varepsilon\, B$; wegen $\underset{\nu}{\mathrm{Lim}}\, A_\nu = \Lambda$ gibt es ein n, so daß $a \sim\varepsilon\, A_\nu$ für $\nu > n$; wegen $a \sim\varepsilon\, B$ ist auch $a \sim\varepsilon\, B_\nu$ für alle ν; mithin gibt es ein λ^*, so daß $a \sim\varepsilon\, B_{\nu\lambda}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ und $\lambda > \lambda^*$; dann aber ist auch $a \sim\varepsilon\, C_\lambda$ für $\lambda > \lambda^*$.

38·3·2. *Ist $B \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\xi+1}^{\xi+1}$ ($\xi > 1$), so gibt es eine Folge disjunkter Mengen $B_\nu \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_\xi$, so daß $B = \underset{\nu}{S}\, B_\nu$.*

---

[1]) Bei diesem Teil des Beweises kann die Voraussetzung $B_\nu \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^\xi$ auch durch die weitere $B_\nu \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\xi+1}^{\xi+1}$ ersetzt werden, und die Voraussetzung, die B_ν seien disjunkt, kann weggelassen werden.

Nach § 33 (4·32) ist $B = \operatorname{Lim}_{\lambda} C_\lambda$ mit $C_\lambda \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}_{\xi}$, also ist auch $B = \underline{\operatorname{Lim}}_{\lambda} C_\lambda$, und mithin nach § 3 (7·1), wenn $D_\lambda = \underset{\mu \geq \lambda}{D} C_\mu$ gesetzt wird: $B = \underset{\lambda}{S} D_\lambda = D_1 + (D_2 - D_1) + (D_3 - D_2) + \ldots$; hierin sind die Mengen D_1, $D_2 - D_1$, $D_3 - D_2$, ... disjunkt. Wegen $C_\mu \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}_{\xi}$ ist nach § 33 (4·31): $D_\lambda \varepsilon \mathfrak{B}_\xi$, und da $D_{\lambda-1} - D_\lambda = D_{\lambda+1}(E - C_\lambda)$, und da nach **33·4·21** auch $E - C_\lambda \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi}_{\xi}$, so ist auch $D_{\lambda+1} - D_\lambda \varepsilon \mathfrak{B}_\xi$.

38·3·21. *Ist $B \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi-1}$ $(\xi > 1)$, so gibt es eine Folge disjunkter Mengen $B_\nu \varepsilon \mathfrak{B}_\xi$, so daß $B = \underset{\nu}{S} B_\nu$.*

Nach § 33 (4·31) ist $B = \underset{\nu}{S} C_\nu$ mit $C_\nu \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi-1}_{\xi+1}$, und wegen **33·4·32** kann nach **3·3·11** angenommen werden, daß die Summanden C_ν disjunkt sind; also folgt die Behauptung aus **38·3·2**.

Für $\xi = 1$ gilt nur:

38·3·211. *Ist $B \varepsilon \mathfrak{B}^2$, so gibt es eine Folge von Mengen $B_\nu \varepsilon \mathfrak{B}_1$, so daß $B = \underset{\nu}{S} B_\nu$ und der Durchschnitt je dreier Mengen B_ν leer ist.*

Die Menge B ist ein F_σ, also $B = \underset{\nu}{S} F_\nu$, wo F_ν abgeschlossen; dabei kann $F_\nu \subseteqq F_{\nu-1}$ angenommen werden; dann ist $B = F_1 + (F_2 - F_1) + \ldots$ Es ist also nur zu zeigen: sind F' und F'' abgeschlossen, so ist $F' - F'' = \underset{\nu}{S} C_\nu$, wo C_ν abgeschlossen und der Durchschnitt je dreier C_ν leer ist. Zu dem Zwecke bezeichnen wir mit C_1 die Menge aller Punkte $x \varepsilon F'$, für die $xF'' \geq 1$, mit C_ν $(\nu > 1)$ die Menge aller Punkte $x \varepsilon F'$, für die $\frac{1}{\nu - 1} \geq xF'' \geq \frac{1}{\nu}$; dann ist C_ν abgeschlossen, der Durchschnitt je dreier C_ν ist leer und $F' - F'' = \underset{\nu}{S} C_\nu$.

38·3·212. *Ist $B \varepsilon \mathfrak{B}^\xi$ (ξ Grenzzahl), so gibt es eine Folge disjunkter Mengen $B_\nu \varepsilon \mathfrak{B}_{\eta_\nu}$ $(\eta_\nu < \xi)$, so daß $B = \underset{\nu}{S} B_\nu$.*

Da nach § 33 (4·21) $\mathfrak{B}^\xi = (\underset{\eta<\xi}{S} \mathfrak{B}^\eta)^1$, ist $B = \underset{\nu}{S} A_\nu$, wo $A_\nu \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi_\nu}$ $(\xi_\nu < \xi)$; dabei kann angenommen werden: $\xi_\nu < \xi_{\nu-1}$ und $A_\nu \subseteqq A_{\nu+1}$; dann ist $B = \underset{\nu}{S}(A_\nu - A_{\nu-1})$ (wo $A_0 = A$); wegen $A_{\nu-1} \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi_{\nu-1}}$ ist $E - A_{\nu-1} \varepsilon \mathfrak{B}_{\xi_{\nu-1}}$, also wegen $\xi_{\nu-1} < \xi_\nu$ auch $E - A_{\nu-1} \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi_\nu}$; setzen wir $B_\nu = A_\nu - A_{\nu-1}$, so ist also $B_\nu \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi_\nu}$; setzen wir noch $\xi_\nu + 1 = \eta_\nu$, so ist $\eta_\nu < \xi$, $B_\nu \varepsilon \mathfrak{B}_{\eta_\nu}$, $B = \underset{\nu}{S} B_\nu$ und die B_ν sind disjunkt.

Sei nun E wie in § 31, 1 eine ganz beliebige Menge, $\mathfrak{M}$ ein System von Teilen von E. Dann gilt:

38·3·3. *Für jede Mengenfolge $((M_n))$ aus $\mathfrak{M}$ ist $\overline{\operatorname{Lim}}_{n} M_n \varepsilon \mathfrak{M}_2$, $\underline{\operatorname{Lim}}_{n} M_n \varepsilon \mathfrak{M}^2$.*

Dies folgt aus § 3 (7·1).

Sei insbesondere E ein metrischer Raum. Dann gelten für die Borelschen Mengen in E folgende Sätze:

38·3·31. *Ist* $((A_n))$ *eine Mengenfolge aus* $\mathfrak{B}^\xi$ (*bzw. aus* $\mathfrak{B}_\xi$), *so ist* $\overline{\mathrm{Lim}}_n\, A_n \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\xi+1}$, $\underline{\mathrm{Lim}}_n\, A_n \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^{\xi+2}$ (*bzw.* $\underline{\mathrm{Lim}}_n\, A_n \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^{\xi+1}$, $\overline{\mathrm{Lim}}_n\, A_n \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\xi+2}$).

Nach § 33 (4·3) ist $(\mathfrak{B}^\xi)_1 = \mathfrak{B}_{\xi+1}$, $(\mathfrak{B}^\xi)^1 = \mathfrak{B}^\xi$, also $(\mathfrak{B}^\xi)^2 = \mathfrak{B}^{\xi+2}$, $(\mathfrak{B}^\xi)_2 = \mathfrak{B}_{\xi+1}$; die Behauptung folgt also aus **38·3·3**.

38·3·32. *Ist* $((A_n))$ *eine Mengenfolge aus* $\mathfrak{B}^\xi_\xi$, *so ist* $\overline{\mathrm{Lim}}_n\, A_n \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\xi+1}$, $\underline{\mathrm{Lim}}_n\, A_n \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^{\xi+1}$.

Dies folgt wegen $\mathfrak{B}^\xi_\xi \subseteq \mathfrak{B}^\xi$, $\mathfrak{B}^\xi_\xi \subseteq \mathfrak{B}_\xi$ aus **38·3·31**.

38·3·4. *Ist* $A \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\xi+1}$ (*bzw.* $A \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^{\xi+1}$) $(\xi > 1)$, *so gibt es eine Folge* $((A_n))$, *so daß* $A_n \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\eta_n}$ (*bzw.* $A_n \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^{\eta_n}$) $(\eta_n < \xi)$ *und* $\overline{\mathrm{Lim}}_n\, A_n = A$ (*bzw.* $\underline{\mathrm{Lim}}_n\, A_n = A$).

Da $A \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\xi+1}$, ist $A = \mathfrak{D}_n\, B_n$, wo $B_n \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^\xi$, und nach **3·2·11** kann noch angenommen werden: $B_{n+1} \subseteq B_n$; nach **38·3·21**, **38·3·211**, **38·3·212** ist $B_n = \mathfrak{S}_\nu\, B_{n\nu}$, wo $B_{n\nu} \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\eta_{n\nu}}$ $(\eta_{n\nu} < \xi)$, und der Durchschnitt je zweier, bzw. je dreier Summanden $= \Lambda$ ist. Ist $a \,\varepsilon\, A$, so $a \,\varepsilon\, B_n$ für alle n, also $a \,\varepsilon\, B_{n\nu}$ für unendlich viele Indizespaare (n, ν); gilt umgekehrt $a \,\varepsilon\, B_{n\nu}$ für unendlich viele Indizespaare, so müssen, da je zwei, bzw. drei $B_{n\nu}$ von gleichem Index n leeren Durchschnitt haben, in diesen Indizespaaren unendlich viele verschiedene n vorkommen; also ist $a \,\varepsilon\, B_n$ für unendlich viele n, und weil $((B_n))$ monoton abnimmt, $a \,\varepsilon\, B_n$ für alle n, d. h. $a \,\varepsilon\, A$. Ordnen wir die $B_{n\nu}$ $(n, \nu = 1, 2, \ldots)$ in eine Folge $((A_i))$, so ist demnach $\overline{\mathrm{Lim}}_i\, A_i = A$. — Die den $\underline{\mathrm{Lim}}$ betreffende Behauptung ergibt sich hieraus nach **38·4·2** und § 3 (7·21) durch Komplementbildung.

38·3·41. *Ist* $A \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\xi+1}$ (*bzw.* $A \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^{\xi+1}$) $(\xi > 1)$, *so gibt es in* $\mathfrak{B}^\xi_\xi$ *eine Folge* $((A_n))$, *so daß* $\overline{\mathrm{Lim}}_n\, A_n = A$ (*bzw.* $\underline{\mathrm{Lim}}_n\, A_n = A$).

Dies folgt, da $\mathfrak{B}_\eta \subseteq \mathfrak{B}^\xi_\xi$ für $\eta < \xi$, aus **38·3·4**.

38·3·5. *Ist* $\overline{A} \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\xi+1}$, $\underline{A} \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^{\xi+2}$ (*bzw.* $\underline{A} \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^{\xi+1}$, $\overline{A} \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\xi+2}$) *und* $\underline{A} \subseteq \overline{A}$, *so gibt es in* $\mathfrak{B}^\xi$ (*bzw. in* $\mathfrak{B}_\xi$) *eine Mengenfolge* $((A_n))$, *so daß* $\overline{\mathrm{Lim}}_n\, A_n = \overline{A}$, $\underline{\mathrm{Lim}}_n\, A_n = \underline{A}$.

Da $\overline{A} \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\xi+1}$, gibt es in $\mathfrak{B}^\xi$ eine monoton abnehmende Mengenfolge $((A'_n))$ mit $\mathfrak{D}_n\, A'_n = \overline{A}$; dann ist auch $\mathrm{Lim}_n\, A'_n = \overline{A}$. Nach **38·3·4** gibt es in

$\mathfrak{B}^\xi$ eine Mengenfolge $((A''_n))$ mit $\underline{\mathrm{Lim}}_n\, A''_n = \underline{A}$. Setzen wir $A_{2n-1} = A'_n$, $A_{2n} = A'_n A''_n$, so ist $\underline{\mathrm{Lim}}_n\, A_{2n-1} = \overline{\mathrm{Lim}}_n\, A_{2n-1} = \overline{A}$, und nach § 3 (7·4): $\underline{\mathrm{Lim}}_n\, A_{2n} = \underline{A}$, $\overline{\mathrm{Lim}}_n\, A_{2n} \subseteq \overline{A}$, also $\underline{\mathrm{Lim}}_n\, A_n = \underline{A}$, $\overline{\mathrm{Lim}}_n\, A_n = \overline{A}$.

38·3·51. *Ist* $\overline{A} \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\xi+1}$, $\underline{A} \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^{\xi+1}$ $(\xi > 1)$ *und* $\underline{A} \subseteq \overline{A}$, *so gibt es in* $\mathfrak{B}^\xi_\xi$ *eine Mengenfolge* $((A_n))$, *so daß* $\overline{\mathrm{Lim}}_n\, A_n = \overline{A}$, $\underline{\mathrm{Lim}}_n\, A_n = \underline{A}$.

Nach **38·3·41** gibt es in $\mathfrak{B}^\xi_\xi$ Mengenfolgen $((A'_n))$, $((A''_n))$, so daß $\overline{\mathrm{Lim}}_n\, A'_n = \overline{A}$, $\underline{\mathrm{Lim}}_n\, A''_n = \underline{A}$. Da $\overline{A} \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\xi+1}$, $\underline{A} \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^{\xi+1}$, gibt es in $\mathfrak{B}^\xi$ eine monoton abnehmende Mengenfolge $((\overline{A}_n))$, in $\mathfrak{B}_\xi$ eine monoton wachsende Mengenfolge $((\underline{A}_n))$, so daß $D_n\, \overline{A}_n = \overline{A}$, $S_n\, \underline{A}_n = \underline{A}$, also auch $\mathrm{Lim}_n\, \overline{A}_n = \overline{A}$, $\mathrm{Lim}_n\, \underline{A}_n = \underline{A}$; wegen $\underline{A} \subseteq \overline{A}$ ist auch $\underline{A}_n \subseteq \overline{A}_n$, also gibt es nach **38·4·6** ein $\tilde{A}_n \,\varepsilon\, \mathfrak{B}^\xi_\xi$, so daß $\underline{A}_n \subseteq \tilde{A}_n \subseteq \overline{A}_n$; dann ist $\underline{A} \subseteq \underline{\mathrm{Lim}}_n\, \tilde{A}_n \subseteq \overline{\mathrm{Lim}}_n\, \tilde{A}_n \subseteq \overline{A}$. Setzen wir $A_{2n-1} = \tilde{A}_n + A'_n$, $A_{2n} = \tilde{A}_n A''_n$, so ist nach § 3 (7·3), (7·4): $\underline{A} \subseteq \underline{\mathrm{Lim}}_n\, \tilde{A}_n \subseteq \underline{\mathrm{Lim}}_n\, A_{2n-1} \subseteq \overline{\mathrm{Lim}}_n\, A_{2n-1} = \overline{A}$; $\underline{A} = \underline{\mathrm{Lim}}_n\, A_{2n} \subseteq \overline{\mathrm{Lim}}_n\, A_{2n} \subseteq \overline{\mathrm{Lim}}_n\, \tilde{A}_n \subseteq \overline{A}$; also ist $\underline{\mathrm{Lim}}_n\, A_n = \underline{A}$, $\overline{\mathrm{Lim}}_n\, A_n = \overline{A}$.

Literatur: W. Sierpiński, Fund. math. 6 (1924) S. 21; Vést. král. čes. spol. nauk Tř. 2, roč. 1931; N. Lusin, Leç. s. l. ensembles analytiques S. 74 ff.

4. Supremum und Infimum einer Folge Bairescher Funktionen. Sei E wie in § 30, 1 eine ganz beliebige Menge; alle im folgenden auftretenden Funktionen sind Funktionen auf E; $\mathfrak{S}$ bedeutet ein System von Funktionen auf E. Dann gilt:

38·4·1. *Ist* $\mathfrak{S}$ *völlig autark, und ist* $\underline{f} \le \overline{f}$, *so ist, damit es in* $\mathfrak{S}$ *eine Funktionenfolge* $((f_n))$ *mit* $\sup_n f_n = \overline{f}$, $\inf_n f_n = \underline{f}$ *gebe, notwendig und hinreichend, daß* $\overline{f} \,\varepsilon\, \mathfrak{S}^1$, $\underline{f} \,\varepsilon\, \mathfrak{S}_1$ *sei.*

Notwendig: Dies folgt aus **31·2·2.** Hinreichend: Wegen $\overline{f} \,\varepsilon\, \mathfrak{S}^1$, $\underline{f} \,\varepsilon\, \mathfrak{S}_1$ gibt es in $\mathfrak{S}$ eine monoton wachsende Folge $((f'_n))$ und eine monoton abnehmende Folge $((f''_n))$, so daß $\lim_n f'_n = \overline{f}$, $\lim_n f''_n = \underline{f}$. Ferner gibt es nach **32·2·11** ein $f \,\varepsilon\, \mathfrak{S}$, so daß $\underline{f} \le f \le \overline{f}$. Setzen wir $f_{2n-1} = \max(f'_n, f)$, $f_{2n} = \min(f''_n, f)$, so ist $\sup_n f_n = \overline{f}$, $\inf_n f_n = \underline{f}$.

38·4·2. *Ist $\mathfrak{S}$ autark, und ist $\underline{f} \leq \bar{f}$, so ist, damit es in $\mathfrak{S}^\xi$ (bzw. in $\mathfrak{S}_\xi$) eine Funktionenfolge $((f_n))$ mit $\sup\limits_n f_n = \bar{f}$, $\inf\limits_n f_n = \underline{f}$ gebe, notwendig und hinreichend, daß $\bar{f}\, \varepsilon\, \mathfrak{S}^\xi$, $\underline{f}\, \varepsilon\, \mathfrak{S}_{\xi+1}$ (bzw. $\underline{f}\, \varepsilon\, \mathfrak{S}_\xi$, $\bar{f}\, \varepsilon\, \mathfrak{S}^{\xi+1}$) sei.*

Nach **34·1·4** ist $\mathfrak{S}^\xi$ völlig autark; nach **34·1·32** ist $(\mathfrak{S}^\xi)^1 = \mathfrak{S}^\xi$ und nach **34·1·3** $(\mathfrak{S}^\xi)_1 = \mathfrak{S}_{\xi-1}$. Die Behauptung folgt also aus **38·4·1.**

38·4·3. *Ist $\mathfrak{S}$ autark, und ist $\underline{f} \leq \bar{f}$, so ist, damit es in $\mathfrak{S}_\xi^\xi$ eine Funktionenfolge $((f_n))$ mit $\sup\limits_n f_n = \bar{f}$, $\inf\limits_n f_n = \underline{f}$ gebe, notwendig und hinreichend, daß $\bar{f}\, \varepsilon\, \mathfrak{S}^\xi$, $\underline{f}\, \varepsilon\, \mathfrak{S}_\xi$ sei.*

Nach **34·2·2** ist $\mathfrak{S}_\xi^\xi$ völlig autark; nach **34·2·3** ist $(\mathfrak{S}_\xi^\xi)^1 = \mathfrak{S}^\xi$, $(\mathfrak{S}_\xi^\xi)_1 = \mathfrak{S}_\xi$; die Behauptung folgt also aus **38·4·1.**

5. Limes superior und inferior einer Folge Bairescher Funktionen. Sei wieder E eine beliebige Menge, $\mathfrak{S}$ ein Funktionensystem auf E.

38·5·1. *Ist $\mathfrak{S}$ autark, $((f_n))$ eine Funktionenfolge aus $\mathfrak{S}$, so ist $\overline{\lim\limits_n} f_n\, \varepsilon\, \mathfrak{S}_2$, $\underline{\lim\limits_n} f_n\, \varepsilon\, \mathfrak{S}^2$.*

Setzen wir $\sup\limits_{n \geq \nu} f_n = g_\nu$, so ist $((g_\nu))$ monoton abnehmend und $\overline{\lim\limits_n} f_n = \lim\limits_\nu g_\nu$; da nach **31·2·2** $g_\nu\, \varepsilon\, \mathfrak{S}^1$, ist $\overline{\lim\limits_n} f_n\, \varepsilon\, \mathfrak{S}_2$.

Um hiervon die Umkehrung zu beweisen, schicken wir einige Hilfsbetrachtungen voraus.

Sei $\mathfrak{S}$ ein autarkes Funktionensystem auf E; wir setzen $\bar{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}$ (bzw. $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{N}$). Ist dann $A\, \varepsilon\, \mathfrak{M}^1$ (bzw. $A\, \varepsilon\, \mathfrak{N}_1$), c eine beliebige Zahl, und bezeichnet f die Funktion, die $= c$ ist auf A und $= -\infty$ (bzw. $= +\infty$) auf $E - A$, so ist nach **31·2·51:** $f\, \varepsilon\, \mathfrak{S}^1$ (bzw. $f\, \varepsilon\, \mathfrak{S}_1$); es gibt also nach **38·4·1** in $\mathfrak{S}$ eine Funktionenfolge $((f_n))$ mit $\sup\limits_n f_n = f$ (bzw. $\inf\limits_n f_n = f$). Wir wollen $\mathfrak{S}$ ein γ^1-S y s t e m (bzw. γ_1-S y s t e m) nennen, wenn sich die Folge $((f_n))$ insbesondere so wählen läßt, daß für jedes $x\, \varepsilon\, E$ höchstens endlich viele Funktionswerte $f_n(x) \neq -\infty$ (bzw. $\neq +\infty$) sind. Ist das System $\mathfrak{S}$ sowohl ein γ^1-System als auch ein γ_1-System, so nennen wir es ein γ_1^1-S y s t e m.

Ist insbesondere E ein metrischer Raum, so gilt:

38·5·2. *Das System $\mathfrak{C}$ der stetigen Funktionen auf E ist ein γ_1^1-System.*

Setzen wir $\bar{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{M}$, so ist nach § 35 (2) $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}^1$, somit auch $\mathfrak{M}^1 = \mathfrak{B}^1$. Sei also $A\, \varepsilon\, \mathfrak{B}^1$ und $f = c$ auf A, $= -\infty$ auf $E - A$. Bezeichnet $\varrho(x)$ den Abstand des Punktes x von der Menge $E - A$, und A_1 die Menge

$[\varrho(\mathfrak{x}) \geq 1]$, $A_n (n > 1)$ die Menge $\left[\frac{1}{n} \leq \varrho(\mathfrak{x}) \leq \frac{1}{n-1}\right]$, so sind die Mengen $A_n (n = 1, 2, \ldots)$ nach **10·2·3** und **10·2·4** abgeschlossen, der Durchschnitt je dreier A_n ist leer, und weil A offen, also $E - A$ abgeschlossen in E, ist $A = \underset{n}{S} A_n$. Da A_n, sowie $\underset{\nu \leq n-2}{S} A_\nu = \left[\varrho(\mathfrak{x}) \geq \frac{1}{n-2}\right]$ und $(E-A) + \underset{\nu \geq n+2}{S} A_\nu = \left[\varrho(\mathfrak{x}) \leq \frac{1}{n+1}\right]$ abgeschlossen, gibt es nach **32·4·131** ein $f_n \varepsilon \mathfrak{C}$, so daß $f_n = c$ auf A_n, $= -\infty$ auf $E - A$ und auf A_ν für $\nu \leq n - 2$ und $\nu \geq n + 2$; indem man nach § 30 (3) f_n durch $(f_n)^c$ ersetzt, kann man annehmen: $f_n \leq c$. Dann ist $\sup\limits_n f_n = f$, und in einem Punkte x sind höchstens drei $f_n(x) \neq -\infty$. Also ist $\mathfrak{C}$ ein γ^1-System, und analog zeigt man, daß $\mathfrak{C}$ ein γ_1-System.

38·5·21. *Für jedes $\xi \geq 1$ ist das System $\mathfrak{C}^\xi$ (bzw. $\mathfrak{C}_\xi$) ein γ_1^1-System.*

Setzen wir $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}^\xi) = \mathfrak{M}$, so ist nach **35·2·11** $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}^\xi$, somit auch $\mathfrak{M}^1 = \mathfrak{B}^\xi$. Sei also $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi$ und $f = c$ auf A, $= -\infty$ auf $E - A$; nach **35·2·1** ist $f \varepsilon \mathfrak{C}^\xi$. Setzen wir $f_1 = f$, $f_n = -\infty$ für $n > 1$, so ist demnach $((f_n))$ eine Funktionenfolge aus $\mathfrak{C}^\xi$, es ist $\sup\limits_n f_n = f$, und für jedes x ist höchstens ein $f_n(x) \neq -\infty$; somit ist $\mathfrak{C}^\xi$ ein γ^1-System. — Sei sodann $\mathfrak{G}(\mathfrak{C}^\xi) = \mathfrak{N}$; da nach **35·2·11** $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}^\xi) = \mathfrak{B}_{\xi+1}$, ist durch Komplementbildung $\overline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{B}^{\xi+1}$, somit auch $\mathfrak{N}^1 = \mathfrak{B}^{\xi+1}$. Sei also $A \varepsilon \mathfrak{B}^{\xi+1}$ und $f = c$ auf A, $= +\infty$ auf $E - A$; nach **38·3·21**, **38·3·211** gibt es in $\mathfrak{B}_\xi$ eine Mengenfolge $((A_n))$, so daß $A = \underset{n}{S} A_n$ und der Durchschnitt je dreier A_n leer ist; setzen wir $f_n = c$ auf A_n, $= +\infty$ auf $E - A_n$, so ist wegen $E - A_n \varepsilon \mathfrak{B}^\xi$ nach **35·2·1** $f_n \varepsilon \mathfrak{C}^\xi$, es ist $\inf\limits_n f_n = f$, und für jedes x sind höchstens zwei $f_n(x) \neq +\infty$; somit ist $\mathfrak{C}^\xi$ ein γ_1-System.

38·5·22. *Für jedes $\xi \geq 1$ ist das System $\mathfrak{C}_\xi^\xi$ ein γ_1^1-System.*

Da nach § 35 (1) $\mathfrak{C}_1^1 = \mathfrak{C}$, ist die Behauptung nach **38·5·2** richtig für $\xi = 1$. Sei also $\xi > 1$. Setzen wir $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}_\xi^\xi) = \mathfrak{M}$, so ist nach **35·2·21** $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}^\xi$, somit auch $\mathfrak{M}^1 = \mathfrak{B}^\xi$. Sei also $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi$ und $f = c$ auf A, $= -\infty$ auf $E - A$; nach **38·3·21**, **38·3·211**, **38·3·212** gibt es eine Mengenfolge $((A_n))$, so daß $A_n \varepsilon \mathfrak{B}_{\eta_n} (\eta_n < \xi)$, $A = \underset{n}{S} A_n$ und der Durchschnitt je dreier A_n leer ist; setzen wir $f_n = c$ auf A_n, $= -\infty$ auf $E - A_n$, so ist wegen $E - A_n \varepsilon \mathfrak{B}^{\eta_n}$ nach **35·2·1** $f_n \varepsilon \mathfrak{C}_{\eta_n}$, wegen $\eta_n < \xi$ also $f_n \varepsilon \mathfrak{C}_\xi^\xi$; es ist $\sup\limits_n f_n = f$ und für jedes x sind höchstens zwei $f_n(x) \neq -\infty$; also ist $\mathfrak{C}_\xi^\xi$ ein γ^1-System, und analog zeigt man, daß $\mathfrak{C}_\xi^\xi$ ein γ_1-System.

Nun beweisen wir als Umkehrung von 38·5·1:

38·5·3. *Ist $\mathfrak{S}$ ein autarkes γ^1-System (bzw. γ_1-System), so gibt es in $\mathfrak{S}$ zu jedem $f \varepsilon \mathfrak{S}_2$ (bzw. $f \varepsilon \mathfrak{S}^2$) eine Folge $((f_n))$ mit $\overline{\lim\limits_n}\, f_n = f$ (bzw. $\underline{\lim\limits_n}\, f_n = f$).*

Sei $f \varepsilon \mathfrak{S}_2$. Setzen wir $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}$, $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{Q}$, so ist nach 31·4·21: $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}_2) = \mathfrak{Q}^2$, also durch Komplementbildung: $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}_2) = \mathfrak{M}_2$. Seien r_1, $r_2, \ldots, r_\nu, \ldots$ die sämtlichen rationalen Zahlen; wir setzen: $[f(\mathfrak{x}) \geq r_\nu] = B_\nu$ und zeigen, daß es Mengen $B_{\nu i} \varepsilon \mathfrak{M}^1$ gibt, so daß $B_\nu = \underset{i}{D}\, B_{\nu i}$, $B_{\nu i+1} \subseteqq B_{\nu i}$ und $B_{\lambda i} \subseteqq B_{\nu i}$, wenn $r_\lambda > r_\nu$. Wegen $B_\nu \varepsilon \mathfrak{M}_2$ ist $B_\nu = \underset{i}{D}\, C_{\nu i}$ mit $C_{\nu i} \varepsilon \mathfrak{M}^1$, und da nach 30·3·8 $\mathfrak{M}$ ein Ring, also nach 3·5·1 auch $\mathfrak{M}^1$ ein Ring, kann angenommen werden: $C_{\nu i+1} \subseteqq C_{\nu i}$; nun definieren wir die gesuchten $B_{\nu i}$ durch Induktion: wir setzen $B_{1i} = C_{1i}\,(i = 1, 2, \ldots)$ und nehmen an, für $\varkappa = 1, 2, \ldots, \nu - 1$ seien die $B_{\varkappa i}$ schon definiert; bedeutet dann K' (bzw. K'') die Menge derjenigen Indizes $\varkappa = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, für die $r_\varkappa < r_\nu$ (bzw. $r_\varkappa > r_\nu$) ist, so setzen wir[1]): $B_{\nu i} = C_{\nu i} \underset{\varkappa \varepsilon K'}{D}\, B_{\varkappa i} + \underset{\varkappa \varepsilon K''}{S}\, B_{\varkappa i}$; da $\mathfrak{M}^1$ ein Ring, ist dann auch $B_{\nu i} \varepsilon \mathfrak{M}^1$, und es ist $B_{\nu i+1} \subseteqq B_{\nu i}$; wegen $\underset{i}{\mathrm{Lim}}\, C_{\nu i} = B_\nu$, $\underset{i}{\mathrm{Lim}}\, B_{\varkappa i} = B_\varkappa$ und $B_\varkappa \supseteqq B_\nu$ für $\varkappa \varepsilon K'$, $B_\varkappa \subseteqq B_\nu$ für $\varkappa \varepsilon K''$ ist dann: $\underset{i}{D}\, B_{\nu i} = \underset{i}{\mathrm{Lim}}\, B_{\nu i} = B_\nu \underset{\varkappa \varepsilon K'}{D}\, B_\varkappa + \underset{\varkappa \varepsilon K''}{S}\, B_\varkappa = B_\nu$, und wegen $\underset{\varkappa \varepsilon K''}{S}\, B_{\varkappa i} \subseteqq \underset{\varkappa \varepsilon K'}{D}\, B_{\varkappa i}$ ist $B_{\nu i} \subseteqq B_{\varkappa i}$ für $\varkappa \varepsilon K'$, $B_{\nu i} \supseteqq B_{\varkappa i}$ für $\varkappa \varepsilon K''$; die $B_{\nu i}$ leisten also das Verlangte. — Nun ordnen wir die $B_{\nu i}$ mit $i \geq \nu$ in eine einfache Folge: $B_1^*, B_2^*, \ldots, B_n^*, \ldots$; ist $B_n^* = B_{\nu i}$, so setzen wir $r_n^* = r_\nu$. Sei f_n die Funktion, die $= r_n^*$ ist auf B_n^* und $= -\infty$ auf $E - B_n^*$; weil $\mathfrak{S}$ ein γ^1-System, gibt es in $\mathfrak{S}$ eine Funktionenfolge f_{n1}, $f_{n2}, \ldots, f_{nj}, \ldots$, so daß $\sup\limits_j f_{nj} = f_n$ und in jedem Punkte x nur endlich viele Funktionswerte $f_{nj}(x) \neq -\infty$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Nun ordnen wir die f_{nj} in eine einfache Folge $f_1, f_2, \ldots, f_l, \ldots$ und zeigen, daß $\overline{\lim\limits_l}\, f_l = f$. Sei $\overline{\lim\limits_l}\, f_l = g$; nach 30·1·31 genügt es, zu zeigen, daß $[g(\mathfrak{x}) \geq r_\nu] = [f(\mathfrak{x}) \geq r_\nu] = B_\nu$ für alle ν. Sei $x \varepsilon B_\nu$; dann ist $x \varepsilon B_{\nu i}$ für alle i; nach Definition der Folge $((B_n^*))$ kommt, sobald $i \geq \nu$, $B_{\nu i}$ in dieser Folge vor, etwa $B_{\nu i} = B_{n_i}^*$; dann ist $r_\nu = r_{n_i}^*$; wegen $x \varepsilon B_{\nu i}$ ist $\sup\limits_j f_{n_i j}(x) = r_\nu$, und da dies für alle $i \geq \nu$ gilt, ist offenbar: $\overline{\lim\limits_l}\, f_l(x) \geq r_\nu$, d.h. $g(x) \geq r_\nu$; aus $x \varepsilon B_\nu$ folgt also $x \varepsilon [g(\mathfrak{x}) \geq r_\nu]$. Wir haben noch zu

---

[1]) Ist $K' = \Lambda$, so ist hierin $\underset{\varkappa \varepsilon K'}{D}\, B_{\varkappa i} = E$ zu setzen; ist $K'' = \Lambda$, so ist $\underset{\varkappa \varepsilon K''}{S}\, B_{\varkappa i} = \Lambda$ zu setzen.

zeigen, daß auch umgekehrt aus $x \sim \varepsilon B_\nu$ folgt $x \sim \varepsilon [g(\hat{x}) \geq r_\nu]$. Sei also $x \sim \varepsilon B_\nu$, d. h. $f(x) < r_\nu$; dann gibt es ein r_λ, so daß $f(x) < r_\lambda < r_\nu$, und somit ist auch $x \sim \varepsilon B_\lambda$; daher gibt es ein i_0, so daß $x \sim \varepsilon B_{\lambda i}$ für $i \geq i_0$; sei K die Menge derjenigen Indizes $\varkappa$, für die $r_\varkappa \geq r_\lambda$; da $B_{\varkappa i} \subseteqq B_{\lambda i}$ für $\varkappa \varepsilon K$, ist auch $x \sim \varepsilon B_{\varkappa i}$ für $\varkappa \varepsilon K$ und $i \geq i_0$. Wir betrachten nun wieder die Mengenfolge $((B_n^*))$; ist $B_n^* = B_{\varkappa i}$, so folgt aus der Definition der Funktionen f_{nj}: ist $\varkappa \varepsilon K$ und $i \geq i_0$, so ist (wegen $x \sim \varepsilon B_{\varkappa i}$): $f_{nj}(x) = -\infty$ für alle j; ist hingegen $\varkappa \sim \varepsilon K$, also $r_\varkappa < r_\lambda$, so ist $f_{nj}(x) \leq r_\lambda$ für alle j; da nun die Mengen B_n^* nichts anderes als die Mengen $B_{\varkappa i}$ mit $i \geq \varkappa$ waren, also unter ihnen nur endlich viele $B_{\varkappa i}$ mit $i < i_0$ vorkommen, gibt es höchstens endlich viele n derart, daß in der Folge $f_{nj}(x)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ Funktionswerte $> r_\lambda$ vorkommen; und da für jedes einzelne n in der Folge $f_{nj}(x)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ höchstens endlich viele Funktionswerte $\neq -\infty$ vorkommen, gibt es unter den Funktionswerten $f_{nj}(x)$ $(n, j = 1, 2, \ldots)$ höchstens endlich viele, die $> r_\lambda$ sind; also ist $\overline{\lim\limits_l} f_l(x) \leq r_\lambda < r_\nu$, d. h. $x \sim \varepsilon [g(\hat{x}) \geq r_\nu]$, w. z. b. w.

38·5·31. *Ist $\mathfrak{S}$ völlig autark, ist $g \varepsilon \mathfrak{S}^2$, $h \varepsilon \mathfrak{S}_2$ und $g \leq h$, so gibt es in $\mathfrak{S}$ eine Funktionenfolge $((f_n))$, so daß $g \leq \underline{\lim\limits_n} f_n \leq \overline{\lim\limits_n} f_n \leq h$.*

Da $g \varepsilon \mathfrak{S}^2$, $h \varepsilon \mathfrak{S}_2$, gibt es in $\mathfrak{S}_1$ eine monoton wachsende Folge $((g_n))$, in $\mathfrak{S}^1$ eine monoton abnehmende Folge $((h_n))$, so daß $\lim\limits_n g_n = g$, $\lim\limits_n h_n = h$. Wegen $g \leq h$ ist auch $g_n \leq h_n$; nach **32·2·11** gibt es also ein $f_n \varepsilon \mathfrak{S}$, so daß $g_n \leq f_n \leq h_n$. Dann ist $g = \lim\limits_n g_n \leq \underline{\lim\limits_n} f_n \leq \overline{\lim\limits_n} f_n \leq \lim\limits_n h_n = h$.

38·5·32. *Ist $\mathfrak{S}$ ein völlig autarkes γ_1^1-System und $g \leq h$, so ist, damit es in $\mathfrak{S}$ eine Funktionenfolge $((f_n))$ mit $\underline{\lim\limits_n} f_n = g$, $\overline{\lim\limits_n} f_n = h$ gebe, notwendig und hinreichend, daß $g \varepsilon \mathfrak{S}^2$, $h \varepsilon \mathfrak{S}_2$ sei.*

Notwendig: Dies folgt aus **38·5·1**. Hinreichend: Nach **38·5·3** gibt es in $\mathfrak{S}$ Folgen $((f'_n))$, $((f''_n))$, so daß $\underline{\lim\limits_n} f'_n = g$, $\overline{\lim\limits_n} f''_n = h$; nach **38·5·31** gibt es in $\mathfrak{S}$ eine Folge $((\tilde{f}_n))$, so daß $g \leq \underline{\lim\limits_n} \tilde{f}_n \leq \overline{\lim\limits_n} \tilde{f}_n \leq h$. Setzen wir $f_{2n-1} = \max(\tilde{f}_n, f''_n)$, $f_{2n} = \min(\tilde{f}_n, f'_n)$, so ist, da $\mathfrak{S}$ autark, $f_n \varepsilon \mathfrak{S}$, und offenbar ist $\underline{\lim\limits_n} f_n = g$, $\overline{\lim\limits_n} f_n = h$.

Sei nun insbesondere E ein metrischer Raum; dann gelten die Sätze:

38·5·4. *Ist $g \leq h$, so ist, damit es in $\mathfrak{C}_\xi^\xi$ eine Funktionenfolge $((f_n))$ mit $\underline{\lim\limits_n} f_n = g$, $\overline{\lim\limits_n} f_n = h$ gebe, notwendig und hinreichend, daß $g \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi+1}$, $h \varepsilon \mathfrak{C}_{\xi+1}$.*

Nach 35·1·4 ist $\mathfrak{C}_\xi^\xi$ völlig autark und nach 38·5·22 ein γ_1^1-System; nach 35·1·5 ist $(\mathfrak{C}_\xi^\xi)^1 = \mathfrak{C}^\xi$, $(\mathfrak{C}_\xi^\xi)_1 = \mathfrak{C}_\xi$, also nach 35·1·1 $(\mathfrak{C}_\xi^\xi)_2 = \mathfrak{C}_{\xi+1}$, $(\mathfrak{C}_\xi^\xi)^2 = \mathfrak{C}^{\xi+1}$; die Behauptung folgt also aus 38·5·32.

38·5·41. *Ist $g \leq h$, so ist, damit es in $\mathfrak{C}_\xi$ (bzw. in $\mathfrak{C}^\xi$) eine Funktionenfolge $((f_n))$ mit $\underline{\lim}_n f_n = g$, $\overline{\lim}_n f_n = h$ gebe, notwendig und hinreichend, daß $g \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi+1}$, $h \varepsilon \mathfrak{C}_{\xi+2}$ (bzw. $g \varepsilon \mathfrak{C}^{\xi+2}$, $h \varepsilon \mathfrak{C}_{\xi+1}$) sei.*

Nach 35·1·2 ist $\mathfrak{C}_\xi$ völlig autark und nach 38·5·21 ein γ_1^1-System; nach 35·1·1 ist $(\mathfrak{C}_\xi)^1 = \mathfrak{C}^{\xi+1}$, $(\mathfrak{C}_\xi)_1 = \mathfrak{C}_\xi$, also $(\mathfrak{C}_\xi)_2 = \mathfrak{C}_{\xi+2}$, $(\mathfrak{C}_\xi)^2 = \mathfrak{C}^{\xi+1}$; die Behauptung folgt also aus 38·5·32.

Literatur: W. Stepanoff, Fund. math. 11 (1928) S. 264; G. Goldowsky, Fund. math. 11 (1928) S. 275.

6. **Konvergenz- und Divergenzmenge.** Sei wieder E eine beliebige Menge, $((f_n))$ eine Folge von Funktionen auf E. Die Menge A aller Konvergenzpunkte (§ 28, 1) von $((f_n))$ heißt dann die Konvergenzmenge, die Menge $E - A$ die Divergenzmenge von $((f_n))$. Bedeutet $\mathfrak{S}$ ein Funktionensystem auf E, so gilt:

38·6·1. *Ist $\mathfrak{S}$ autark und symmetrisch, $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}) = \underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{P}$, ist $((f_n))$ eine Funktionenfolge aus $\mathfrak{S}$ und A die Konvergenzmenge von $((f_n))$, so ist $A \varepsilon \mathfrak{P}_3$.*

Setzen wir $g = \underline{\lim}_n f_n$, $h = \overline{\lim}_n f_n$, so ist nach 38·5·1 $g \varepsilon \mathfrak{S}^2$, $h \varepsilon \mathfrak{S}_2$; bedeutet S die Schränkungstransformation, und setzen wir $g^* = S(g)$, $h^* = S(h)$, so ist nach 34·1·2 auch $g^* \varepsilon \mathfrak{S}^2$, $h^* \varepsilon \mathfrak{S}_2$; nach 34·1·6 ist dann $-g^* \varepsilon \mathfrak{S}_2$, und weil nach 34·1·4 $\mathfrak{S}_2$ additiv, ist $h^* - g^* \varepsilon \mathfrak{S}_2$. Die Konvergenzmenge ist gegeben durch $A = [h^*(x) - g^*(x) = 0] = [h^*(x) - g^*(x) \leq 0]$; da nach 34·3·2 $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}_2) = \mathfrak{P}_3$, ist also $A \varepsilon \mathfrak{P}_3$.

38·6·11. *Ist $\mathfrak{S}$ völlig autark und symmetrisch, $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}) = \underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{P}$, ist $((f_n))$ eine Funktionenfolge aus $\mathfrak{S}$ und A die Konvergenzmenge von $((f_n))$, so ist $A \varepsilon \mathfrak{P}_2$.*

Da $\mathfrak{S}$ völlig autark, ist nach 30·4·1 $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}$, also $\mathfrak{P}^2 = \mathfrak{P}^1$, also $\mathfrak{P}_3 = \mathfrak{P}_2$, und die Behauptung folgt aus 38·6·1.

Umgekehrt gilt:

38·6·2. *Ist $\mathfrak{S}$ ein völlig autarkes γ_1^1-System, $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{P}$ (oder $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{P}$) und $A \varepsilon \mathfrak{P}_2$, so gibt es in $\mathfrak{S}$ eine Folge $((f_n))$, deren Konvergenzmenge A ist.*

Da nach 30·4·1 $\mathfrak{P}_3 = \mathfrak{P}_2$, ist nach 34·3·2 $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}_2) = \mathfrak{P}_2$. Ist $A \varepsilon \mathfrak{P}_2$, so gibt es also nach 30·3·2 eine Funktion $h \varepsilon \mathfrak{S}_2$, so daß $[h(x) \leq 0] = A$, und nach

30·3·1 kann $h \geq 0$ angenommen werden; dann ist $A = [h(\hat{x}) = 0]$. Nach 38·5·32 gibt es nun in $\mathfrak{S}$ eine Funktionenfolge $((f_n))$ mit $\underline{\lim}_n f_n = 0$, $\overline{\lim}_n f_n = h$; offenbar ist A die Konvergenzmenge von $((f_n))$.

Ist E ein metrischer Raum, so gilt:

38·6·3. *Damit A Konvergenzmenge einer Folge $((f_n))$ aus $\mathfrak{C}^\xi_\xi$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß $A \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\xi+2}$ sei.*

Nach 35·1·4 ist $\mathfrak{C}^\xi_\xi$ völlig autark und symmetrisch, und nach 38·5·22 ein γ_1^1-System. Nach 35·2·21 ist $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}^\xi_\xi) = \underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}^\xi_\xi) = \mathfrak{B}_\xi$, und da $(\mathfrak{B}_\xi)_2 = \mathfrak{B}_{\xi+2}$, folgt die Behauptung aus 38·6·11 und 38·6·2.

38·6·4. *Damit A Konvergenzmenge einer Folge $((f_n))$ aus $\mathfrak{C}_\xi$ (bzw. aus $\mathfrak{C}^\xi$) sei, ist notwendig und hinreichend, daß $A \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\xi+3}$ sei.*

Notwendig: Ist $((f_n))$ eine Folge aus $\mathfrak{C}_\xi$ und $g = \underline{\lim}_n f_n$, $h = \overline{\lim}_n f_n$, so ist nach 38·5·41 $g \,\varepsilon\, \mathfrak{C}^{\xi+1}$, $h \,\varepsilon\, \mathfrak{C}_{\xi+2}$, also auch $g \,\varepsilon\, \mathfrak{C}^{\xi+2}$; setzen wir $g^* = S(g)$, $h^* = S(h)$, so ist auch $g^* \varepsilon\, \mathfrak{C}^{\xi+2}$, $h^* \varepsilon\, \mathfrak{C}_{\xi+2}$, also $-g^* \varepsilon\, \mathfrak{C}_{\xi+2}$ und $h^* - g^* \varepsilon\, \mathfrak{C}_{\xi+2}$. Da $A = [h^*(\hat{x}) - g^*(\hat{x})] \leq 0$, ist $A \,\varepsilon\, \mathfrak{B}_{\xi+3}$ nach 35·2·11. Hinreichend: Nach 35·1·2 und 38·5·21 ist $\mathfrak{C}_\xi$ ein völlig autarkes γ_1^1-System; nach 35·2·11 ist $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}_\xi) = \mathfrak{B}_{\xi+1}$; wegen $(\mathfrak{B}_{\xi+1})_2 = \mathfrak{B}_{\xi+3}$ folgt die Behauptung aus 38·6·2.

Literatur: H. Hahn, Arch. d. Math. u. Phys. (3) 28 (1919) S. 34; W. Sierpiński, Fund. math. 2 (1921) S. 41.

7. **Unvollständige Grenzfunktionen.** Sei wieder E eine beliebige Menge, $((f_n))$ eine Funktionenfolge auf E, deren Konvergenzmenge $\mathrm{A} \supset A$ ist. Durch $f(x) = \lim_n f_n(x)$ ist eine Funktion auf A definiert, die wir (weil sie auf $E - A$ nicht definiert ist) als die unvollständige Grenzfunktion von $((f_n))$ bezeichnen. Um die unvollständigen Grenzfunktionen näher zu untersuchen, benötigen wir zwei Hilfssätze.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{S}$ ein symmetrisches Funktionensystem auf E und setzen:

$$(7) \qquad \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) = \underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}; \quad \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}) = \underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{P}.$$

38·7·1. *Ist $\mathfrak{S}$ symmetrisch und autark, $A \subset \mathrm{A} \subseteqq E$, und sind $B_1, B_2, \ldots, B_k$ disjunkte Mengen aus $(A\,1\,\mathfrak{P})^1$, so gibt es disjunkte Mengen $C_1, C_2, \ldots, C_k$ aus $\mathfrak{P}^1$, so daß $B_i = A\,C_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.*

Ist die Behauptung richtig für k (≥ 2) Mengen, so gilt sie auch für $k+1$ Mengen $B_1, B_2, \ldots, B_{k+1}$; denn nach Annahme gibt es disjunkte Mengen $C_i' \,\varepsilon\, \mathfrak{P}^1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, so daß $B_i = A\,C_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$; da nach 30·3·3 $\mathfrak{P}$, also auch $A\,1\,\mathfrak{P}$, somit nach 3·5·1 auch $(A\,1\,\mathfrak{P})^1$ ein Ring, ist auch $B_1 + B_2 + \ldots + B_k \,\varepsilon\, (A\,1\,\mathfrak{P})^1$; also gibt es nach Annahme zwei disjunkte

Mengen C und C_{k+1} aus $\mathfrak{P}^1$, so daß $B_1 + B_2 + \ldots + B_k = A\,C$, $B_{k+1} = A\,C_{k+1}$; setzen wir nun $C_i = C\,C_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, so ist, da $\mathfrak{P}^1$ ein Ring, $C_i \varepsilon \mathfrak{P}^1$, die Mengen $C_1, C_2, \ldots, C_{k+1}$ sind disjunkt und $B_i = A\,C_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k+1)$. — Es genügt also, die Behauptung für $k = 2$ nachzuweisen. Seien also B, B' zwei disjunkte Mengen aus $(A\,1\,\mathfrak{P})^1$; es gibt dann Mengen P_n, P_n' aus $\mathfrak{P}$, so daß $B = \underset{n}{S}\,A\,P_n = A\,\underset{n}{S}\,P_n$, $B' = \underset{n}{S}\,A\,P_n' = A\,\underset{n}{S}\,P_n'$, und nach 8·2·1 kann angenommen werden $P_n \subseteqq P_{n+1}$, $P_n' \subseteqq P_{n+1}'$; wir setzen nun $Q_n = P_n - P_n'$, $Q_n' = P_n' - P_n$; da $P_n' \varepsilon \mathfrak{P}$, ist $E - P_n' \varepsilon \mathfrak{M}$, also nach 30·2·1 $E - P_n' \varepsilon \mathfrak{P}^1$, also ist auch $Q_n \varepsilon \mathfrak{P}^1$, und ebenso $Q_n' \varepsilon \mathfrak{P}^1$; setzen wir $C = \underset{n}{S}\,Q_n$, $C' = \underset{n}{S}\,Q_n'$, so ist demnach $C \varepsilon \mathfrak{P}^1$, $C' \varepsilon \mathfrak{P}^1$. Ferner ist $B = A\,\underset{n}{S}\,P_n = A\,\underset{n}{S}\,Q_n + A\,\underset{n}{S}\,(P_n - Q_n)$; da aber $Q_n = P_n - P_n'$, ist $P_n - Q_n = P_n\,P_n'$, also $A\,\underset{n}{S}\,(P_n - Q_n) = A\,\underset{n}{S}\,P_n\,P_n' \subseteqq A\,\underset{n}{S}\,P_n\,\underset{n}{S}\,P_n' = B\,B' = \Lambda$, d. h. $A\,\underset{n}{S}\,(P_n - Q_n) = \Lambda$, mithin $B = A\,\underset{n}{S}\,Q_n = A\,C$, und ebenso $B' = A\,C'$. — Endlich ist $C\,C' = \underset{n}{S}\,Q_n\,\underset{n}{S}\,Q_n' = \underset{m,n}{S}\,Q_m\,Q_n'$; da $Q_m = P_m - P_m'$, $Q_n' = P_n' - P_n$, ist $Q_m \subseteqq P_m$, $Q_n' \subseteqq E - P_n$; da $((P_n))$ monoton wächst, ist also $Q_m \subseteqq P_n$ für $m \leq n$, somit $Q_m\,Q_n' = \Lambda$ für $m \leq n$; in genau derselben Weise ist aber auch $Q_n' \subseteqq P_m'$ für $n \leq m$, $Q_m \subseteqq E - P_m'$, also $Q_m\,Q_n' = \Lambda$ für $n \leq m$; also ist $Q_m\,Q_n' = \Lambda$ für alle n, m, also auch $C\,C' = \Lambda$.

Ist $\mathfrak{S}$ symmetrisch und völlig autark, so ist nach 30·3·3 und 30·4·1, wenn wir wieder von der Bezeichnungsweise (7) Gebrauch machen, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{P}$ ein die Mengen A und E enthaltender σ- bzw. δ-Ring; ist $A \subseteqq E$, so gilt dann dasselbe von $A\,1\,\mathfrak{M}$ und $A\,1\,\mathfrak{P}$. Da $\overline{\mathfrak{G}}\,(A\,1\,\mathfrak{S}) = \underline{\mathfrak{G}}\,(A\,1\,\mathfrak{S}) = A\,1\,\mathfrak{M}$, existiert nach 30·2·22 das System:

$$\mathfrak{S}_A = \mathfrak{S}\,(A\,1\,\mathfrak{M},\ A\,1\,\mathfrak{M})\,, \tag{7·1}$$

und nach 30·4·31 und 30·5·3 ist es völlig autark und symmetrisch.

38·7·2. *Ist $\mathfrak{S}$ symmetrisch und völlig autark, $A \supset A$, $A \varepsilon \mathfrak{P}_2$, und $f \varepsilon (\mathfrak{S}_A)^*$, so gibt es ein $g \varepsilon \mathfrak{S}^2$ und ein $h \varepsilon \mathfrak{S}_2$, so daß $A\,1\,g = A\,1\,h = f$ und $g\,(x) < h\,(x)$ für $x \varepsilon E - A$.*

Nach 32·5·31 gibt es in $(\mathfrak{S}_A)^*$ eine gleichmäßig gegen f konvergierende Folge $((f_n))$ von Treppenfunktionen. Ist f^* eine Treppenfunktion aus $(\mathfrak{S}_A)^*$ und c einer der endlich vielen Werte von f^*, so ist, wenn $y' < c < y''$ und y', y'' hinlänglich nahe an c gewählt sind: $[f^*\,(\mathfrak{x}) = c] = [f^*\,(x) > y'] \cdot [f^*\,(x) < y'']$, und da nach (7·1): $\mathfrak{F}\,(\mathfrak{S}_A) = \underline{\mathfrak{F}}\,(\mathfrak{S}_A) = A\,1\,\mathfrak{P}$, ist nach 31·4·31: $[f^*\,(\mathfrak{x}) = c]\,\varepsilon\,(A\,1\,\mathfrak{P})^1$. Seien c_{i_1} $(i_1 = 1, 2, \ldots, k)$ die endlich vielen Werte von f_1, und sei $[f_1\,(\mathfrak{x}) = c_{i_1}] = B_{i_1}$; dann ist also $B_{i_1} \varepsilon (A\,1\,\mathfrak{P})^1$. Seien $c_{i_1 i_2}$ die endlich vielen Werte, die f_2 auf B_{i_1} annimmt, und $B_{i_1} \cdot [f_2\,(\mathfrak{x}) = c_{i_1 i_2}] = B_{i_1 i_2}$;

dann ist auch $B_{i_1 i_2} \varepsilon (A\, 1\, \mathfrak{P})^1$ und $B_{i_1 i_2} \subseteqq B_{i_1}$. Sind sodann $c_{i_1 i_2 i_3}$ die endlich vielen Werte von f_3 auf $B_{i_1 i_2}$, und ist $B_{i_1 i_2} \cdot [f_3(x) = c_{i_1 i_2 i_3}] = B_{i_1 i_2 i_3}$, so ist ebenso $B_{i_1 i_2 i_3} \varepsilon (A\, 1\, \mathfrak{P})^1$ und $B_{i_1 i_2 i_3} \subseteqq B_{i_1 i_2}$ usf. Da das System der Mengen $B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ mit n Indizes disjunkt ist, gibt es nach 38·7·1 in $\mathfrak{P}^1$ disjunkte Mengen $C_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, so daß $B_{i_1 i_2 \ldots i_n} = A\, C_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, und, indem man $C_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ ersetzt durch $C_{i_1} C_{i_1 i_2} \ldots C_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, kann man annehmen: $C_{i_1 i_2 \ldots i_n i_{n+1}} \subseteqq C_{i_1 i_2 \ldots i_n}$. Da $A \varepsilon \mathfrak{P}_2$, gibt es in $\mathfrak{P}^1$ eine monoton abnehmende Mengenfolge $((A_n))$ mit $\underset{n}{D}\, A_n = A$; setzen wir $C_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot A_n = A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, so sind die Mengen $A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ mit n Indizes disjunkt, es ist auch $A_{i_1 i_2 \ldots i_n} \varepsilon \mathfrak{P}^1$, $A_{i_1 i_2 \ldots i_n i_{n+1}} \subseteqq A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ und $B_{i_1 i_2 \ldots i_n} = A \cdot A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$. Wir bezeichnen nun mit $c'_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ bzw. $c''_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ das Infimum bzw. Supremum aller Zahlen $c_{i_1 i_2 \ldots i_{n+k}}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, deren erste n Indizes die festen Werte $i_1, i_2, \ldots, i_n$ haben; dann ist:

$$c'_{i_1 i_2 \ldots i_n} \leq c''_{i_1 i_2 \ldots i_n},\ c'_{i_1 i_2 \ldots i_{n+1}} \geq c'_{i_1 i_2 \ldots i_n},\ c''_{i_1 i_2 \ldots i_{n+1}} \leq c''_{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Offenbar gibt es Zahlen $c^*_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, $c^{**}_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, so daß:

$$c^*_{i_1 i_2 \ldots i_n} \leq c'_{i_1 i_2 \ldots i_n},\ c^{**}_{i_1 i_2 \ldots i_n} \geq c''_{i_1 i_2 \ldots i_n},\ c^*_{i_1 i_2 \ldots i_n} < c^{**}_{i_1 i_2 \ldots i_n},$$

$$\| c^*_{i_1 i_2 \ldots i_n} - c'_{i_1 i_2 \ldots i_n} \| < \frac{1}{n},\ \| c^{**}_{i_1 i_2 \ldots i_n} - c''_{i_1 i_2 \ldots i_n} \| < \frac{1}{n},$$

$$c^*_{i_1 i_2 \ldots i_{n+1}} \geq c^*_{i_1 i_2 \ldots i_n},\ c^{**}_{i_1 i_2 \ldots i_{n+1}} \leq c^{**}_{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Wir definieren nun die Funktionen g_n und h_n auf E durch: $g_n = -\infty$, $h_n = +\infty$ auf $E - \underset{i_1}{S}\, A_{i_1}$, $g_n = c^*_{i_1}$, $h_n = c^{**}_{i_1}$ auf $A_{i_1} - \underset{i_2}{S}\, A_{i_1 i_2}$, $g_n = c^*_{i_1 i_2}$, $h_n = c^{**}_{i_1 i_2}$ auf $A_{i_1 i_2} - \underset{i_3}{S}\, A_{i_1 i_2 i_3}, \ldots$, $g_n = c^*_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$, $h_n = c^{**}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$ auf $A_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} - \underset{i_n}{S}\, A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, $g_n = c^*_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, $h_n = c^{**}_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ auf $A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$.
Dann ist $((g_n))$ monoton wachsend, $((h_n))$ monoton abnehmend; offenbar ist jede Menge $[g_n(x) > y]$ und jede Menge $[h_n(x) < y]$ Summe endlich vieler Mengen $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, also eine Menge aus $\mathfrak{P}^1$; nach 34·3·1 und 31·4·22 ist also $g_n \varepsilon \mathfrak{S}^2$, $h_n \varepsilon \mathfrak{S}_2$; setzen wir $g = \lim\limits_n g_n$, $h = \lim\limits_n h_n$, so ist also auch $g \varepsilon \mathfrak{S}^2$, $h \varepsilon \mathfrak{S}_2$. — Sei nun $a \varepsilon A$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben; da $((f_n))$ gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es ein n_ε, so daß $\| f_{n+k} - f_n \| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Sei $n \geq n_\varepsilon$; wegen $A = \underset{i_1 i_2 \ldots i_n}{S} B_{i_1 i_2 \ldots i_n} \subseteqq \underset{i_1 i_2 \ldots i_n}{S} A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ gibt es eine Menge $A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ mit n Indizes, so daß $a \varepsilon A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$; wegen $A\, A_{i_1 i_2 \ldots i_n} = B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ ist dann $f_n(x) = c_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ für alle $x \varepsilon B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, also

$\|f_{n,k}(x) - c_{i_1 i_2 \ldots i_n}\| \leq \varepsilon$ für alle $x \varepsilon B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, also ist $\|c_{i_1 i_2 \ldots i_{n+k}} - c_{i_1 i_2 \ldots i_n}\| \leq \varepsilon$ für alle c, deren erste n Indizes die festen Werte $i_1, i_2, \ldots, i_n$ haben, also ist auch:

$$\|c'_{i_1 i_2 \ldots i_n} - c_{i_1 i_2 \ldots i_n}\| \leq \varepsilon, \ \|c''_{i_1 i_2 \ldots i_n} - c_{i_1 i_2 \ldots i_n}\| \leq \varepsilon,$$

mithin:

$$\|c^*_{i_1 i_2 \ldots i_n} - c_{i_1 i_2 \ldots i_n}\| \leq \varepsilon + \frac{1}{n}, \ \|c^{**}_{i_1 i_2 \ldots i_n} - c_{i_1 i_2 \ldots i_n}\| \leq \varepsilon + \frac{1}{n},$$

d. h.:

$$\|g_n(a) - f_n(a)\| \leq \varepsilon + \frac{1}{n}, \ \|h_n(a) - f_n(a)\| \leq \varepsilon + \frac{1}{n} \text{ für } n \geq n_\varepsilon,$$

also $g(a) = h(a) = f(a)$ für jedes $a \varepsilon A$, d. h. $A \,\mathrm{l}\, g = A \,\mathrm{l}\, h = f$. — Sei endlich $a \varepsilon E - A$; wegen $A = \underset{n}{D}\, A_n$ gibt es dann einen kleinsten Index n, so daß $a \varepsilon E - A_n$, mithin wegen $A_{i_1 i_2 \ldots i_n} \subseteqq A_n$ auch einen kleinsten Index n, so daß $a \varepsilon E - \underset{i_1 i_2 \ldots i_n}{S} A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$; ist dieser kleinste Index $= 1$, so ist $a \varepsilon E - \underset{i_1}{S} A_{i_1}$, also $g_n(a) = -\infty$, $h_n(a) = +\infty$ für alle n, also $g(a) = -\infty$, $h(a) = +\infty$, also $g(a) < h(a)$; ist dieser kleinste Index > 1, so gibt es ein $A_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$, so daß $a \varepsilon A_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} - \underset{i_n}{S} A_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}$; dann ist $g_{n,k}(a) = c^*_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$, $h_{n,k}(a) = c^{**}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$ für alle k, also $g(a) = c^*_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$, $h(a) = c^{**}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$, also wieder $g(a) < h(a)$. Also ist $g(a) < h(a)$ für alle $a \varepsilon E - A$.

Machen wir wieder Gebrauch von der Bezeichnungsweise (7), (7·1), so gilt:

38·7·3. *Ist $\mathfrak{S}$ ein symmetrisches und völlig autarkes γ_1^1-System und $\Lambda \subset A \subseteqq E$, so ist, damit die Funktion f auf A unvollständige Grenzfunktion einer Folge $((f_n))$ aus $\mathfrak{S}$ sei, notwendig und hinreichend, daß $A \varepsilon \mathfrak{P}_2$ und $f \varepsilon (\mathfrak{S}_A)^*$ sei.*

Notwendig: Daß $A \varepsilon \mathfrak{P}_2$, folgt aus **38·6·11**; da $f \varepsilon (A \,\mathrm{l}\, \mathfrak{S})^*$, und $A \,\mathrm{l}\, \mathfrak{S} \subseteqq \mathfrak{S}_A$, also $(A \,\mathrm{l}\, \mathfrak{S})^* \subseteqq (\mathfrak{S}_A)^*$, ist $f \varepsilon (\mathfrak{S}_A)^*$. Hinreichend: Sei $A \varepsilon \mathfrak{P}_2$, $f \varepsilon (\mathfrak{S}_A)^*$; dann gibt es nach **38·7·2** ein $g \varepsilon \mathfrak{S}^2$ und ein $h \varepsilon \mathfrak{S}_2$, so daß $A \,\mathrm{l}\, g = A \,\mathrm{l}\, h = f$ und $g < h$ auf $E - A$. Nach **38·5·32** gibt es in $\mathfrak{S}$ eine Funktionenfolge $((f_n))$ mit $\underset{n}{\underline{\lim}}\, f_n = g$, $\underset{n}{\overline{\lim}}\, f_n = h$; also ist A die Konvergenzmenge von $((f_n))$ und $\underset{n}{\lim}\, f_n(x) = f(x)$ für alle $x \varepsilon A$.

Ist E insbesondere ein metrischer Raum, so gilt:

38·7·4. *Ist $\Lambda \subset A \subseteqq E$, so ist, damit die Funktion f auf A unvollständige Grenzfunktion einer Folge $((f_n))$ aus $\mathfrak{C}_\xi^\xi(E)$ sei, notwendig und hinreichend, daß $A \varepsilon \mathfrak{B}_{\xi+2}(E)$ und $f \varepsilon \mathfrak{C}_{\xi+1}^{\xi+1}(A)$ sei.*

Schreiben wir kurz $\mathfrak{C}_\xi^\xi$ für $\mathfrak{C}_\xi^\xi(E)$, so ist nach 35·1·4 $\mathfrak{C}_\xi^\xi$ symmetrisch und völlig autark, und nach 38·5·22 ein γ_1^1-System; nach 35·2·21 ist $\mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}_\xi^\xi) = \mathfrak{F}(\mathfrak{C}_\xi^\xi) = \mathfrak{B}_\xi(E)$, also $\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{B}_{\xi+2}(E)$; nach 35·2·21 ist $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}_\xi^\xi) = \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}_\xi^\xi) = \mathfrak{B}^\xi(E)$, also nach 33·4·7 $A\,1\,\mathfrak{M} = \mathfrak{B}^\xi(A)$, also nach (7·1) und 35·2·2: $\mathfrak{S}_A = \mathfrak{S}(A\,1\,\mathfrak{M}, A\,1\,\mathfrak{M}) = \mathfrak{C}_\xi^\xi(A)$. Nach 35·1·5 ist $(\mathfrak{C}_\xi^\xi(A))^* = \mathfrak{C}_{\xi+1}^{\xi+1}(A)$. Somit folgt die Behauptung aus 38·7·3.

Literatur: H. Fried, Monatsh. f. Math. u. Phys. 38 (1931) S. 306.

§ 39. Funktionen in Produkträumen.

1. **Hilfsbetrachtungen.** Seien $E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(k)}$ metrische Räume und sei $E^{(1)} \times E^{(2)} \times \ldots \times E^{(k)}$ ihr Produktraum (§ 20), d. h. die Menge aller k-tupel $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ mit $x_i \varepsilon E^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Sei $A \subseteqq E^{(1)} \times E^{(2)} \times \ldots \times E^{(k)}$ und f eine Funktion auf A; wir bezeichnen sie mit $f(x)$ oder $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Dem näheren Studium solcher Funktionen schicken wir einige Hilfsbetrachtungen voraus.

Sei E ein metrischer Raum und seien a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ n verschiedene Punkte von E; wir definieren die Funktionen $g(u)$, $g_\nu(u)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ für alle $u \varepsilon E$ durch:

(1) $g(u) = \min(u\,a_1, u\,a_2, \ldots, u\,a_n)$, $g_\nu(u) = \max\left(2\,g(u) - u\,a_\nu, 0\right)$;

dann ist für $u\,a_\nu \leq \dfrac{1}{2} \min\limits_{\lambda(\lambda \neq \nu)} a_\lambda\,a_\nu$:

$$g(u) = u\,a_\nu, \quad g_\nu(u) = u\,a_\nu; \tag{1·1}$$

ferner für $u\,a_\nu \leq \dfrac{1}{3} a_\lambda\,a_\nu$:

$$g_\lambda(u) = 0 \qquad (\lambda \neq \nu); \tag{1·11}$$

denn dann ist $u\,a_\lambda \geq a_\lambda\,a_\nu - u\,a_\nu \geq 2\,u\,a_\nu$, also nach (1): $u\,a_\lambda \geq 2\,g(u)$, d. h. $2\,g(u) - u\,a_\lambda \leq 0$.

Seien nun $t_1, t_2, \ldots, t_n$ endliche reelle Zahlen; da in jedem von den a_ν verschiedenen Punkte $u \varepsilon E$ mindestens eine der n Funktionen $g_\nu(u) > 0$ ist, können wir eine Funktion $h(u; a_1, \ldots, a_n; t_1, \ldots, t_n)$ von u auf E definieren durch:

$$\begin{aligned} &h(u; a_1, \ldots, a_n; t_1, \ldots, t_n) = \\ &\frac{t_1\,g_1(u) + t_2\,g_2(u) + \ldots + t_n\,g_n(u)}{g_1(u) + g_2(u) + \ldots + g_n(u)} \text{ für } u \neq a_\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots, n), \\ &h(a_\nu; a_1, \ldots, a_n; t_1, \ldots, t_n) = t_\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots, n); \end{aligned} \tag{1·2}$$

dann gilt für alle $u \varepsilon E$:

$$\min(t_1, t_2, \ldots, t_n) \leq h(u; a_1, \ldots, a_n; t_1, \ldots, t_n) \leq \max(t_1, t_2, \ldots, t_n). \tag{1·3}$$

39·1·1. *Es gibt ein* $\varrho > 0$, *so daß*: $h(u; a_1, \ldots, a_n; t_1, \ldots, t_n) = t_\nu$ *für* $u \varepsilon K_{a_\nu \varrho}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

Dies folgt aus (1·11) für $\varrho = \frac{1}{3} \min\limits_{\lambda, \nu (\lambda \neq \nu)} a_\lambda a_\nu$.

39·1·2. *Die Funktion* $h(u; a_1, \ldots, a_n; t_1, \ldots, t_n)$ *von* u *(bei festen* $a_1, \ldots, a_n, t_1, \ldots, t_n$*) ist stetig für alle* $u \varepsilon E$.

Dies folgt aus der Stetigkeit von $g_\nu(u)$, wenn u von allen a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ verschieden, und aus **39·1·1** für $u = a_\nu$.

39·1·3. *Ist* $\lim\limits_{\mu} t_{\nu\mu} = t_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, *so konvergiert* $h(u; a_1, \ldots, a_n; t_{1\mu}, \ldots, t_{n\mu})$ *gleichmäßig auf* E *gegen* $h(u; a_1 \ldots, a_n; t_1, \ldots, t_n)$.

Dies folgt wegen $h(u; a_1, \ldots, a_n; t_{1\mu}, \ldots, t_{n\mu}) - h(u; a_1, \ldots, a_n; t_1, \ldots, t_n) = h(u; a_1, \ldots, a_n; t_{1\mu} - t_1, \ldots, t_{n\mu} - t_n)$ aus (1·3).

Sei nun auch E' ein metrischer Raum. Dann gilt:

39·1·4. *Sind* $t_1(v), \ldots, t_n(v)$ *endliche stetige Funktionen auf* E', *so ist* $h(u, v) = h(u; a_1, \ldots, a_n; t_1(v), \ldots, t_n(v))$ *eine stetige Funktion auf* $E \times E'$.

Wir haben zu zeigen: gilt $(u_i, v_i) \to (u, v)$, d. h. nach **20·1·1**: gilt $u_i \to u$, $v_i \to v$, so gilt $h(u_i, v_i) \to h(u, v)$. Nun ist $\| h(u_i, v_i) - h(u, v) \| \leq \| h(u_i, v_i) - h(u_i, v) \| + \| h(u_i, v) - h(u, v) \|$. Aus der Stetigkeit der $t_\nu(v)$ folgt: $\lim\limits_i t_\nu(v_i) = t_\nu(v)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$; nach **39·1·3** gibt es also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein i_ε, so daß $\| h(u, v_i) - h(u, v) \| < \varepsilon$ für $i \geq i_\varepsilon$ und alle $u \varepsilon E$; dann ist insbesondere $\| h(u_i, v_i) - h(u_i, v) \| < \varepsilon$ für $i \geq i_\varepsilon$. Wegen **39·1·2** gilt $h(u_i, v) \to h(u, v)$, also $\| h(u_i, v) - h(u, v) \| < \varepsilon$ für fast alle i. Also ist $\| h(u_i, v_i) - h(u, v) \| < 2\varepsilon$ für fast alle i, d. h. $h(u_i, v_i) \to h(u, v)$, w. z. b. w.

39·1·41. *Sind* $t_1(v), \ldots, t_n(v)$ *endliche* $\mathfrak{C}^\xi$-*Funktionen (bzw.* $\mathfrak{C}_\xi$-*Funktionen, bzw.* $\mathfrak{C}_\xi^\xi$-*Funktionen) auf* E', *so ist* $h(u, v) = h(u; a_1, \ldots, a_n; t_1(v), \ldots, t_n(v))$ *eine* $\mathfrak{C}^\xi$-*Funktion (bzw. eine* $\mathfrak{C}_\xi$-*Funktion, bzw. eine* $\mathfrak{C}_\xi$-*Funktion) auf* $E \times E'$.

Sind die n Funktionenfolgen $t_{\nu 1}(v), t_{\nu 2}(v), \ldots, t_{\nu\mu}(v), \ldots$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ monoton wachsend (bzw. abnehmend), so gilt nach (1·2) dasselbe von der Funktionenfolge $h(u; a_1, \ldots, a_n; t_{1\mu}(v), \ldots, t_{n\mu}(v))$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$; also folgt die Behauptung aus **39·1·3** und **39·1·4** für $\xi = 1$. Von da aus schließt man auf Grund von **39·1·3** weiter durch transfinite Induktion.

39·1·5. *Ist die abzählbare Menge der Punkte* $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ *dicht in* E *und ist* $f(u)$ *eine endliche und stetige Funktion auf* E, *so ist:*

$$f(u) = \lim_n h(u; a_1, \ldots, a_n; f(a_1), \ldots, f(a_n)).$$

Ist $u \varepsilon E$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varrho > 0$, so daß $|f(u') - f(u)| < \varepsilon$ für $u'\,u \leq 2\,\varrho$. Weil die Menge der a_ν dicht in E, gibt es für fast alle n unter den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ einen Punkt a_ν, so daß $a_\nu\,u < \varrho$; dann ist in (1): $g(u) < \varrho$; für diejenigen $\lambda\,(= 1, 2, \ldots, n)$, für die $a_\lambda\,u > 2\,\varrho$, somit $a_\lambda\,u > 2\,g(u)$, ist also nach (1): $g_\lambda(u) = 0$; wir können also die von diesen λ herrührenden Glieder in

$$h\left(u;\, a_1, \ldots, a_n; f(a_1), \ldots, f(a_n)\right) = \frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} f(a_\lambda)\, g_\lambda(u)}{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} g_\lambda(u)}$$

weglassen; da für die übrigen gilt: $f(u) - \varepsilon < f(a_\lambda) < f(u) + \varepsilon$, ist somit nach (1·3): $f(u) - \varepsilon < h\left(u;\, a_1, \ldots, a_n; f(a_1), \ldots, f(a_n)\right) < f(u) + \varepsilon$ für fast alle n; d. h. es gilt $f(u) = \lim\limits_{n} h\left(u;\, a_1, \ldots, a_n; f(a_1), \ldots, f(a_n)\right)$.

2. Partiell stetige Funktionen. Sei $A \subseteqq E^{(1)} \times E^{(2)} \times \ldots \times E^{(k)}$ und $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ eine Funktion auf A; ist dann $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \varepsilon A$, so bezeichnen wir mit $A^{(i)}$ die Menge aller $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \varepsilon A$, für die $x_j = a_j$ $(j \neq i)$, und mit $f_i(x_i)$ die Funktion $A^{(i)}\,1\,f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Ist dann f_i stetig im Punkte a_i, so heißt f im Punkte $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ partiell stetig nach x_i; ist f im Punkte $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ partiell stetig nach x_i für $i = 1, 2, \ldots, k$, so heißt f partiell stetig in $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Ist die Funktion f partiell stetig nach x_i (bzw. partiell stetig) in jedem Punkte von A, so heißt sie partiell stetig nach x_i (bzw. partiell stetig). Die Funktion f kann partiell stetig sein, ohne stetig zu sein; Beispiel im $R_2\,(= R_1 \times R_1)$: durch $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1\,x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ für $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$ ist eine Funktion im R_2 definiert, die partiell stetig, im Punkte $(0, 0)$ aber unstetig ist. — Wir werden nun zeigen, daß (unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Räume $E^{(i)}$) jede partiell stetige Funktion auf $E^{(1)} \times E^{(2)} \times \ldots \times E^{(k)}$ eine Bairesche Funktion ist.

39·2·1. *Ist einer der Räume $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ separabel und $f(x_1, x_2)$ eine partiell stetige Funktion auf $E^{(1)} \times E^{(2)}$, so ist $f \varepsilon \mathfrak{C}_2^2\,(E^{(1)} \times E^{(2)})$.*

Vermöge der Schränkungstransformation können wir beim Beweise ohne weiteres $f(x_1, x_2)$ als endlich annehmen. Sei etwa $E^{(1)}$ separabel; nach **18·1·8** gibt es eine abzählbare Menge von Punkten $a_\nu \varepsilon E^{(1)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, die in $E^{(1)}$ dicht ist. Wir setzen:

$$h_n(x_1, x_2) = h\left(x_1;\, a_1, \ldots, a_n; f(a_1, x_2), \ldots, f(a_n, x_2)\right);$$

da nach Annahme die Funktionen $f(a_\nu, x_2)$ stetig auf $E^{(2)}$ sind, ist nach **39·1·4** $h_n(x_1, x_2)$ stetig auf $E^{(1)} \times E^{(2)}$, d. h. $h_n \varepsilon \mathfrak{C}_1^1\,(E^{(1)} \times E^{(2)})$. Da nach Annahme $f(x_1, x_2)$ partiell stetig nach x_1, gilt zufolge **39·1·5**:

$f(x_1, x_2) = \lim\limits_n h\bigl(x_1; a_1, \ldots, a_n: f(a_1, x_2), \ldots, f(a_n, x_2)\bigr)$, d. h. $f(x_1, x_2) = \lim\limits_n h_n(x_1, x_2)$; wegen $h_n \varepsilon\, \mathfrak{C}_1^1(E^{(1)} \times E^{(2)})$ ist also $f \varepsilon\, (\mathfrak{C}_1^1(E^{(1)} \times E^{(2)}))^*$, also nach **35·1·5** $f \varepsilon\, \mathfrak{C}_2^2(E^{(1)} \times E^{(2)})$.

39·2·11. *Sind $k - 1$ der Räume $E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(k)}$ separabel und ist $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ eine partiell stetige Funktion auf $E^{(1)} \times E^{(2)} \times \ldots \times E^{(k)}$, so ist $f \varepsilon\, \mathfrak{C}_k^k(E^{(1)} \times E^{(2)} \times \ldots \times E^{(k)})$.*

Für $k = 2$ ist die Behauptung richtig nach **39·2·1**; wir nehmen an, sie sei richtig für $k - 1$, und zeigen, daß sie dann auch für k gilt. Wir können wieder f als endlich annehmen. Seien etwa die Räume $E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(k-1)}$ separabel, und sei die Menge der Punkte a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ dicht in $E^{(1)}$. Wir setzen:

$$h_n(x_1, x_2, \ldots, x_k) =$$
$$h\bigl(x_1; a_1, \ldots, a_n; f(a_1, x_2, \ldots, x_k), \ldots, f(a_n, x_2, \ldots, x_k)\bigr);$$

nach Annahme ist $f(a_i, x_2, \ldots, x_k) \varepsilon\, \mathfrak{C}_{k-1}^{k-1}(E^{(2)} \times \ldots \times E^{(k)})$, also ist nach **39·1·41** $h_n(x_1, x_2, \ldots, x_k) \varepsilon\, \mathfrak{C}_{k-1}^{k-1}(E^{(1)} \times E^{(2)} \times \ldots \times E^{(k)})$. Da $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ partiell stetig nach x_1 ist, gilt zufolge **39·1·5** $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \lim\limits_n h_n(x_1, x_2, \ldots, x_k)$; nach **35·1·5** ist also $f \varepsilon\, \mathfrak{C}_k^k(E^{(1)} \times E^{(2)} \times \ldots \times E^{(k)})$.

39·2·2. *Ist $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ eine partiell stetige Funktion im R_k, und setzen wir $f(x, x, \ldots, x) = g(x)$, so ist $g(x) \varepsilon\, \mathfrak{C}_k^k(R_1)$.*

Aus **39·2·11** folgt für $E^{(1)} = E^{(2)} = \ldots = E^{(k)} = R_1$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \varepsilon\, \mathfrak{C}_k^k(R_k);$$

bezeichnen wir mit A die Gerade $x_1 = x_2 = \ldots = x_k$ des R_k, so ist:

$$f(x, x, \ldots, x) = A \,1\, f(x_1, x_2, \ldots, x_k);$$

nach **35·3·3** ist also $f(x, x, \ldots, x) \varepsilon\, \mathfrak{C}_k^k(A)$, und da die Abbildung, die dem Punkte $(x, x, \ldots, x) \varepsilon A$ den Punkt $x \varepsilon R_1$ zuordnet, homöomorph ist, folgt daraus die Behauptung.

Wir werden in **39·2·31** zeigen, daß umgekehrt jede $\mathfrak{C}_k^k$-Funktion im R_1 auf diese Weise aus einer im R_k partiell stetigen Funktion gewonnen werden kann. Zunächst beweisen wir:

39·2·3. *Ist $g(x) \varepsilon\, \mathfrak{C}_2^2(R_1)$ und $\varrho > 0$, so gibt es eine im R_2 partiell stetige Funktion $f(x_1, x_2)$, so daß $f(x, x) = g(x)$ und $f(x_1, x_2) = 0$ in jedem Punkte (x_1, x_2), der von der Geraden $x_1 = x_2$ einen Abstand $\geq \varrho$ hat.*

Vermöge der Schränkungstransformation können wir $|g| \leq 1$ annehmen. Da nach **35·1·5** $\mathfrak{C}_2^2 = (\mathfrak{C}_1^1)^*$, gibt es eine Folge $((g_n))$ stetiger Funktionen im R_1, so daß $g_n \to g$, wobei noch ohne weiteres angenommen werden kann: $|g_n| \leq 1$. Nach **25·7·31** gibt es ein $\varrho_n > 0$, so daß für je zwei Punkte x', x'' aus $[-n, n]$:

$$(2) \qquad |g_n(x') - g_n(x'')| < \frac{1}{n} \quad \text{wenn} \quad |x' - x''| \leq \varrho_n;$$

dabei kann ohne weiteres angenommen werden: $\varrho_{n-1} < \varrho_n < \varrho$. Wir legen nun im R_2 zur Geraden $x_1 = x_2$ auf beiden Seiten Parallele P_n und P'_n im Abstande ϱ_{n+1} ($n = 1, 2, \ldots$), und definieren $f(x_1, x_2)$ durch die Vorschrift: im Punkte $x_1 = x, x_2 = x$ der Geraden $x_1 = x_2$ sei $f(x_1, x_2) = g(x)$; in den Schnittpunkten der in diesem Punkte errichteten Normalen der Geraden $x_1 = x_2$ mit den Parallelen P_n, P'_n sei $f(x_1, x_2) = g_n(x)$; auf dem zwischen zwei Parallelen P_n, P_{n+1} bzw. P'_n, P'_{n+1} liegenden Stück dieser Normalen sei $f(x_1, x_2)$ linear; außerhalb des von P_1 und P'_1 begrenzten Streifens sei $f(x_1, x_2) = 0$. Wählen wir $g_1(x) = 0$, was ohne weiteres möglich ist, so ist, da $\varrho_2 < \varrho$ war, $f(x_1, x_2) = 0$ in allen Punkten (x_1, x_2), die von der Geraden $x_1 = x_2$ einen Abstand $\geq \varrho$ haben, und es ist $f(x_1, x_2)$ stetig in jedem nicht auf dieser Geraden gelegenen Punkte; bleibt also nur zu zeigen, daß f in jedem Punkte dieser Geraden partiell stetig ist. Sei also $x_1 = \bar{x}$, $x_2 = \bar{x}$ ein Punkt der Geraden $x_1 = x_2$; wir errichten in ihm die Normale zu dieser Geraden und bezeichnen den Schnittpunkt dieser Normalen und der Parallelen P_n mit (x_{1n}, x_{2n}). Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben; wir wählen $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ so groß, daß für $n \geq n_0$ das Intervall $[\bar{x} - \varrho_n, \bar{x} + \varrho_n]$ ganz in $[-n_0, n_0]$, also auch ganz in $[-n, n]$ liegt, und daß $|g_n(\bar{x}) - g(\bar{x})| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ (was wegen $g_n \to g$ möglich ist). Wegen $f(\bar{x}, \bar{x}) = g(\bar{x}), f(x_{1n}, x_{2n}) = g_n(\bar{x})$ ist dann:

$$(2\cdot1) \qquad |f(x_{1n}, x_{2n}) - f(\bar{x}, \bar{x})| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0 .$$

Seien nun p_n, q_n die Schnittpunkte der Geraden P_n mit der Geraden $x_1 = \bar{x}$ bzw. $x_2 = \bar{x}$; wir betrachten das abgeschlossene Rechteck Q_n, das begrenzt wird von den Parallelen P_n, P_{n+1} und den in den Punkten p_n, q_n auf P_n errichteten Normalen; sei (x_1, x_2) ein Punkt der in P_n (bzw. in P_{n+1}) liegenden Seite dieses Rechteckes, und sei (x^*, x^*) der Schnittpunkt der im Punkte (x_1, x_2) errichteten Normalen dieser Rechtecksseite mit der Geraden $x_1 = x_2$; da P_n von der Geraden $x_1 = x_2$ den Abstand ϱ_{n+1} hat, ist dann offenbar $|x^* - \bar{x}| < \varrho_{n+1} < \varrho_n$, und da nach Definition: $f(x_1, x_2) = g_n(x^*)$ (bzw. $= g_{n+1}(x^*)$), $f(x_{1n}, x_{2n}) = g_n(\bar{x})$, $f(x_{1\,n+1}, x_{2\,n+1}) = g_{n+1}(\bar{x})$, gelten auf den in P_n bzw. P_{n+1} liegenden Seiten des Rechteckes Q_n für $n \geq n_0$ nach (2) die Ungleichungen:

$$|f(x_1, x_2) - f(x_{1n}, x_{2n})| < \varepsilon \text{ bzw. } |f(x_1, x_2) - f(x_{1\,n+1}, x_{2\,n+1})| < \varepsilon;$$

sobald $n \geq n_0$, gilt also nach (2·1) auf den beiden genannten Seiten dieses Rechteckes: $|f(x_1, x_2) - f(\bar{x}, \bar{x})| < 2\varepsilon$; zufolge der Definition von f gilt dann aber diese Ungleichung im ganzen Rechteck Q_n für $n \geq n_0$; sie gilt also auch auf dem vom Punkte $(\bar{x}, \bar{x})$ und dem Punkte p_{n_0} bzw. q_{n_0} begrenzten Stücke der Geraden $x_1 = \bar{x}$ bzw. $x_2 = \bar{x}$. Und da die Funktion $f(x_1, x_2)$

in spiegelbildlich zur Geraden $x_1 = x_2$ gelegenen Punkten denselben Wert hat, ist dadurch ihre partielle Stetigkeit im Punkte $(\bar{x}, \bar{x})$ bewiesen.

39·2·31. *Ist* $g(x) \varepsilon \mathfrak{C}_k^k(R_1)$ *und* $\varrho > 0$, *so gibt es eine im* R_k *partiell stetige Funktion* $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, *so daß* $f(x, x, \ldots, x) = g(x)$ *und* $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0$ *in jedem Punkte* $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, *der von der Geraden* $x_1 = x_2 = \ldots = x_k$ *einen Abstand* $\geq \varrho$ *hat.*

Nach **39·2·3** ist die Behauptung richtig für $k = 2$; wir nehmen sie als richtig an für $k - 1$, und zeigen, daß sie dann auch für k gilt. Vermöge der Schränkungstransformation können wir dabei g als endlich annehmen. Wir bezeichnen mit G die Gerade $x_1 = x_2 = \ldots = x_k$ des R_k und legen durch G einen R_{k-2}, der keine der k Koordinatenachsen des R_k enthält, und den wir mit H bezeichnen (im Falle $k = 3$ ist $H = G$); in dem durch H gehenden R_{k-1}-Büschel gibt es dann genau einen R_{k-1}, der die x_i-Achse enthält, und den wir mit K_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ bezeichnen; durch geeignete Wahl von H kann erreicht werden, daß keine zwei K_i zusammenfallen; seien K_i', K_i'' $(i = 1, 2, \ldots, k)$ weitere $2k$ durch H gehende R_{k-1}, derart daß $K_1', K_1, K_1'', K_2', K_2, K_2'', \ldots, K_k', K_k, K_k''$ zyklisch aufeinander folgen; das von K_i' und K_i'' begrenzte abgeschlossene Dieder, das K_i enthält, bezeichnen wir mit D_i; dann sind die Mengen $D_i - H$ disjunkt. Wir definieren zunächst auf D_i eine partiell stetige Funktion $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, die $= g(x)$ ist im Punkte $x_1 = x, x_2 = x, \ldots, x_k = x$ von G, und $= 0$ ist auf $K_i' - G$, auf $K_i'' - G$ und in allen Punkten von D_i, die von G einen Abstand $\geq \varrho$ haben; es genügt, diese Funktion in einem der beiden Keile zu definieren, in die D_i durch H zerlegt wird, da ihre Definition im anderen ganz analog erfolgen kann. Wir führen diese Definition etwa für $i = k$ durch; sei also C einer der beiden Keile, in die D_k durch H zerlegt wird, z. B. der die positive Hälfte der x_k-Achse $(x_k > 0)$ enthaltende; sei ferner $((\sigma_n))$ eine abnehmende Folge positiver Zahlen mit $\sigma_1 < \varrho$ und $\sigma_n \to 0$; sei $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ eine Folge untereinander und zu H, nicht aber zur x_k-Achse paralleler R_{k-1}, so daß P_n die Gerade $x_1 = x_2 = \ldots = x_{k-1} = x_k - \sigma_n$ enthält. Da $g(x) \varepsilon \mathfrak{C}_k^k(R_1)$, gibt es nach **35·1·5** in $\mathfrak{C}_{k-1}^{k-1}(R_1)$ eine Folge $((g_n))$ mit $\lim\limits_n g_n = g$, wobei wir noch ohne weiteres $g_1 = 0$ setzen können; nach Annahme gibt es, wenn $((\varrho_n))$ eine Folge positiver Zahlen mit $\varrho_n \to 0$ bedeutet, im R_{k-1} eine partiell stetige Funktion $g_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})$, so daß $g_n(x, x, \ldots, x) = g_n(x)$ und $g_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) = 0$ für alle Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})$, die von der Geraden $x_1 = x_2 = \ldots = x_{k-1}$ einen Abstand $\geq \varrho_n$ haben, wobei ohne weiteres $g_1(x_1, \ldots, x_{k-1}) = 0$ angenommen werden kann; wir setzen nun: $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k) = g_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})$ in allen Punkten von $C\,P_n$; war ϱ_n hinlänglich klein gewählt, so ist dann $f_k = 0$ auf

$K_k' P_n$ und $K_k'' P_n$; auch in allen übrigen Punkten von $K_k' C - G$ und $K_k'' C - G$ setzen wir $f_k = 0$; auf G definieren wir f_k durch $f_k(x, x, \ldots, x) = g(x)$; um nun f_k auch in den Punkten $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ von $C - (\underset{n}{S} P_n + K_k' + K_k'')$ zu definieren, legen wir durch einen solchen Punkt die zur x_k-Achse parallele Gerade; in ihren Schnittpunkten mit $C P_n$, $C K_k'$, $C K_k''$ ist f_k schon definiert, und wir setzen nun fest, daß f_k zwischen zwei aufeinander folgenden dieser Schnittpunkte linear variieren soll; auf demjenigen der beiden Teile, in die C durch P_1 zerlegt wird, der nicht an H grenzt, sei $f_k = 0$. Nun ist f_k auf ganz C definiert; da $\sigma_1 < \varrho$, also alle $\sigma_n < \varrho$, ist, wenn die ϱ_n hinlänglich klein gewählt werden, $f_k = 0$ in allen Punkten von C, die von G einen Abstand $\geq \varrho$ haben. Wir haben noch zu zeigen, daß f_k partiell stetig ist. In einem Punkte von $C - H$ folgt die partielle Stetigkeit nach x_k unmittelbar aus der Definition, die partielle Stetigkeit nach x_i $(i < k)$ folgert man leicht aus der partiellen Stetigkeit der $g_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})$. In den Punkten von H ist nur die partielle Stetigkeit nach x_k zu beweisen, da jede durch einen solchen Punkt gehende Parallele zu einer x_i-Achse $(i \neq k)$ ganz im Dieder D_i $(i \neq k)$ liegt, mithin mit C nur diesen Punkt gemein hat; ist zunächst p ein Punkt von G, etwa $p = (x, x, \ldots, x)$, so folgt die Behauptung, da $f_k(x, x, \ldots x, x + \sigma_n) = g_n(x, x, \ldots, x) = g_n(x)$ ist, und da $f(x, x, \ldots, x, x_k)$ für $x + \sigma_n \geq x_k \geq x + \sigma_{n+1}$ linear variiert, aus $\lim\limits_n g_n(x) = g(x)$; sei sodann $p \in H - G$ und sei $p = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k)$; nach Definition ist dann $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k) = 0$; es können nicht $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{k-1}$ einen und denselben Wert $\bar{x}$ haben, da sonst die zur x_k-Achse parallele Verbindungsgerade des Punktes p mit dem Punkte $(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x})$ von G, mithin auch die x_k-Achse in H läge, entgegen der Wahl von H; es liegt also der Punkt $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{k-1})$ des R_{k-1} nicht auf der Geraden $x_1 = x_2 = \ldots = x_{k-1}$ des R_{k-1}, hat also von dieser Geraden positiven Abstand, und da $g_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) = 0$ war in allen Punkten des R_{k-1}, die von dieser Geraden einen Abstand $\geq \varrho_n$ haben, und da $\varrho_n \to 0$ galt, ist $g_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{k-1}) = 0$ für fast alle n; also ist nach Definition auch $f_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_{k-1}, x_k) = 0$ für alle hinlänglich nahe an $\bar{x}_k$ gelegenen x_k, d. h. f_k ist partiell stetig nach x_k im Punkte $p = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k)$. — Nachdem in dieser Weise im Dieder D_i die gewünschte partiell stetige Funktion f_i definiert ist, definieren wir $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ im R_k durch: $f = f_i$ in D_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, $f = 0$ in $R_k - \underset{i=1}{\overset{k}{S}} D_i$; dann ist f partiell stetig; dies ist evident in jedem Punkte $p \in R_k - H$; ist $p \in H$, so liegt die durch p gehende, zur x_i-Achse parallele Gerade ganz in D_i, so daß im Falle $p \in H$ die partielle Stetigkeit von f aus der der f_i folgt. Und

offenbar ist $f = 0$ in jedem Punkte, der von G einen Abstand $\geqq \varrho$ hat, da dies von den f_ι galt.

Da es nach **35·8·1** im R_1 Funktionen gibt, die genau $\mathfrak{C}_k^k$-Funktionen sind, lehrt **39·2·31**, in Ergänzung zu **39·2·11**, daß es im R_k partiell stetige Funktionen gibt, die genau $\mathfrak{C}_k^k$-Funktionen sind; denn wäre für jede im R_k partiell stetige Funktion: $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \varepsilon \mathfrak{C}^{k-1}(R_n) + \mathfrak{C}_{k-1}(R_n)$, so wäre, wie der Beweis von **39·2·2** zeigt, $f(x, x, \ldots, x) \varepsilon \mathfrak{C}^{k-1}(R_1) + \mathfrak{C}_{k-1}(R_1)$, im Widerspruche zu **39·2·31**.

Literatur: R. Baire, Ann. di mat (3) 3 (1899) S. 87; H. Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 201.

3. Stetigkeitspunkte partiell stetiger Funktionen. Ist $M \subseteqq E^{(1)} \times E^{(2)}$, so bezeichnen wir die Projektion (§ 23, 6) von M in den Raum $E^{(1)}$ (bzw. $E^{(2)}$) mit $M^{(1)}$ (bzw. $M^{(2)}$); die Menge aller Punkte $(x_1, x_2) \varepsilon M$ mit $x_2 = a$ (bzw. $x_1 = a$) bezeichnen wir mit $M_a^{(1)}$ (bzw. mit $M_a^{(2)}$).

Sei O offen in $E^{(1)} \times E^{(2)}$ und $f(x_1, x_2)$ eine Funktion auf O; ist $M \subseteqq O$, so bezeichnen wir mit $\omega(M)$ die Schwankung von $M \mid f$ (§ 26, 3); ist $\bar{x}$ der Punkt $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ von $E^{(1)} \times E^{(2)}$ und $\bar{x} \varepsilon O$, so bezeichnen wir mit $\omega(\bar{x})$ die Schwankung von f im Punkte $\bar{x}$, mit $\omega_1(\bar{x})$ (bzw. $\omega_2(\bar{x})$) die Schwankung von $f(x_1, \bar{x}_2)$ im Punkte $\bar{x}_1$ (bzw. die Schwankung von $f(\bar{x}_1, x_2)$ im Punkte $\bar{x}_2$); dann sind nach **26·3·2** die Punkte $\bar{x} \varepsilon O$, in denen f stetig, bzw. partiell stetig nach x_1, bzw. partiell stetig nach x_2 ist, gegeben durch $\omega(\bar{x}) = 0$, bzw. $\omega_1(\bar{x}) = 0$, bzw. $\omega_2(\bar{x}) = 0$.

Die Funktion f auf O heiße eine B-Funktion auf O, wenn sie folgende Eigenschaft hat: ist $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \varepsilon O$, sind $G^{(1)}$ und $G^{(2)}$ offen in $E^{(1)}$ bzw. in $E^{(2)}$ und ist $\bar{x}_1 \varepsilon G^{(1)}$, $\bar{x}_2 \varepsilon G^{(2)}$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine nicht leere, in $E^{(1)}$ offene Menge $H^{(1)} \subseteqq G^{(1)}$ und ein $x_2' \varepsilon G^{(2)}$, so daß $\|f(x_1, x_2') - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\| < \varepsilon$ für alle $(x_1, x_2') \varepsilon O$ mit $x_1 \varepsilon H^{(1)}$. Bemerken wir noch, daß dabei die Menge $H^{(1)}$ und der Punkt $x_2' \varepsilon G^{(2)}$ immer so angenommen werden können, daß $(x_1, x_2') \varepsilon O$ für alle $x_1 \varepsilon H^{(1)}$. Denn sei $\varrho > 0$, und sei U die Umgebung 2ϱ von $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ in $E^{(1)} \times E^{(2)}$, $G'^{(1)}$ die Umgebung ϱ von $\bar{x}_1$ in $E^{(1)}$, $G'^{(2)}$ die Umgebung ϱ von $\bar{x}_2$ in $E^{(2)}$; dann ist offenbar $G'^{(1)} \times G'^{(2)} \subseteqq U$. Wählen wir ϱ hinlänglich klein, so ist $G'^{(1)} \subseteqq G^{(1)}$, $G'^{(2)} \subseteqq G^{(2)}$, $U \subseteqq O$, also auch $G'^{(1)} \times G'^{(2)} \subseteqq O$; ist f eine B-Funktion auf O, so gibt es eine nicht leere, in $E^{(1)}$ offene Menge $H^{(1)} \subseteqq G'^{(1)}$ und ein $x_2' \varepsilon G'^{(2)}$, so daß $\|f(x_1, x_2') - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\| < \varepsilon$ für alle $(x_1, x_2') \varepsilon O$ mit $x_1 \varepsilon H^{(1)}$; wegen $H^{(1)} \subseteqq G'^{(1)}$, $G'^{(1)} \times G'^{(2)} \subseteqq O$, $x_2' \varepsilon G'^{(2)}$ gilt nun aber $(x_1, x_2') \varepsilon O$ für alle $x_1 \varepsilon H^{(1)}$, und wegen $G'^{(1)} \subseteqq G^{(1)}$, $G'^{(2)} \subseteqq G^{(2)}$ ist auch $H^{(1)} \subseteqq G^{(1)}$, $x_2' \varepsilon G^{(2)}$.

Ist f eine B-Funktion auf O und $O' \subseteqq O$, so ist $O' \mid f$ eine B-Funktion auf O'.

39·3·1. *Ist $f(x_1, x_2)$ eine B-Funktion auf O und ist für jede nicht leere, in $E^{(1)}$ offene Menge $G^{(1)} \subseteqq O^{(1)}$: $\omega\left((G^{(1)} \times E^{(2)})\, O\right) \geq q$, so ist die Menge aller $x_1 \varepsilon O^{(1)}$ mit $\omega(O^{(2)}_{x_1}) < q$ von erster Kategorie in $O^{(1)}$.*

Es genügt zu zeigen: für jedes $q' < q$ ist die Menge aller $x_1 \varepsilon O^{(1)}$ mit $\omega(O^{(2)}_{x_1}) < q'$ nirgends dicht in $O^{(1)}$. Sei $G^{(1)}$ eine nicht leere, in $E^{(1)}$ offene Menge $\subseteqq O^{(1)}$; nach **11·2·2** haben wir zu zeigen: es gibt eine nicht leere, in $E^{(1)}$ offene Menge $K^{(1)} \subseteqq G^{(1)}$, so daß $\omega(O^{(2)}_{x_1}) \geq q'$ für alle $x_1 \varepsilon K^{(1)}$. Sei z das Infimum (§ 25, 4) der Funktion $(G^{(1)} \times E^{(2)})\, O\, 1\, f$ und sei $z^* > z$; dann gibt es einen Punkt $(x_1^*, x_2^*) \varepsilon (G^{(1)} \times E^{(2)})\, O$, so daß $f(x_1^*, x_2^*) < z^*$, und weil f eine B-Funktion, gibt es eine nicht leere, in $E^{(1)}$ offene Menge $H^{(1)} \subseteqq G^{(1)}$ und ein $x_2' \varepsilon O^{(2)}$, so daß $(x_1, x_2') \varepsilon O$ und $f(x_1, x_2') < z^*$ für alle $x_1 \varepsilon H^{(1)}$. Ist $\bar{z}$ das Supremum von $(H^{(1)} \times E^{(2)})\, O\, 1\, f$ und $\bar{z}^* < \bar{z}$, so gibt es einen Punkt $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \varepsilon (H^{(1)} \times E^{(2)})\, O$ mit $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > \bar{z}^*$, und weil f eine B-Funktion, gibt es eine nicht leere, in $E^{(1)}$ offene Menge $K^{(1)} \subseteqq H^{(1)}$ und ein $\bar{x}_2' \varepsilon O^{(2)}$, so daß $(x_1, \bar{x}_2') \varepsilon O$ und $f(x_1, \bar{x}_2') > \bar{z}^*$ für alle $x_1 \varepsilon K^{(1)}$. Dann ist, wenn $z^* < \bar{z}^*$ ist: $\omega(O^{(2)}_{x_1}) > \|\bar{z}^* - z^*\|$ für alle $x_1 \varepsilon K^{(1)}$. Da $q' < q$ und nach Voraussetzung $q \leq \omega\left((H^{(1)} \times E^{(2)})\, O\right) \leq \|\bar{z} - z\|$, können z^* und $\bar{z}^*$ so gewählt werden, daß $z^* < \bar{z}^*$ und $\|\bar{z}^* - z^*\| > q'$; dann aber ist $\omega(O^{(2)}_{x_1}) > q'$ für alle $x_1 \varepsilon K^{(1)}$, w. z. b. w.

39·3·2. *Ist $f(x_1, x_2)$ eine B-Funktion auf O, ist $\bar{x}_2 \varepsilon O^{(2)}$ und $\omega(x) \geq q$ für alle $x \varepsilon O^{(1)}_{\bar{x}_2}$, so ist die Menge aller $x \varepsilon O^{(1)}_{\bar{x}_2}$ mit $\omega_2(x) < q$ von erster Kategorie in $O^{(1)}_{\bar{x}_2}$.*

Sei $P^{(1)}$ die Projektion von $O^{(1)}_{\bar{x}_2}$ in den Raum $E^{(1)}$ und $G^{(2)}_n$ die Umgebung $\frac{1}{n}$ von $\bar{x}_2$ in $E^{(2)}$. Da $\omega(x) \geq q$ für alle $x \varepsilon O^{(1)}_{\bar{x}_2}$, ist dann für jede nicht leere, in $E^{(1)}$ offene Menge $G^{(1)} \subseteqq P^{(1)}$: $\omega\left((G^{(1)} \times G^{(2)}_n)\, O\right) \geq q$. Aus **39·3·1** folgt also, indem wir dort $E^{(2)}$ durch $G^{(2)}_n$ und O durch $(P^{(1)} \times G^{(2)}_n)\, O = O'_n$ ersetzen: die Menge A_n aller $x_1 \varepsilon P^{(1)}$ mit $\omega\left((O'_n)^{(2)}_{x_1}\right) < q$ ist von erster Kategorie in $P^{(1)}$. Also ist auch $A = \underset{n}{S}\, A_n$ von erster Kategorie in $P^{(1)}$. Nach **26·3·1** ist aber $\omega_2(x_1, \bar{x}_2) = \lim\limits_n \omega\left((O'_n)^{(2)}_{x_1}\right)$; aus $\omega_2(x_1, \bar{x}_2) < q$ folgt also: $x_1 \varepsilon A_n$ für fast alle n, also auch $x_1 \varepsilon A$; die Menge aller $x_1 \varepsilon P^{(1)}$ mit $\omega_2(x_1, \bar{x}_2) < q$ ist also von erster Kategorie in $P^{(1)}$, oder mit anderen Worten: die Menge aller $x \varepsilon O^{(1)}_{\bar{x}_2}$ mit $\omega_2(x) < q$ ist von erster Kategorie in $O^{(1)}_{\bar{x}_2}$.

39·3·21. *Ist $E^{(2)}$ separabel, $f(x_1, x_2)$ eine B-Funktion auf O und $\omega(x) \geq q$ für alle $x \varepsilon O$, so ist, wenn Q die Menge aller $x \varepsilon O$ mit $\omega_2(x) < q$ und Q' die Projektion von Q in den Raum $E^{(1)}$ bedeutet, Q' von erster Kategorie in $E^{(1)}$.*

Sei $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ eine abzählbare in $E^{(2)}$ dichte Menge. Zu jedem $\bar{x}_1 \varepsilon Q'$ gibt es ein $\bar{x}_2 \varepsilon O^{(2)}_{\bar{x}_1}$, so daß $\omega_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) < q$; da nach **36·3·11** $\omega_2(\bar{x}_1, x_2)$

eine oberhalb stetige Funktion auf $O^{(2)}_{\bar{x}_1}$ ist, gibt es also auch ein a_ν, so daß $\omega_2(\bar{x}_1, a_\nu) < q$. Ist also Q_ν die Projektion von $Q\,O^{(1)}_{a_\nu}$ in den Raum $E^{(1)}$, so ist $Q' = \underset{\nu}{S}\,Q_\nu$; nach **39·3·2** und **19·4·3** ist aber Q_ν von erster Kategorie in $E^{(1)}$, also auch Q'.

39·3·22. *Ist $E^{(1)}$ ein Youngscher Raum, ist f eine B-Funktion auf O und ist f partiell stetig nach x_2 für alle $x \varepsilon O^{(1)}_{\bar{x}_2}$, so ist die Menge aller $x \varepsilon O^{(1)}_{\bar{x}_2}$, in denen f unstetig ist, von erster Kategorie in $O^{(1)}_{\bar{x}_2}$.*

Nach **26·3·2** genügt es, zu zeigen: für jedes $q > 0$ ist die Menge A_q aller $x \varepsilon O^{(1)}_{\bar{x}_2}$ mit $\omega(x) \geq q$ nirgends dicht in $O^{(1)}_{\bar{x}_2}$. Nach **26·3·41** ist A_q abgeschlossen in $O^{(1)}_{\bar{x}_2}$; wäre A_q nicht nirgends dicht in $O^{(1)}_{\bar{x}_2}$, so gäbe es also nach **11·2·111** eine in $O^{(1)}_{\bar{x}_2}$ offene Menge $G^{(1)} \supset A$, so daß $\omega(x) \geq q$ für alle $x \varepsilon G^{(1)}$; nach **10·8·1** ist $G^{(1)} = O^{(1)}_{\bar{x}_2} H$, wo H offen in $E^{(1)} \times E^{(2)}$; dabei kann ohne weiteres $H \subseteqq O$ angenommen werden; aus **39·3·2**, angewendet auf $H\,1\,f$ würde dann folgen, daß die Menge aller $x \varepsilon G^{(1)}$ mit $\omega_2(x) < q$ von erster Kategorie in $G^{(1)}$ ist; dann aber gäbe es nach **19·7·511** einen Punkt $x \varepsilon G^{(1)}$ mit $\omega_2(x) \geq q$, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß f partiell stetig nach x_2 für alle $x \varepsilon O^{(1)}_{\bar{x}_2}$.

Wir betrachten nun einen Produktraum $E^{(1)} \times E^{(2)} \times \ldots \times E^{(n)}$, auf den sich, wo nichts anderes gesagt, die im folgenden auftretenden Relativbegriffe (wie offen, Umgebung usf.) beziehen.

39·3·3. *Sind $E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(n-1)}$ Youngsche Räume, ist O offen, und ist f eine partiell stetige Funktion auf O, so gibt es zu jedem $\bar{x} \varepsilon O$, zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jeder Umgebung U von $\bar{x}$ eine nicht leere, offene Menge $H \subseteqq U$, so daß $\|f(x) - f(\bar{x})\| < \varepsilon$ für alle $x \varepsilon H$.*

Wir beweisen das durch Induktion. Die Behauptung ist trivial für $n = 1$; wir nehmen an, sie gelte für $n - 1$, und zeigen, daß sie dann auch für n gilt. Setzen wir $E^{(1)} \times \ldots \times E^{(n-1)} = E'$, also $E^{(1)} \times \ldots \times E^{(n)} = E' \times E^{(n)}$, und schreiben die Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$ von $E^{(1)} \times \ldots \times E^{(n)}$ in der Form (y, x_n), wo $y = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \varepsilon E'$, so ist O eine offene Menge in $E' \times E^{(n)}$ und $f(x_1, \ldots, x_n)$ kann in der Form $f(y, x_n)$ geschrieben werden. Sei $(y^*, x_n^*) \varepsilon O$, wo $y^* = (x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*)$; ist dann G' offen in E' und $y^* \varepsilon G'$, so gibt es, da nach Annahme die Behauptung für $n - 1$ gilt, zu jedem $\varepsilon > 0$ eine nicht leere, in E' offene Menge $H' \subseteqq G'$, so daß $\|f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^*) - f(x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*, x_n^*)\| < \varepsilon$ für alle $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \varepsilon H'$, d. h. $\|f(y, x_n^*) - f(y^*, x_n^*)\| < \varepsilon$ für alle $y \varepsilon H'$, d. h. $f(y, x_n)$ ist **eine B-Funktion auf O**. Sei nun $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \varepsilon O$ und U eine Umgebung von $\bar{x}$; wir bezeichnen mit $U_{\bar{x}_n}$ die Menge aller $(x_1, \ldots, x_n) \varepsilon U$ mit $x_n = \bar{x}_n$; da nach

Annahme die Behauptung für $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \bar{x}_n)$ gilt, gibt es eine nicht leere, in $U_{\bar{x}_n}$ offene Menge $\bar{H}$, so daß für alle $(x_1, \ldots, x_{n-1}, \bar{x}_n) \varepsilon \bar{H}$:

$$(3) \qquad \| f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n) \| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da nach **20·2·71** $E^{(1)} \times \ldots \times E^{(n-1)}$ ein Youngscher Raum, ist nach **39·3·22** die Menge aller Punkte von $U_{\bar{x}_n}$, in denen $f(y, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ unstetig ist, von erster Kategorie in $U_{\bar{x}_n}$; da nach **20·4·1** und **19·1·2** auch $U_{\bar{x}_n}$ eine Youngsche Menge, gibt es also nach **19·7·511** einen Punkt $\tilde{x} \varepsilon \bar{H}$, in dem f stetig ist; es gibt also eine offene Menge $H \subseteqq U$, so daß $\| f(x) - f(\tilde{x}) \| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \varepsilon H$. Wegen (3) ist aber $\| f(\tilde{x}) - f(\bar{x}) \| < \frac{\varepsilon}{2}$, also ist $\| f(x) - f(\bar{x}) \| < \varepsilon$ für alle $x \varepsilon H$.

39·3·31. *Sind $E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(n-1)}$ Youngsche Räume, ist O offen und f eine partiell stetige Funktion auf O, so ist, wenn $(x_1, \ldots, x_{n-1}) = y$ und $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = f(y, x_n)$ gesetzt wird, $f(y, x_n)$ eine B-Funktion auf O.*

Dies folgt unmittelbar aus **39·3·3.**

39·3·32. *Sind $E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(n-1)}$ Youngsche Räume, ist O offen und f eine partiell stetige Funktion auf O, so ist, wenn $O_{\bar{x}_n}$ die Menge aller $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \varepsilon O$ mit $x_n = \bar{x}_n$ bedeutet, die Menge aller Punkte von $O_{\bar{x}_n}$, in denen f unstetig ist, von erster Kategorie in $O_{\bar{x}_n}$.*

Dies folgt aus **39·3·22** und **39·3·31.**

Aus **39·3·32** entnimmt man, daß — unter den Voraussetzungen dieses Satzes — jede partiell stetige Funktion auf O Stetigkeitspunkte besitzt; und zwar liegen diese Stetigkeitspunkte nach **19·7·51** in jeder Menge $O_{\bar{x}_n}$ dicht. Wir werden in **39·3·6** eine Verschärfung von **39·3·32** beweisen. Dazu benötigen wir zwei Hilfssätze.

39·3·4. *Sind $E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(n-1)}$ Youngsche Räume, ist $E^{(n)}$ in sich kompakt und ist f eine partiell stetige Funktion auf $E^{(1)} \times \ldots \times E^{(n)}$, so gibt es eine in $E^{(n)}$ dichte abzählbare Menge C und zu jedem $\varrho > 0$ und zu jeder in $E^{(1)} \times \ldots \times E^{(n-1)}$ offenen Menge $G \supset A$ ein $\sigma > 0$, eine in G offene Menge $H \supset A$ und eine Residualmenge H^* in H, so daß f für alle $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \varepsilon H^*$ und alle $x_n \varepsilon C$ stetig in $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ ist, und für alle $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \varepsilon H^*$ und alle $x_n' \varepsilon E^{(n)}$, $x_n'' \varepsilon E^{(n)}$ mit $x_n' x_n'' < \sigma$ die Ungleichung gilt:*

$$\| f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n') - f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n'') \| \leqq \varrho.$$

Nach **15·1·41** ist $E^{(n)}$ separabel, es gibt also eine abzählbare in $E^{(n)}$ dichte Menge C; ihre Punkte seien $c_1, c_2, \ldots, c_\nu, \ldots$. Sei A_ν die Menge aller

$(x_1, \ldots, x_{n-1}) \varepsilon G$, für die $(x_1, \ldots, x_{n-1}, c_\nu)$ ein Unstetigkeitspunkt von f ist; nach **39·3·32** ist A_ν von erster Kategorie in G, mithin auch $\underset{\nu}{S} A_\nu$ von erster Kategorie in G, und $B = G - \underset{\nu}{S} A_\nu$ eine Residualmenge in G. Weil f partiell stetig nach x_n, gibt es zufolge **25·7·31** zu jedem Punkte $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \varepsilon B$ ein $\sigma(x_1, \ldots, x_{n-1}) > 0$, so daß:

$$\|f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n') - f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n'')\| \leq \varrho$$

für alle $x_n' \varepsilon E^{(n)}$, $x_n'' \varepsilon E^{(n)}$ mit $x_n' x_n'' < \sigma(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Sei B_k die Menge aller $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \varepsilon B$, für die $\sigma(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \frac{1}{k}$ angenommen werden kann; wir zeigen zunächst: B_k ist abgeschlossen in B. Sei $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}) \varepsilon (B_k)^0 B$; wir haben zu zeigen: dann ist auch $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}) \varepsilon B_k$. Es gibt in B_k eine Folge von Punkten $(x_1^i, \ldots, x_{n-1}^i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, so daß $(x_1^i, \ldots, x_{n-1}^i) \to (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1})$; sei $x_n' \varepsilon C$, $x_n'' \varepsilon C$, $x_n' x_n'' < \frac{1}{k}$; nach Definition von B_k ist dann $\|f(x_1^{(i)}, \ldots, x_{n-1}^{(i)}, x_n') - f(x_1^{(i)}, \ldots, x_{n-1}^{(i)}, x_n'')\| \leq \varrho$; nach Definition von B ist f stetig in $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}, x_n')$ und in $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}, x_n'')$; also gilt auch:

$$(3{\cdot}1) \qquad \|f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}, x_n') - f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}, x_n'')| \leq \varrho;$$

da (3·1) für alle $x_n' \varepsilon C$, $x_n'' \varepsilon C$ mit $x_n' x_n'' < \frac{1}{k}$ gilt, da C dicht in $E^{(n)}$ und f partiell stetig nach x_n, gilt (3·1) auch für alle $x_n' \varepsilon E^{(n)}$, $x_n'' \varepsilon E^{(n)}$ mit $x_n' x_n'' < \frac{1}{k}$, d. h. $\sigma(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1})$ kann $= \frac{1}{k}$ angenommen werden, d. h. $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}) \varepsilon B_k$, w. z. b. w. — Nun ist $B = \underset{k}{S} B_k$; da B Residualmenge in G, also nach **19·7·7** nicht von erster Kategorie in G, ist mindestens ein B_k, etwa B_{k^*}, nicht nirgends dicht in G; nach **11·3·7** gibt es also eine in G offene Menge $H \supset A$, so daß $B_{k^*} H$ dicht in H; da B_{k^*} abgeschlossen in B, ist dann $B_{k^*} H = B H$; setzen wir $B H = H^*$, so gilt also nach Definition von B_{k^*} für alle $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \varepsilon H^*$ und alle $x_n' \varepsilon E^{(n)}$, $x_n'' \varepsilon E^{(n)}$ mit $x_n' x_n'' < \frac{1}{k^*}$ die Ungleichung $\|f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n') - f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n'')\| \leq \varrho$, nach Definition von B ist f stetig in $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, wenn $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \varepsilon H^*$ und $x_n \varepsilon C$; und weil B eine Residualmenge in G war, ist nach **19·7·3** H^* eine Residualmenge in H.

39·3·5. *Sind $E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(n-1)}$ Youngsche Räume, ist $E^{(n)}$ in sich kompakt und f eine partiell stetige Funktion auf $E^{(1)} \times \ldots \times E^{(n)}$, so ist für jedes $q > 0$ die Projektion P der Menge $[\omega(\mathfrak{x}) \geq q]$ in den Raum $E^{(1)} \times \ldots \times E^{(n-1)}$ nirgends dicht in $E^{(1)} \times \ldots \times E^{(n-1)}$.*

Nach **26·3·41** und **23·6·3** ist P abgeschlossen in $E^{(1)} \times \ldots \times E^{(n-1)}$; nach **11·2·111** genügt es also zu zeigen: es gibt keine in $E^{(1)} \times \ldots \times E^{(n-1)}$ offene Menge, die $\supset A$ und $\subseteqq P$ wäre. Angenommen, es gäbe eine solche Menge G. Wir wählen in **39·3·4** $\varrho = \frac{q}{6}$ und haben:

$$(3{\cdot}2)\qquad \begin{gathered} \| f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x'_n) - f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x''_n) \| \leqq \frac{q}{6} \\ \text{für } (x_1, \ldots, x_{n-1}) \,\varepsilon\, H^*,\ x'_n\, x''_n < \sigma\,. \end{gathered}$$

Sei $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}) \,\varepsilon\, H^*$; wegen $H^* \subseteqq G \subseteqq P$ gibt es ein $\bar{x}_n \,\varepsilon\, E^{(n)}$, so daß $\omega(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n) \geqq q$. Da f partiell stetig nach x_n, gibt es ein $c \,\varepsilon\, C$, so daß:

$$(3{\cdot}3)\qquad \| f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}, c) - f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n) \| < \frac{q}{18}\,,\quad c\,\bar{x}_n < \frac{\sigma}{2}\,.$$

Da nach Definition von H^* f stetig in $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}, c)$, gibt es eine in $E^{(1)} \times \ldots \times E^{(n-1)}$ offene Menge $O \subseteqq H$, so daß $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}) \,\varepsilon\, O$ und:

$$(3{\cdot}4)\qquad \begin{gathered} \| f(x_1, \ldots, x_{n-1}, c) - f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}, c) \| < \frac{q}{18} \\ \text{für } (x_1, \ldots, x_{n-1}) \,\varepsilon\, O\,. \end{gathered}$$

Bezeichnet $O^{(n)}$ die Menge aller $x_n \,\varepsilon\, E^{(n)}$ mit $x_n\,\bar{x}_n < \frac{\sigma}{2}$, so gibt es wegen $\omega(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n) \geqq q$ nach **26·3·12** einen Punkt $(x_1^*, \ldots, x_n^*) \,\varepsilon\, O \times O^{(n)}$, so daß:

$$(3{\cdot}5)\qquad \| f(x_1^*, \ldots, x_n^*) - f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \| > \frac{q}{3}\,,$$

und weil f nach **39·3·31** eine B-Funktion, gibt es eine in O offene Menge $O' \supset A$ und ein $x_n^{**} \,\varepsilon\, O^{(n)}$, so daß:

$$(3{\cdot}6)\qquad \begin{gathered} \| f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^{**}) - f(x_1^*, \ldots, x_n^*) \| < \frac{q}{18} \\ \text{für } (x_1, \ldots, x_{n-1}) \,\varepsilon\, O'\,. \end{gathered}$$

Aus (3·3), (3·4), (3·5), (3·6) folgt:

$$(3{\cdot}7)\qquad \begin{gathered} \| f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^{**}) - f(x_1, \ldots, x_{n-1}, c) \| > \frac{q}{6} \\ \text{für } (x_1, \ldots, x_{n-1}) \,\varepsilon\, O'\,. \end{gathered}$$

Nach (3·3) war $c\,\bar{x}_n < \frac{\sigma}{2}$, nach Definition von $O^{(n)}$ ist $x_n^{**}\,\bar{x}_n < \frac{\sigma}{2}$, also ist $x_n^{**}\,c < \sigma$; da H^* eine Residualmenge in H und $O' \subseteqq O \subseteqq H$, ist nach **19·7·51** $O'\,H^* \supset A$, somit steht (3·7) im Widerspruche zu (3·2).

39·3·6. *Sind $E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(n-1)}$ Youngsche Räume, ist $E^{(n)}$ in sich kompakt und f eine partiell stetige Funktion auf $E^{(1)} \times \ldots \times E^{(n)}$, so ist die Projektion P der Menge aller Unstetigkeitspunkte von f in den Raum $E^{(1)} \times \ldots \times E^{(n-1)}$ von erster Kategorie in $E^{(1)} \times \ldots \times E^{(n-1)}$.*

Fünftes Kapitel.

Die analytischen Mengen.

§ 40. Analytische Mengen.

1. Suslinsche Schemata. In Verallgemeinerung des Begriffes „dyadisches Schema" (§ 18, 7) definieren wir: Ist $\mathfrak{M}$ ein Mengensystem und ist jedem Komplexe $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ natürlicher Zahlen eine Menge $M_{n_1 n_2 \ldots n_k} \varepsilon \mathfrak{M}$ zugeordnet, so bilden die Mengen $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ ein Suslinsches Schema $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{M}$. Die Mengen $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ mit k Indizes heißen die Mengen k-ter Stufe von $\mathfrak{S}$. Die Menge $M_{n_1' n_2' \ldots n_l'}$ heißt ein Nachfolger von $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ $(k < l)$ (und umgekehrt $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ ein Vorgänger von $M_{n_1' n_2' \ldots n_l'}$), wenn $n_1' = n_1$, $n_2' = n_2$, ..., $n_k' = n_k$. Bei festem $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$ heiße das System der Mengen $M_{n_1 n_2 \ldots n_{k-1} n_k}$ $(n_k = 1, 2, \ldots)$ ein Abschnitt k-ter Stufe von $\mathfrak{S}$, und zwar ein auf M_{n_1}, auf $M_{n_1 n_2}, \ldots$, auf $M_{n_1 n_2 \ldots n_{k-1}}$ folgender Abschnitt. Die Summe aller Mengen eines Abschnittes k-ter Stufe heiße eine Abschnittsumme k-ter Stufe.

Wir bilden zu jeder Folge $\nu = ((n_k))$ natürlicher Zahlen den Durchschnitt:

$$M_\nu = M_{n_1} \cdot M_{n_1 n_2} \cdot \ldots \cdot M_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cdot \ldots; \tag{1}$$

die Menge:

$$A(\mathfrak{S}) = \underset{\nu}{S}\, M_\nu \tag{1·1}$$

(wo die Summation über alle Folgen ν natürlicher Zahlen zu erstrecken ist), heißt der Kern des Schemas $\mathfrak{S}$.

Das Suslinsche Schema $\mathfrak{S}$ heißt monoton, wenn in ihm stets $M_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}} \subseteq M_{n_1 \ldots n_k}$, d. h. wenn jeder Nachfolger Teil jedes Vorgängers ist.

Bezeichnen wir mit $M^{(k)}$ die Summe aller Mengen k-ter Stufe des Schemas $\mathfrak{S}$:

$$M^{(k)} = \underset{n_1, n_2, \ldots, n_k}{S} M_{n_1 n_2 \ldots n_k},$$

so gilt:

40·1·1. *Sind im monotonen Suslinschen Schema $\mathfrak{S}$ für jedes $k \geq k_0$ die Abschnittsummen k-ter Stufe disjunkt, so ist $A(\mathfrak{S}) = \underset{k}{D}\, M^{(k)}$.*

Da jedenfalls $A(\mathfrak{S}) \subseteqq \underset{k}{D}\, M^{(k)}$, ist nur zu zeigen: ist $a \,\varepsilon\, \underset{k}{D}\, M^{(k)}$, so ist auch $a \,\varepsilon\, A(\mathfrak{S})$. Sei $S_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ die Summe der Mengen des auf $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ folgenden Abschnittes $(k+1)$-ter Stufe. Da a für $k \geq k_0$ genau einer Abschnittsumme k-ter Stufe angehört, und da $\mathfrak{S}$ monoton, also $S_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supseteqq S_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}}$, gibt es eine Folge $((n_k^*))$, so daß $a \,\varepsilon\, S_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*}$ für $k \geq k_0$; wegen $M_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supseteqq S_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ ist dann auch $a \,\varepsilon\, M_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*}$ für $k \geq k_0$, und wegen der Monotonie von $\mathfrak{S}$ gilt dies für alle k. Also ist $a \,\varepsilon\, M_{n_1^*} \cdot M_{n_1^* n_2^*} \cdot \ldots \cdot M_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*} \cdot \ldots$, d. h. $a \,\varepsilon\, A(\mathfrak{S})$, w. z. b. w.

40·1·2. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, so kann jedes Suslinsche Schema $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{M}$ ersetzt werden durch ein monotones Suslinsches Schema $\mathfrak{S}'$ in $\mathfrak{M}$ von gleichem Kerne.*

Seien $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ die Mengen von $\mathfrak{S}$. Setzen wir $M'_{n_1 n_2 \ldots n_k} = M_{n_1} \cdot M_{n_1 n_2} \cdot \ldots \cdot M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, so ist, weil $\mathfrak{M}$ ein Ring, auch $M'_{n_1 n_2 \ldots n_k} \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$; also ist das System $\mathfrak{S}'$ der Mengen $M'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ ein monotones Suslinsches Schema in $\mathfrak{M}$. Setzen wir, wenn ν die Folge $((n_k))$ natürlicher Zahlen bedeutet: $M'_\nu = M'_{n_1} \cdot M'_{n_1 n_2} \cdot \ldots \cdot M'_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cdot \ldots$, so ist nach (1): $M_\nu = M'_\nu$, also nach (1·1) auch $A(\mathfrak{S}) = A(\mathfrak{S}')$.

Ist $\mathfrak{S}$ ein Suslinsches Schema in $\mathfrak{M}$, so bilden die Nachfolger der Menge $M_{n_1 n_2 \ldots n_k} \,\varepsilon\, \mathfrak{S}$ gleichfalls ein Suslinsches Schema in $\mathfrak{M}$, das wir mit $\mathfrak{S}_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ bezeichnen.

40·1·3. *Ist $\mathfrak{S}$ monoton, so ist:*

$$A(\mathfrak{S}) = \underset{n_1, n_2, \ldots, n_k}{S} A(\mathfrak{S}_{n_1 n_2 \ldots n_k}); \quad A(\mathfrak{S}_{n_1 n_2 \ldots n_k}) = \underset{n}{S}\, A(\mathfrak{S}_{n_1 n_2 \ldots n_k n}).$$

Denn bei monotonem $\mathfrak{S}$ ist in (1):

$$M_\nu = M_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}} \cdot M_{n_1 \ldots n_k n_{k+1} n_{k+2}} \cdot \ldots \cdot M_{n_1 \ldots n_k n_{k+1} \ldots n_{k+\nu}} \cdot \ldots;$$

also ist $A(\mathfrak{S}_{n_1 n_2 \ldots n_k})$ die Summe derjenigen Summanden in (1·1), für die die Folge ν mit den Stellen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ beginnt.

Die Mengen $A(\mathfrak{S}_{n_1 n_2 \ldots n_k}) = A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ bilden auch ihrerseits ein Suslinsches Schema, das aber i. a. kein Suslinsches Schema in $\mathfrak{M}$ sein wird; wir bezeichnen es mit $\overline{\mathfrak{S}}$. Ist $\mathfrak{S}$ monoton, so auch $\overline{\mathfrak{S}}$.

40·1·4. *Ist $\mathfrak{S}$ monoton, so ist $A(\mathfrak{S}) = A(\overline{\mathfrak{S}})$.*

Denn da, wie wir bei Beweise von **40·1·3** sahen, $A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ die Summe derjenigen Summanden in (1·1) ist, für die die Folge ν mit den Stellen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ beginnt, so ist:

$$M_{n_1} \cdot M_{n_1 n_2} \cdot \ldots \cdot M_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cdot \ldots \subseteqq A_{n_1} \cdot A_{n_1 n_2} \cdot \ldots \cdot A_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cdot \ldots;$$

und da, wenn $\mathfrak{S}$ monoton, offenbar $A_{n_1 n_2 \ldots n_k} \subseteqq M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, ist auch:

$$A_{n_1} \cdot A_{n_1 n_2} \cdot \ldots \cdot A_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cdot \ldots \subseteqq M_{n_1} \cdot M_{n_1 n_2} \cdot \ldots \cdot M_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cdot \ldots;$$

also ist:

$$(1{\cdot}2) \quad A_{n_1} \cdot A_{n_1 n_2} \cdot \ldots \cdot A_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cdot \ldots = M_{n_1} \cdot M_{n_1 n_2} \cdot \ldots \cdot M_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cdot \ldots$$

Sei $\mathfrak{N}$ ein Mengensystem, das die folgenden Eigenschaften hat:

1. $\mathfrak{N}$ ist ein σ-System.
2. Ist $N \,\varepsilon\, \mathfrak{N}$ und $N' \subseteqq N$, so ist auch $N' \,\varepsilon\, \mathfrak{N}$.

Beispiele hierfür sind: die abzählbaren Mengen, die Mengen erster Kategorie eines metrischen Raumes. Schreiben wir: $A\,(=)\,B$, wenn $A - B \,\varepsilon\, \mathfrak{N}$ und $B - A \,\varepsilon\, \mathfrak{N}$, so gilt:

40·1·5. *Ist $\mathfrak{S}$ das Suslinsche Schema der Mengen $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ und $\mathfrak{S}'$ das Suslinsche Schema der Mengen $M'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, und ist $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ $(=)\, M'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ für alle Komplexe $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, so ist auch $A(\mathfrak{S})$ $(=)\, A(\mathfrak{S}')$.*

Nach Annahme ist:

$$M_{n_1 n_2 \ldots n_k} - M'_{n_1 n_2 \ldots n_k} \,\varepsilon\, \mathfrak{N}, \quad M'_{n_1 n_2 \ldots n_k} - M_{n_1 n_2 \ldots n_k} \,\varepsilon\, \mathfrak{N},$$

also, wenn:

$$C = S\,(M_{n_1 n_2 \ldots n_k} - M'_{n_1 n_2 \ldots n_k}) + S\,(M'_{n_1 n_2 \ldots n_k} - M_{n_1 n_2 \ldots n_k})$$

gesetzt wird (wo die Summation über alle Komplexe $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ zu erstrecken ist), auch $C \,\varepsilon\, \mathfrak{N}$. Setzen wir, wenn ν die Folge $((n_k))$ bedeutet:

$$M_\nu = M_{n_1} \cdot M_{n_1 n_2} \cdot \ldots \cdot M_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cdot \ldots,$$
$$M'_\nu = M'_{n_1} \cdot M'_{n_1 n_2} \cdot \ldots \cdot M'_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cdot \ldots,$$

so ist $M_\nu - M'_\nu \subseteqq (M_{n_1} - M'_{n_1}) + (M_{n_1 n_2} - M'_{n_1 n_2}) + \ldots$, also $M_\nu - M'_\nu \subseteqq C$, und ebenso $M'_\nu - M_\nu \subseteqq C$. Da nach (1·1): $A(\mathfrak{S}) = \underset{\nu}{S}\, M_\nu$, $A(\mathfrak{S}') = \underset{\nu}{S}\, M'_\nu$, ist $A(\mathfrak{S}) - A(\mathfrak{S}') \subseteqq \underset{\nu}{S}(M_\nu - M'_\nu)$, $A(\mathfrak{S}') - A(\mathfrak{S}) \subseteqq \underset{\nu}{S}(M'_\nu - M_\nu)$, also $A(\mathfrak{S}) - A(\mathfrak{S}') \subseteqq C$, $A(\mathfrak{S}') - A(\mathfrak{S}) \subseteqq C$, also $A(\mathfrak{S}) - A(\mathfrak{S}') \,\varepsilon\, \mathfrak{N}$, $A(\mathfrak{S}') - A(\mathfrak{S}) \,\varepsilon\, \mathfrak{N}$, d. h. $A(\mathfrak{S})\,(=)\,A(\mathfrak{S}')$.

40·1·6. *Ist $\mathfrak{S}$ das Suslinsche Schema der Mengen $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ und ist M eine beliebige Menge, so ist $M\,A(\mathfrak{S})$ der Kern des Suslinschen Schemas der Mengen $M\,M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$.*

Denn nach (1·1) ist $M\,A(\mathfrak{S}) = \underset{\nu}{S}\, M\,M_\nu$, und nach (1) ist $M\,M_\nu$ $= (M\,M_{n_1}) \cdot (M\,M_{n_1 n_2}) \cdot \ldots \cdot (M\,M_{n_1 n_2 \ldots n_k}) \cdot \ldots$.

Literatur: M. Suslin, C. R. 164 (1917) S. 88; F. Hausdorff, Mengenlehre S. 90. Zu Satz 40·1·5: O. Nikodym, C. R. Vars. 19 (1926) S. 294.

2. **Die analytischen Mengen über $\mathfrak{M}$.** Den Kern $A(\mathfrak{S})$ eines Suslinschen Schemas in $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir als eine analytische Menge über $\mathfrak{M}$. Das System aller analytischen Mengen über $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_A$.

40·2·1. *Es ist* $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{M}_A$.

Denn ist $M \varepsilon \mathfrak{M}$, und sind im Suslinschen Schema $\mathfrak{S}$ sämtliche Mengen $= M$, so ist auch $A(\mathfrak{S}) = M$.

Wendet man den Prozeß, der von $\mathfrak{M}$ zu $\mathfrak{M}_A$ führt, neuerdings auf $\mathfrak{M}_A$ an, d. h. bildet man das System $(\mathfrak{M}_A)_A$ aller analytischen Mengen über $\mathfrak{M}_A$, so gilt:

40·2·2. *Es ist* $(\mathfrak{M}_A)_A = \mathfrak{M}_A$.

Aus 40·2·1 erhalten wir, indem wir $\mathfrak{M}$ durch $\mathfrak{M}_A$ ersetzen: $\mathfrak{M}_A \subseteqq (\mathfrak{M}_A)_A$. Es ist also nur mehr zu zeigen: ist $C \varepsilon (\mathfrak{M}_A)_A$, so ist auch $C \varepsilon \mathfrak{M}_A$. Sei also $C \varepsilon (\mathfrak{M}_A)_A$; dann ist:

$$C = \underset{\nu}{S}\, N_\nu \text{ mit } N_\nu = N_{n_1} . N_{n_1 n_2} \ldots\ldots N_{n_1 n_2 \ldots n_k} \ldots\ldots,$$

wo $N_{n_1 n_2 \ldots n_k} \varepsilon \mathfrak{M}_A$ und $\nu = ((n_k))$ alle Folgen natürlicher Zahlen durchläuft. Wegen $N_{n_1 n_2 \ldots n_k} \varepsilon \mathfrak{M}_A$ ist hierin:

$$N_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \underset{\lambda}{S}\, M_\lambda^{n_1 n_2 \ldots n_k} \text{ mit } M_\lambda^{n_1 n_2 \ldots n_k}$$
$$= M_{l_1}^{n_1 n_2 \ldots n_k} . M_{l_1 l_2}^{n_1 n_2 \ldots n_k} \ldots\ldots M_{l_1 l_2 \ldots l_i}^{n_1 n_2 \ldots n_k} \ldots\ldots,$$

wo $M_{l_1 l_2 \ldots l_i}^{n_1 n_2 \ldots n_k} \varepsilon \mathfrak{M}$ und $\lambda = ((l_i))$ alle Folgen natürlicher Zahlen durchläuft. Nach dem ersten Distributivgesetze (§ 2 (2·3)) ist also:

$$N_\nu = \underset{\alpha, \beta, \gamma, \ldots}{S} M_\alpha^{n_1} M_\beta^{n_1 n_2} M_\gamma^{n_1 n_2 n_3} \ldots,$$

wo $M_\alpha^{n_1} = M_{a_1}^{n_1} M_{a_1 a_2}^{n_1} M_{a_1 a_2 a_3}^{n_1} \ldots,\ M_\beta^{n_1 n_2} = M_{b_1}^{n_1 n_2} M_{b_1 b_2}^{n_1 n_2} M_{b_1 b_2 b_3}^{n_1 n_2} \ldots$ usf., und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ je für sich alle Folgen natürlicher Zahlen durchlaufen. Also ist weiter:

$$C = \underset{\nu, \alpha, \beta, \gamma, \ldots}{S} M_{a_1}^{n_1} M_{a_1 a_2}^{n_1} \ldots\ldots M_{b_1}^{n_1 n_2} M_{b_1 b_2}^{n_1 n_2} \ldots\ldots M_{c_1}^{n_1 n_2 n_3} M_{c_1 c_2}^{n_1 n_2 n_3} \ldots\ldots$$

Hierin denken wir uns in jedem Summanden die Doppelfolge der Faktoren, etwa nach Diagonalen (§ 1, 6), in eine einfache Folge geordnet:

$$(2) \qquad C = \underset{\nu, \alpha, \beta, \gamma, \ldots}{S} M_{a_1}^{n_1} M_{a_1 a_2}^{n_1} M_{b_1}^{n_1 n_2} M_{a_1 a_2 a_3}^{n_1} M_{b_1 b_2}^{n_1 n_2} M_{c_1}^{n_1 n_2 n_3} \ldots\ldots$$

Nun machen wir die Mengen $M_{a_1}^{n_1}$ $(n_1, a_1 = 1, 2, \ldots)$, indem wir sie irgendwie in eine Folge $M_1, M_2, \ldots$ ordnen, zu den Mengen erster Stufe eines Suslinschen Schemas; die Mengen $M_{a_1 a_2}^{n_1}$ machen wir zu den Mengen zweiter Stufe dieses Schemas, und zwar so, daß die Mengen $M_{a_1 a_2}^{n_1}$ $(a_2 = 1, 2, \ldots)$ den auf $M_{a_1}^{n_1}$ folgenden Abschnitt zweiter Stufe bilden; die Mengen $M_{b_1}^{n_1 n_2}$ machen wir zu den Mengen dritter Stufe dieses Schemas, und zwar so, daß jeder auf $M_{a_1}^{n_1}$ folgende Abschnitt dritter Stufe aus den (irgendwie in eine

einfache Folge geordneten) Mengen $M_{b_1}^{n_1 n_2}$ $(n_2, b_1 = 1, 2, \ldots)$ besteht; die Mengen $M^{n_1}_{a_1 a_2 a_3}$ machen wir zu den Mengen vierter Stufe dieses Schemas, und zwar so, daß jeder auf $M^{n_1}_{a_1 a_2}$ folgende Abschnitt vierter Stufe aus den Mengen $M^{n_1}_{a_1 a_2 a_3}$ $(a_3 = 1, 2, \ldots)$ besteht; die Mengen $M^{n_1 n_2}_{b_1 b_2}$ werden die Mengen fünfter, die Mengen $M^{n_1 n_2 n_3}_{c_1}$ werden die Mengen sechster Stufe dieses Schemas, und zwar so, daß jeder auf $M^{n_1 n_2}_{b_1}$ folgende Abschnitt fünfter Stufe aus den Mengen $M^{n_1 n_2}_{b_1 b_2}$ $(b_2 = 1, 2, \ldots)$, jeder auf $M^{n_1 n_2}_{b_1 b_2}$ folgende Abschnitt sechster Stufe aus den (in eine Folge geordneten) Mengen $M^{n_1 n_2 n_3}_{c_1}$ $(n_3, c_1 = 1, 2, \ldots)$ besteht usf. Bezeichnen wir die Mengen k-ter Stufe des so entstehenden Suslinschen Schemas mit $M_{p_1 p_2 \ldots p_k}$, so hat offenbar jeder Summand aus (2) die Gestalt:

$$M_\pi = M_{p_1} . M_{p_1 p_2} . \ldots . M_{p_1 p_2 \ldots p_k} . \ldots, \tag{2·1}$$

und umgekehrt tritt jede Menge M_π der Gestalt (2·1) in (2) als Summand auf; es ist also $C = \underset{\pi}{S}\, M_\pi$, wo $\pi = ((p_k))$ alle Folgen natürlicher Zahlen durchläuft; also ist, da $M_{p_1}, M_{p_1 p_2}, \ldots, M_{p_1 p_2 \ldots p_k}, \ldots$ Mengen aus $\mathfrak{M}$ sind: $C \varepsilon \mathfrak{M}_A$, w. z. b. w.

Ist $\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}$, so nennen wir $\mathfrak{M}$ ein Suslinsches Mengensystem. Dann gilt:

40·2·21. *$\mathfrak{M}_A$ ist das kleinste Suslinsche Mengensystem über $\mathfrak{M}$.*

Sei $\mathfrak{N}$ ein Suslinsches System über $\mathfrak{M}$, d. h. es sei $\mathfrak{N}_A = \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N} \supseteqq \mathfrak{M}$; dann ist auch $\mathfrak{N}_A \supseteqq \mathfrak{M}_A$, also $\mathfrak{N} \supseteqq \mathfrak{M}_A$. Und da nach 40·2·1, 40·2·2 $\mathfrak{M}_A$ ein Suslinsches System über $\mathfrak{M}$ ist, so ist die Behauptung bewiesen.

40·2·3. *Es ist $\mathfrak{M}_\sigma \subseteqq \mathfrak{M}_A$.*

Sei $B \varepsilon \mathfrak{M}_\sigma$; dann ist $B = \underset{n}{S}\, B_n$, wo $B_n \varepsilon \mathfrak{M}$. Setzen wir $M_{n_1} = M_{n_1 n_2} = \ldots = M_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \ldots = B_{n_1}$, so entsteht ein Suslinsches Schema $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{M}$, für das $A(\mathfrak{S}) = B$.

40·2·31. *Es ist $\mathfrak{M}_\delta \subseteqq \mathfrak{M}_A$.*

Sei $B \varepsilon M_\delta$; dann ist $B = \underset{k}{D}\, B_k$, wo $B_k \varepsilon \mathfrak{M}$. Setzen wir $M_{n_1 n_2 \ldots n_k} = B_k$ $(n_1, n_2, \ldots, n_k = 1, 2, \ldots)$, so entsteht ein Suslinsches Schema $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{M}$, für das $A(\mathfrak{S}) = B$.

40·2·4. *$\mathfrak{M}_A$ ist sowohl ein σ- als auch ein δ-System, und mithin ein Ring.*

Denn nach 40·2·3, 40·2·2 gilt: $\mathfrak{M}_A \subseteqq (\mathfrak{M}_A)_\sigma \subseteqq (\mathfrak{M}_A)_A = \mathfrak{M}_A$, also $(\mathfrak{M}_A)_\sigma = \mathfrak{M}_A$; und ebenso zeigt man: $(\mathfrak{M}_A)_\delta = \mathfrak{M}_A$.

Für das System $\mathfrak{M}_B$ der Borelschen Mengen über $\mathfrak{M}$ (§ 33, 1) gilt:

40·2·41. *Es ist $\mathfrak{M}_B \subseteqq \mathfrak{M}_A$.*

Nach 40·2·1, 40·2·4 ist $\mathfrak{M}_A$ ein Mengensystem über $\mathfrak{M}$, das sowohl σ-System als δ-System ist; die Behauptung folgt also aus 33·1·52.

Literatur: Zu 40·2·2 vgl. F. Hausdorff, Mengenlehre S. 92.

3. Die analytischen Mengen eines metrischen Raumes. Sei nun insbesondere E ein metrischer Raum, $\mathfrak{F}$ das System der in E abgeschlossenen, $\mathfrak{G}$ das System der in E offenen Mengen. Dann ist:

$$\mathfrak{F}_A \subseteqq (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_A\,, \quad \mathfrak{G}_A \subseteqq (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_A\,. \tag{3}$$

Andererseits ist $\mathfrak{F} + \mathfrak{G} \subseteqq \mathfrak{F}_\sigma$, $\mathfrak{F} + \mathfrak{G} \subseteqq \mathfrak{G}_\delta$, also nach **40·2·3**, **40·2·31**: $\mathfrak{F} + \mathfrak{G} \subseteqq \mathfrak{F}_A$, $\mathfrak{F} + \mathfrak{G} \subseteqq \mathfrak{G}_A$, also auch $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_A \subseteqq (\mathfrak{F}_A)_A$, $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_A \subseteqq (\mathfrak{G}_A)_A$, und daher nach **40·2·2**:

$$(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_A \subseteqq \mathfrak{F}_A\,, \ (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_A \subseteqq \mathfrak{G}_A\,. \tag{3·1}$$

Aus (3), (3·1) folgt:

$$\mathfrak{F}_A = \mathfrak{G}_A = (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_A\,. \tag{3·2}$$

Wir bezeichnen die Mengen des Systems (3·2) als die analytischen Mengen in E. Das System (3·2) aller analytischen Mengen in E bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}(E)$.

40·3·1. *Ist $\mathfrak{P}$ ein die in E abgeschlossenen (bzw. offenen) Mengen enthaltendes System analytischer Mengen in E, so ist $\mathfrak{P}_A = \mathfrak{A}(E)$.*

Wir setzen abkürzend $\mathfrak{A}(E) = \mathfrak{A}$. Nach Annahme ist $\mathfrak{F} \subseteqq \mathfrak{P} \subseteqq \mathfrak{A}$, also auch $\mathfrak{F}_A \subseteqq \mathfrak{P}_A \subseteqq \mathfrak{A}_A$; hierin ist $\mathfrak{F}_A = \mathfrak{A}$ und nach **40·2·2** auch $\mathfrak{A}_A = \mathfrak{A}$; also folgt daraus $\mathfrak{P}_A = \mathfrak{A}$.

40·3·2. *Ist E separabel und $\mathfrak{H}$ ein abzählbares, ausgezeichnetes System in E offener Mengen, so ist $\mathfrak{H}_A = \mathfrak{A}(E)$.*

Da wegen $\mathfrak{H} \subseteqq \mathfrak{G}$ auch $\mathfrak{H}_A \subseteqq \mathfrak{G}_A$, d. h. $\mathfrak{H}_A \subseteqq \mathfrak{A}$ ist, ist nur zu zeigen: $\mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{H}_A$. Nach **13·1·1** ist $\mathfrak{G} \subseteqq \mathfrak{H}_\sigma$, also nach **40·2·3** $\mathfrak{G} \subseteqq \mathfrak{H}_A$, also $\mathfrak{G}_A \subseteqq (\mathfrak{H}_A)_A$, d. h. nach **40·2·2**: $\mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{H}_A$, w. z. b. w.

Ist $\mathfrak{B}(E)$ das System der Borelschen Mengen in E (§ 33, 4), so gilt:

40·3·3. *Es ist $\mathfrak{B}(E) \subseteqq \mathfrak{A}(E)$.*

Dies folgt wegen § 33 (4·41) aus **40·2·41.**

40·3·4. *Ist E ein separabler unendlicher Raum, so hat das System $\mathfrak{A}(E)$ die Mächtigkeit $\aleph$.*

Sei $\mathfrak{a}$ die Mächtigkeit des Systemes $\mathfrak{A}(E)$. Da $\mathfrak{F} \subseteqq \mathfrak{A}(E)$, und da nach **13·2·51** $\mathfrak{F}$ die Mächtigkeit $\aleph$ hat, ist $\mathfrak{a} \geq \aleph$. Es ist also nur zu zeigen: $\mathfrak{a} \leq \aleph$. Da nach **5·1·21** die Menge aller endlichen Komplexe $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ natürlicher Zahlen die Mächtigkeit $\aleph_0$ hat, können die Mengen $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ eines Suslinschen Schemas in eine Folge geordnet werden; und da nach **13·2·51** das System $\mathfrak{F}$ die Mächtigkeit $\aleph$ hat, gibt es nach **5·2·43** in $\mathfrak{F}$ $\aleph$ Suslinsche Schemata. Also gibt es höchstens $\aleph$ analytische Mengen über $\mathfrak{F}$; und da $\mathfrak{F}_A = \mathfrak{A}(E)$, ist $\mathfrak{a} \leq \aleph$, w. z. b. w.

40·3·41. *Ist E ein separabler unendlicher Raum, so hat das System $\mathfrak{B}(E)$ die Mächtigkeit $\aleph$.*

Sei $\mathfrak{b}$ die Mächtigkeit des Systemes $\mathfrak{B}(E)$. Da $\mathfrak{F} \subseteqq \mathfrak{B}(E)$, und da nach **13·2·51** $\mathfrak{F}$ die Mächtigkeit $\aleph$ hat, ist $\mathfrak{b} \geq \aleph$. Da nach **40·3·3** $\mathfrak{B}(E) \subseteqq \mathfrak{A}(E)$, und da nach **40·3·4**. $\mathfrak{A}(E)$ die Mächtigkeit $\aleph$ hat, ist auch $\mathfrak{b} \leq \aleph$.

Für das System $\mathfrak{C}(E)$ der Baireschen Funktionen auf E gilt:

40·3·42. *Ist E ein separabler unendlicher Raum, so hat das System $\mathfrak{C}(E)$ die Mächtigkeit $\aleph$.*

Sei $\mathfrak{c}$ die Mächtigkeit von $\mathfrak{C}(E)$. Da die charakteristische Funktion einer Borelschen Menge nach **35·2·42** eine Bairesche Funktion ist, und da nach **40·3·41** das System $\mathfrak{B}(E)$ die Mächtigkeit $\aleph$ hat, ist $\mathfrak{c} \geq \aleph$. Es ist also nur zu zeigen: $\mathfrak{c} \leq \aleph$. Sei $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ die Menge der rationalen Zahlen. Nach **30·1·31** ist eine Funktion f auf E völlig bestimmt durch die Mengen $[f(\hat{x}) < r_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ist f eine Bairesche Funktion, so sind nach **35·2·3** diese Mengen Borelsche Mengen; also ist eine Bairesche Funktion auf E völlig bestimmt durch eine Folge Borelscher Mengen in E. Da nach **40·3·41** das System $\mathfrak{B}(E)$ die Mächtigkeit $\aleph$ hat, so hat nach **5·2·43** auch die Menge aller Folgen aus $\mathfrak{B}(E)$ die Mächtigkeit $\aleph$, also ist $\mathfrak{c} \leq \aleph$, w. z. b. w.

Wir nennen das aus Punktmengen $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ des metrischen Raumes E bestehende Suslinsche Schema $\mathfrak{S}$ regulär in E, wenn es folgende Eigenschaften hat:

1. Es ist monoton (§ 40, 1).
2. Jede Menge $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ ist abgeschlossen in E.
3. Bedeutet d_k das Supremum der Durchmesser der Mengen k-ter Stufe von $\mathfrak{S}$, so gilt $d_k \to 0$.

Ist $\mathfrak{S}$ ein reguläres Suslinsches Schema und ν die Folge $((n_k))$ natürlicher Zahlen, so ist der Durchschnitt $M_\nu = M_{n_1} M_{n_1 n_2} \ldots M_{n_1 n_2 \ldots n_k} \ldots$ entweder leer, oder er besteht aus einem einzigen Punkte a, den wir als den Punkt a_ν bezeichnen.

40·3·5. *Ist E separabel, so ist jede analytische Menge in E Kern eines regulären Suslinschen Schemas in E.*

Da jede analytische Menge in E Kern eines aus in E abgeschlossenen Mengen bestehenden Suslinschen Schemas ist, ist nur zu zeigen: Jedes aus in E abgeschlossenen Mengen bestehende Suslinsche Schema $\mathfrak{S}$ kann ersetzt werden durch ein in E reguläres Schema $\mathfrak{S}^*$ von gleichem Kerne. — Sei F eine in E abgeschlossene Menge, und sei $\varrho > 0$ beliebig gegeben. Zu jedem $a \varepsilon F$ bilden wir die abgeschlossene Kugel $\overline{K}_{a\frac{\varrho}{2}}$ (§ 10, 2); nach **13·3·1** gibt es im System der abgeschlossenen Mengen $F\,\overline{K}_{a\frac{\varrho}{2}}$ ein F überdeckendes abzählbares Teilsystem; also ist F Summe abzählbar vieler in E abgeschlos-

sener Mengen von einem Durchmesser $\leq \varrho$. Jede Menge $F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ k-ter Stufe aus $\mathfrak{S}$ ist also in der Form darstellbar: $F_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \underset{n}{S} F^n_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, wo $F^n_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ abgeschlossen in E und $d\,(F^n_{n_1 n_2 \ldots n_k}) \leq \frac{1}{k}$. Wir bilden nun aus den Mengen $F^n_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ ein Suslinsches Schema $\mathfrak{S}'$ in folgender Weise: die (in eine Folge geordneten) Mengen $F^n_{n_1}$ $(n_1, n = 1, 2, \ldots)$ seien die Mengen erster Stufe von $\mathfrak{S}'$; der auf $F^n_{n_1}$ folgende Abschnitt zweiter Stufe von $\mathfrak{S}'$ bestehe aus den Mengen $F^\nu_{n_1 n_2}$ $(n_2, \nu = 1, 2, \ldots)$; der auf die Menge $F^n_{n_1 n_2}$ folgende Abschnitt dritter Stufe von $\mathfrak{S}'$ bestehe aus den Mengen $F^\nu_{n_1 n_2 n_3}$ $(n_3, \nu = 1, 2, \ldots)$ usf. Dann haben die Schemata $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ denselben Kern, und das Schema $\mathfrak{S}'$ hat die Eigenschaften 2. und 3. eines regulären Schemas. Verwandeln wir, wie beim Beweise von **40·1·2**, das Schema $\mathfrak{S}'$ in ein monotones Schema von gleichem Kerne, so entsteht das gewünschte reguläre Schema $\mathfrak{S}^*$.

4. **Absolut analytische Mengen.** Sei E eine ganz beliebige Menge, $\mathfrak{M}$ ein System von Teilen von E. Wir machen wieder Gebrauch von der in § 32, 3 eingeführten Bezeichnungsweise. In Analogie zu **33·3·2** gilt:

40·4·1. *Ist $E' \subseteqq E$, so ist $(E' \,1\, \mathfrak{M})_A = E' \,1\, \mathfrak{M}_A$.*

Dies folgt unmittelbar aus **40·1·6.**

Ist insbesondere E ein metrischer Raum, so gilt in Analogie zu **33·4·7**:

40·4·11. *Ist $E' \subseteqq E$, so ist $\mathfrak{A}\,(E') = E' \,1\, \mathfrak{A}\,(E)$.*

Denn ist $\mathfrak{F}$, bzw. $\mathfrak{F}'$ das System der in E, bzw. in E' abgeschlossenen Mengen, so ist nach **10·8·1**: $\mathfrak{F}' = E' \,1\, \mathfrak{F}$. Da $\mathfrak{A}\,(E) = \mathfrak{F}_A$, $\mathfrak{A}\,(E') = \mathfrak{F}'_A$, folgt die Behauptung aus **40·4·1.**

40·4·2. *Ist $A \subseteqq E' \subseteqq E$ und $A \,\varepsilon\, \mathfrak{A}\,(E)$, so ist auch $A \,\varepsilon\, \mathfrak{A}\,(E')$.*

Dies folgt unmittelbar aus **40·4·11.**

40·4·21. *Ist $A \subseteqq E' \subseteqq E$ und $A \,\varepsilon\, \mathfrak{A}\,(E')$, $E' \,\varepsilon\, \mathfrak{A}\,(E)$, so ist auch $A \,\varepsilon\, \mathfrak{A}\,(E)$.*

Nach **40·4·11** ist $A = E' A'$ mit $A' \,\varepsilon\, \mathfrak{A}\,(E)$; da auch $E' \,\varepsilon\, \mathfrak{A}\,(E)$ und $\mathfrak{A}\,(E)$ nach **40·2·4** ein Ring, ist auch $A \,\varepsilon\, \mathfrak{A}\,(E)$.

Läßt man in **40·4·21** die Voraussetzung $E' \,\varepsilon\, \mathfrak{A}\,(E)$ weg, so kann nicht mehr geschlossen werden, daß $A \,\varepsilon\, \mathfrak{A}\,(E)$; wohl aber gilt:

40·4·3. *Ist E' vollständig, $A \subseteqq E'$, $A \subseteqq E$ und $A \,\varepsilon\, \mathfrak{A}\,(E')$, so ist auch $A \,\varepsilon\, \mathfrak{A}\,(E)$.*

Der Beweis ist analog dem von **33·5·1.**

Nach **40·4·3** ist jede in einem vollständigen Raum E' analytische Menge auch analytisch in jedem Raume $E \supseteqq A$; wir nennen deshalb eine solche Menge eine a b s o l u t a n a l y t i s c h e M e n g e.

40·4·31. *Ist A analytisch in A' und ist A' absolut analytisch, so ist auch A absolut analytisch.*

Dies folgt unmittelbar aus **40·4·21.**

40·4·4. *Ist $\mathfrak{S}$ ein aus absolut analytischen Mengen $A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ bestehendes Suslinsches Schema in E, so ist auch der Kern A ($\mathfrak{S}$) absolut analytisch.*

Nach **18·4·6** gibt es einen vollständigen Raum $E^* \supseteqq E$; sei $\mathfrak{F}$ das System der in E^* abgeschlossenen Mengen. Da $A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ absolut analytisch, ist $A_{n_1 n_2 \ldots n_k} \varepsilon\, \mathfrak{A}(E^*)$, d. h. $A_{n_1 n_2 \ldots n_k} \varepsilon\, \mathfrak{F}_A$; also ist $A(\mathfrak{S})\, \varepsilon\, (\mathfrak{F}_A)_A$, mithin nach **40·2·2**: $A(\mathfrak{S})\, \varepsilon\, \mathfrak{F}_A$, d. h. $A(\mathfrak{S})\, \varepsilon\, \mathfrak{A}(E^*)$; und da E^* vollständig, ist $A(\mathfrak{S})$ absolut analytisch.

Literatur: F. Hausdorff, Mengenlehre S. 179.

5. **Abbildungssätze.** Seien A und B metrische Räume. In Analogie zu **33·6·1** gilt:

40·5·1. *Ist P eine eindeutige stetige Abbildung von A auf B und ist C eine analytische Menge in B, so ist $P^{-1}(C)$ eine analytische Menge in A.*

In der Tat, C ist der Kern eines Suslinschen Schemas in B abgeschlossener Mengen $F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Daher ist nach **2·1·3** und § 2 (1·9) $P^{-1}(C)$ Kern des aus den Mengen $P^{-1}(F_{n_1 n_2 \ldots n_k})$ bestehenden Suslinschen Schemas, und nach **23·2·11** sind die Mengen $P^{-1}(F_{n_1 n_2 \ldots n_k})$ abgeschlossen in A.

40·5·2. *Ist Q eine homöomorphe Abbildung von B auf A, und ist M eine analytische Menge in B, so ist Q (M) eine analytische Menge in A.*

Dies folgt aus 40·5·1 für $P = Q^{-1}$.

40·5·21. *Jede mit einer absolut analytischen Menge homöomorphe Menge ist absolut analytisch.*

Der Beweis ist analog dem von **33·6·3.**

Sei $\mathfrak{S}$ ein aus den Mengen $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ bestehendes Suslinsches Schema; ist ν eine Folge $((n_k))$ natürlicher Zahlen, so setzen wir: $M_\nu = M_{n_1} \cdot M_{n_1 n_2} \cdot \ldots \cdot M_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cdot \ldots$; die Menge aller $\nu \varepsilon R_0$, für die $M_\nu \supset \Lambda$ ist, nennen wir die dem Schema $\mathfrak{S}$ entsprechende Menge des R_0.

40·5·3. *Ist $\mathfrak{S}$ ein reguläres Suslinsches Schema im vollständigen Raume E, so ist die dem Schema $\mathfrak{S}$ entsprechende Menge C des R_0 abgeschlossen.*

Sei $\bar{\nu} \varepsilon R_0 - C$ und $\bar{\nu} = ((\bar{n}_k))$; da $M_{\bar{\nu}} = \Lambda$, und da nach **18·5·11** alle $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ vollständig sind, ist nach **18·6·1** eine der Mengen $M_{\bar{n}_1 \bar{n}_2 \ldots \bar{n}_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ leer, etwa $M_{\bar{n}_1 \bar{n}_2 \ldots \bar{n}_{k^*}}$; dann aber ist $M_\nu = \Lambda$ (und mithin $\nu \varepsilon R_0 - C$) für alle mit $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \ldots, \bar{n}_{k^*}$ beginnenden Folgen ν; da diese Folgen nach § 33 (8) eine offene Menge des R_0 bilden, ist $R_0 - C$ offen, also C abgeschlossen.

40·5·31. *Ist $\mathfrak{S}$ ein reguläres Suslinsches Schema in E, so ist der Kern A von $\mathfrak{S}$ eindeutiges stetiges Bild der dem Schema $\mathfrak{S}$ entsprechenden Menge C des R_0.*

Sei $\nu \varepsilon C$; ist ν die Folge $((n_k))$, so ist die Menge $M_\nu = M_{n_1} \cdot M_{n_1 n_2} \cdot \ldots \cdot M_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cdot \ldots$ nicht leer, besteht somit, da $\mathfrak{S}$ regulär, aus einem einzigen Punkte a_ν. Wir setzen $P(\nu) = a_\nu$. Durchläuft ν die Menge C, so durchläuft a_ν die Menge A. Es ist nur mehr zu zeigen, daß die Abbildung P von C auf A stetig ist. Sei $((\nu_i))$ eine Punktfolge aus C mit $\nu_i \to \nu$; ist ν_i die Folge $((n_k^i))$ natürlicher Zahlen, so gibt es nach **17·3·7** zu jedem k ein i_k, so daß $n_1^i = n_1$, $n_2^i = n_2$, $\ldots$, $n_k^i = n_k$ für $i \geq i_k$; also ist $a_{\nu_i} \varepsilon M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ für $i \geq i_k$; und da auch $a_\nu \varepsilon M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ und da $d(M_{n_1 n_2 \ldots n_k}) \to 0$, gilt $a_{\nu_i} \to a_\nu$; also ist die Abbildung P stetig.

40·5·32. *Ist $\mathfrak{S}$ ein reguläres Suslinsches Schema im vollständigen Raume E, dessen Kern $A \supset \Lambda$ ist, so ist A eindeutiges stetiges Bild des R_0.*

Wir können ohne weiteres annehmen, daß $A\,M_{n_1} \supset \Lambda$ für alle Mengen erster Stufe M_{n_1} des Schemas $\mathfrak{S}$; denn ist $A\,M_{n_1^*} = \Lambda$, $A\,M_{n_1^{**}} \supset \Lambda$, so können wir, ohne den Kern von $\mathfrak{S}$ zu ändern, jede Menge $M_{n_1^* n_2 \ldots n_k}$ ersetzen durch $M_{n_1^{**} n_2 \ldots n_k}$. In jeder Menge $A\,M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, die $\supset \Lambda$ ist, wählen wir einen Punkt $a_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ aus. Sei wieder C die dem Schema $\mathfrak{S}$ entsprechende Menge des R_0 und P die im Beweise von **40·5·31** angegebene Abbildung von C auf A. Wir erweitern sie zu einer Abbildung Q des R_0 auf A, indem wir setzen: $Q(\nu) = P(\nu)$ für $\nu \varepsilon C$, während $Q(\nu)$ für $\nu \varepsilon R_0 - C$ in folgender Weise definiert wird: ist $\nu \varepsilon R_0 - C$ und $\nu = ((n_k))$, so gibt es nach **18·6·1** in der Folge der Mengen $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ eine leere; und da diese Folge monoton abnimmt, und da nach Annahme $A\,M_{n_1} \supset \Lambda$ ist, gibt es in der Folge der Mengen $A\,M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ eine letzte, die $\supset \Lambda$ ist; ist dies die Menge $A\,M_{n_1 n_2 \ldots n_{k^*}}$, so setzen wir: $Q(\nu) = a_{n_1 n_2 \ldots n_{k^*}}$. Die so definierte Abbildung Q des R_0 auf A hat offenbar folgende Eigenschaft: ist $\nu = ((n_k))$ und ist $A\,M_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset \Lambda$, so ist $Q(\nu) \varepsilon M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. — Es ist noch zu zeigen, daß Q stetig ist, d. h. wir haben zu zeigen: sind $\nu = ((n_k))$ und $\nu_i = ((n_k^i))$ $(i = 1, 2, \ldots)$ Punkte des R_0 und gilt $\nu_i \to \nu$, so auch $Q(\nu_i) \to Q(\nu)$. — Sei zunächst $\nu \varepsilon C$; nach **17·3·7** gibt es ein i_k, so daß $n_1^i = n_1$, $n_2^i = n_2$, $\ldots$, $n_k^i = n_k$ für $i \geq i_k$; wegen $\nu \varepsilon C$ ist $A\,M_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset \Lambda$ für alle k; also ist, wie vorhin bemerkt: $Q(\nu) \varepsilon M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, $Q(\nu_i) \varepsilon M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ für $i \geq i_k$; wegen $d(M_{n_1 n_2 \ldots n_k}) \to 0$ folgt daraus $Q(\nu_i) \to Q(\nu)$. — Sei sodann $\nu \varepsilon R_0 - C$; ist dann $A\,M_{n_1 n_2 \ldots n_{k^*}}$ die letzte unter den Mengen $A\,M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, die $\supset \Lambda$ ist, so ist $Q(\nu) = a_{n_1 n_2 \ldots n_{k^*}}$; für $i \geq i_{k^*+1}$ ist dann $A\,M_{n_1^i n_2^i \ldots n_k^i} = A\,M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$

$\supset \Lambda$ wenn $k \leq k^*$, und $A\, M_{n_1^i n_2^i \ldots n_{k^*+1}^i} = A\, M_{n_1 n_2 \ldots n_{k^*+1}} = \Lambda$; also ist $A\, M_{n_1^i n_2^i \ldots n_{k^*}^i}$ die letzte unter den Mengen $A\, M_{n_1^i n_2^i \ldots n_k^i}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, die $\supset \Lambda$ ist, mithin $Q(\nu_i) = a_{n_1^i n_2^i \ldots n_{k^*}^i} = a_{n_1 n_2 \ldots n_{k^*}} = Q(\nu)$ für $i \geq i_{k^*+1}$; also gilt wieder $Q(\nu_i) \to Q(\nu)$.

40·5·4. *Damit die Menge $A \supset \Lambda$ eindeutiges stetiges Bild des R_0 sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie separabel und absolut analytisch sei.*

Notwendig: Sei P eine stetige Abbildung des R_0 auf A. Da der R_0 nach **13·1·322** separabel, so ist dann nach **23·1·31** auch A separabel. Nach **18·4·6** können wir annehmen, A sei Punktmenge eines vollständigen Raumes E. Wir bezeichnen mit $R_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ die Menge aller mit $n_1, n_2, \ldots, n_k$ beginnenden Folgen $((n_l))$ natürlicher Zahlen, und mit $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ die abgeschlossene Hülle in E von $P(R_{n_1 n_2 \ldots n_k})$. Sei $\mathfrak{S}$ das Suslinsche Schema der Mengen $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$; es genügt, zu zeigen, daß $A = A(\mathfrak{S})$, denn dann ist A eine analytische Menge in E, also, da E vollständig, absolut analytisch. — Sei $\nu = ((n_k))$, $M_\nu = M_{n_1} \cdot M_{n_1 n_2} \cdot \;\ldots\; \cdot M_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cdot \;\ldots$; da $A(\mathfrak{S}) = \underset{\nu}{S}\, M_\nu$, wo sich die Summation über alle Folgen ν natürlicher Zahlen erstreckt, genügt es weiter, zu zeigen, daß $M_\nu = \{P(\nu)\}$. Da $\nu \,\varepsilon\, R_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ für alle k, ist $P(\nu) \,\varepsilon\, P(R_{n_1 n_2 \ldots n_k})$, also auch $P(\nu) \,\varepsilon\, M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ für alle k, und somit $P(\nu) \,\varepsilon\, M_\nu$. Nun ist nur mehr zu zeigen, daß $P(\nu)$ der einzige Punkt von M_ν. Sei $a \,\varepsilon\, M_\nu$, also $a \,\varepsilon\, M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ für alle k; da $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ die abgeschlossene Hülle von $P(R_{n_1 n_2 \ldots n_k})$, gibt es ein $a_k \,\varepsilon\, P(R_{n_1 n_2 \ldots n_k})$, so daß $a_k a < \frac{1}{k}$; dann gibt es ein $\nu_k \,\varepsilon\, R_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, so daß $a_k = P(\nu_k)$; dann gilt $\nu_k \to \nu$, und wegen der Stetigkeit von P auch $P(\nu_k) \to P(\nu)$, d. h. $a_k \to P(\nu)$; wegen $a_k a < \frac{1}{k}$ ist also $a = P(\nu)$, w. z. b. w. Hinreichend: Sei A separabel und absolut analytisch; nach **18·4·61** gibt es einen separablen vollständigen Raum $E \supseteqq A$; da A eine analytische Menge in E, ist A nach **40·3·5** Kern eines regulären Suslinschen Schemas in E, also nach **40·5·32** stetiges Bild des R_0.

40·5·5. *Ist B eindeutiges stetiges Bild der separablen, absolut analytischen Menge A, so ist auch B separabel und absolut analytisch.*

Nach Annahme gibt es eine eindeutige stetige Abbildung Q von A auf B; nach **40·5·4** gibt es eine eindeutige stetige Abbildung P des R_0 auf A; dann ist nach **23·1·4** $P \,|\, Q$ eine eindeutige stetige Abbildung des R_0 auf B, also ist B nach **40·5·4** separabel und absolut analytisch.

Literatur: W. Sierpiński, Bull. Crac. 1918 S. 161. N. Lusin, Leç. s. l. ensembles analytiques (Paris 1930) S. 135ff.

6. Projektion. Wir betrachten nun einen Produktraum $E^{(1)} \times E^{(2)}$. Es gilt:

40·6·1. *Ist A eine separable, absolut analytische Menge des Raumes $E^{(1)} \times E^{(2)}$, so ist auch die Projektion von A in den Raum $E^{(1)}$ separabel und absolut analytisch.*

Dies folgt aus **23·6·1** und **40·5·5.**

40·6·11. *Ist $E^{(1)}$ separabel, $E^{(2)}$ separabel und vollständig und A eine analytische Menge in $E^{(1)} \times E^{(2)}$, so ist die Projektion B von A in den Raum $E^{(1)}$ eine analytische Menge in $E^{(1)}$.*

Nach **18·4·61** gibt es einen separablen, vollständigen Raum $E \supseteqq E^{(1)}$. Nach **40·4·11** ist $A = A' . (E^{(1)} \times E^{(2)})$, wo A' eine analytische Menge in $E \times E^{(2)}$. Nach **20·2·4** und **20·2·7** ist der Raum $E \times E^{(2)}$ separabel und vollständig; also ist A' eine separable, absolut analytische Menge; nach **40·6·1** ist also auch die Projektion B' von A' in den Raum E absolut analytisch. Da $B = E^{(1)} B'$, ist also nach **40·4·11** B eine analytische Menge in $E^{(1)}$.

40·6·2. *Jede im separablen Raume E analytische Menge A ist die Projektion in den Raum E einer in $E \times R_0$ abgeschlossenen Menge.*

Nach **18·4·61** gibt es einen separablen, vollständigen Raum $\overline{E} \supseteqq E$. Nach **40·4·11** ist $A = \overline{A} . E$, wo $\overline{A}$ eine analytische Menge in $\overline{E}$. Es genügt, zu zeigen, daß $\overline{A}$ die Projektion in den Raum E einer in $E \times R_0$ abgeschlossenen Menge $\overline{B}$ ist; denn dann ist die Menge $B = \overline{B} . (E \times R_0)$ abgeschlossen in $E \times R_0$, und A ist die Projektion in den Raum E von B. — Da $\overline{A}$ separabel und absolut analytisch, gibt es nach **40·5·4** eine eindeutige stetige Abbildung P des R_0 auf $\overline{A}$. Wir bilden zu jedem $\nu \,\varepsilon\, R_0$ den Punkt $(P(\nu), \nu) \,\varepsilon\, \overline{E} \times R_0$; ist $\overline{B}$ die Menge aller dieser Punkte, so ist $\overline{A}$ die Projektion von $\overline{B}$ in den Raum $\overline{E}$, und nach **35·9·4** ist $\overline{B}$ abgeschlossen in $\overline{E} \times R_0$.

40·6·3. *Jede im separablen Raume E analytische Menge A ist die Projektion in den Raum E einer G_δ-Menge in $E \times R_1$.*

Nach **24·2·2** gibt es eine homöomorphe Abbildung Q des R_0 auf die Menge I der irrationalen Punkte des R_1; ordnen wir jedem Punkte $(a, \nu) \,\varepsilon\, E \times R_0$ den Punkt $(a, Q(\nu)) \,\varepsilon\, E \times R_1$ zu, so entsteht eine homöomorphe Abbildung Q' von $E \times R_0$ auf $E \times I$. Nach **40·6·2** gibt es eine in $E \times R_0$ abgeschlossene Menge B, deren Projektion in den Raum E die Menge A ist; nach **24·1·2** wird B durch Q' übergeführt in eine in $E \times I$ abgeschlossene Menge B', deren Projektion in den Raum E offenbar wieder die Menge A ist. Da I ein G_δ im R_1, ist nach **20·2·18** $E \times I$ ein G_δ in $E \times R_1$; und da B' abgeschlossen, also ein G_δ in $E \times I$, ist nach **16·9·2** B' ein G_δ in $E \times R_1$.

Nach **40·6·3** ist jede analytische Menge des R_k ($k = 1, 2, \ldots$) die Projektion einer G_δ-Menge des R_{k+1}. Da es, wie wir in **40·9·2** sehen werden, im R_k analytische Mengen gibt, die nicht Borelsche Mengen sind, so ersehen wir hieraus, daß die Projektion einer Borelschen Menge des R_{k+1} in den R_k nicht notwendig eine Borelsche Menge des R_k ist.

Literatur: M. Suslin, C. R. 164 (1917) S. 88. W. Sierpiński, Fund. math. 5 (1924) S. 155.

7. Analytische Mengen in Produkträumen. In Analogie zu **33·7·1** gilt:

40·7·1. *Ist A eine analytische Menge in $E^{(1)} \times E^{(2)}$, so ist jede Schicht $A_b^{(1)}$ ($b \varepsilon E^{(2)}$) eine analytische Menge in $E^{(1)}$.*

Sei A Kern des Suslinschen Schemas der in $E^{(1)} \times E^{(2)}$ abgeschlossenen Mengen $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Die Schichten $(M_{n_1 n_2 \ldots n_k})_b^{(1)}$ bilden nach **20·4·1** ein Suslinsches Schema in $E^{(1)}$ abgeschlossener Mengen, dessen Kern offenbar $A_b^{(1)}$ ist.

40·7·2. *Ist A_1 eine analytische Menge in $E^{(1)}$, A_2 eine analytische Menge in $E^{(2)}$, so ist $A_1 \times A_2$ eine analytische Menge in $E^{(1)} \times E^{(2)}$.*

Sei A_1 Kern des Suslinschen Schemas der in $E^{(1)}$ abgeschlossenen Mengen $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$; die Mengen $M_{n_1 n_2 \ldots n_k} \times E^{(2)}$ bilden dann nach **20·2·1** ein Suslinsches Schema in $E^{(1)} \times E^{(2)}$ abgeschlossener Mengen, dessen Kern offenbar $A_1 \times E^{(2)}$ ist; also ist $A_1 \times E^{(2)}$ eine analytische Menge in $E^{(1)} \times E^{(2)}$. Ebenso sieht man, daß $E^{(1)} \times A_2$ eine analytische Menge in $E^{(1)} \times E^{(2)}$ ist. Da $A_1 \times A_2 = (A_1 \times E^{(2)}) . (E^{(1)} \times A_2)$, ist nach **40·2·4** auch $A_1 \times A_2$ eine analytische Menge in $E^{(1)} \times E^{(2)}$.

40·7·21. *Ist $A_1 \times A_2 \supset A$ und ist $A_1 \times A_2$ eine analytische Menge in $E^{(1)} \times E^{(2)}$, so ist A_1 eine analytische Menge in $E^{(1)}$ und A_2 eine analytische Menge in $E^{(2)}$.*

Der Beweis ist analog dem von **33·7·21**.

40·7·3. *Sind A und B absolut analytische Mengen, so ist auch $A \times B$ eine absolut analytische Menge.*

Der Beweis ist analog dem von **33·7·3**.

Als Anwendung von **40·7·2** beweisen wir noch:

40·7·4. *Sind A und B analytische Mengen des R_1, so ist auch die Menge C aller Zahlen $a + b$ ($a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$) eine analytische Menge des R_1.*

Setzen wir $D = A \times B$, so ist D die Menge aller Punkte $(x, y) \varepsilon R_2$ mit $x \varepsilon A$, $y \varepsilon B$, und nach **40·7·2** ist D eine analytische Menge des R_2. Ordnen wir jedem Punkte $(a, b) \varepsilon D$ den Punkt $a + b \varepsilon C$ zu, so haben wir eine eindeutige stetige Abbildung von D auf C, also ist nach **40·5·5** C eine analytische Menge des R_1.

8. **Universalmengen.** In Analogie zu **33·8·3** beweisen wir:

40·8·1. *Ist E ein separabler Raum, so gibt es eine analytische Menge G in $E \times R_0$, unter deren Schichten $G_a^{(1)}$ $(a \varepsilon R_0)$ alle analytischen Mengen in E vorkommen.*

Wir setzen $E^{(1)} = E \times R_0$, $E^{(2)} = R_0$. Da nach **20·2·4** $E^{(1)}$ separabel ist, gibt es nach **33·8·2** eine in $E^{(1)} \times E^{(2)}$ $(= E \times R_0 \times R_0)$ abgeschlossene Menge F, unter deren Schichten $F_a^{(1)}$ $(a \varepsilon E^{(2)})$ alle in $E^{(1)}$ abgeschlossenen Mengen vorkommen. Sei G die Projektion von F in den Raum $E \times E^{(2)}$. Nach **40·6·11** ist G eine analytische Menge in $E \times E^{(2)}$ $(= E \times R_0)$. Die Schicht $G_a^{(1)}$ von G ist nun aber die Projektion in den Raum E der Menge $F_a^{(1)} \subseteqq E \times R_0$; die Behauptung folgt also aus **40·6·2.**

40·8·11. *Ist $E^{(1)}$ ein separabler, $E^{(2)}$ ein Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern $\supset \Lambda$ ist, so gibt es eine analytische Menge G in $E^{(1)} \times E^{(2)}$, unter deren Schichten $G_b^{(1)}$ $(b \varepsilon E^{(2)})$ alle analytischen Mengen in $E^{(1)}$ vorkommen.*

Der Beweis ist analog dem von **33·8·31.**

Literatur: N. Lusin, C. R. 181 (1925) S. 95; Leç. s. l. ensembles analytiques S. 146. W. Sierpiński, Fund. math. 12 (1928) S. 75; Fund. math. 14 (1929) S. 82. O. Nikodym, Fund. math. 14 (1929) S. 145. E. Szpilrajn, C. R. Congr. Math. Slaves Vars. 1929, S. 295.

9. **Existenzsatz.** Ist E ein metrischer Raum, so ist nach **40·3·3** jede Borelsche Menge in E auch eine analytische Menge in E. Wir zeigen nun, unter geeigneten Voraussetzungen über E, daß die Umkehrung hiervon nicht gilt.

Eine Menge $A \subseteqq E$, deren Komplement $E - A$ eine analytische Menge in E ist, nennen wir eine komplementär-analytische Menge in E. Das System aller komplementär-analytischen Mengen in E bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}(E)$.

40·9·1. *Es gibt im R_0 eine komplementär-analytische Menge, die keine analytische Menge ist.*

Nach **40·8·1** gibt es eine Menge $G \varepsilon \mathfrak{A}(R_0 \times R_0)$, unter deren Schichten $G_a^{(1)}$ alle analytischen Mengen des R_0 vorkommen. Sei F die Menge aller $(x, y) \varepsilon R_0 \times R_0$ $(x \varepsilon R_0, y \varepsilon R_0)$ mit $x = y$; da F abgeschlossen, also eine analytische Menge in $R_0 \times R_0$, ist $FG \varepsilon \mathfrak{A}(R_0 \times R_0)$, also nach **40·4·2** auch $FG \varepsilon \mathfrak{A}(F)$. Sei P die homöomorphe Abbildung von F auf den R_0, die jedem Punkte $(x, x) \varepsilon F$ den Punkt $x \varepsilon R_0$ zuordnet, und sei $A' = P(FG)$; dann ist nach **40·5·2** $A' \varepsilon \mathfrak{A}(R_0)$. Wir setzen $R_0 - A' = A$; dann ist $A \varepsilon \mathfrak{K}(R_0)$; wir haben zu zeigen, daß $A \sim\varepsilon \mathfrak{A}(R_0)$. Wäre $A \varepsilon \mathfrak{A}(R_0)$, so gäbe es ein $a \varepsilon R_0$, so daß $A = G_a^{(1)}$; wegen $A = R_0 - A'$ sind nun die

Aussagen $a \varepsilon A$ und $(a, a) \sim \varepsilon G$ äquivalent; die Aussage $(a, a) \sim \varepsilon G$ ist aber äquivalent mit $a \sim \varepsilon G_a^{(1)}$; es sind also die Aussagen $a \varepsilon A$ und $a \sim \varepsilon G_a^{(1)}$ äquivalent, also kann nicht $A = G_a^{(1)}$ sein; also ist $A \sim \varepsilon \mathfrak{A}(R_0)$, w. z. b. w.

40·9·11. *Ist E ein Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern $\supset A$ ist, so gibt es in E eine komplementär-analytische Menge, die keine analytische Menge ist.*

Nach **19·2·1** gibt es in E ein dyadisches Diskontinuum, also auch ein reduziertes dyadisches Diskontinuum B (§ 24, 2); nach **24·2·4** ist B ein G_δ in E, also nach **40·3·3** $B \varepsilon \mathfrak{A}(E)$. Nach **40·9·1** gibt es eine Menge $M \varepsilon \mathfrak{K}(R_0) - \mathfrak{A}(R_0)$. Setzen wir $M' = R_0 - M$, so ist $M' \varepsilon \mathfrak{A}(R_0)$. Nach **24·2·41** gibt es eine homöomorphe Abbildung P des R_0 auf B. Setzen wir $A' = P(M')$, so ist nach **40·5·2** $A' \varepsilon \mathfrak{A}(B)$, also wegen $B \varepsilon \mathfrak{A}(E)$ nach **40·4·21** auch $A' \varepsilon \mathfrak{A}(E)$; setzen wir $A = E - A'$, so ist somit $A \varepsilon \mathfrak{K}(E)$. Wir haben zu zeigen, daß $A \sim \varepsilon \mathfrak{A}(E)$. Wäre $A \varepsilon \mathfrak{A}(E)$, so wäre nach **40·4·11** auch $A B \varepsilon \mathfrak{A}(B)$; wegen $A = E - A'$, $A' = P(M')$, $M' = R_0 - M$ ist nun $A B = B - A' = P(R_0 - M') = P(M)$, d. h. $M = P^{-1}(A B)$; nach **40·5·1** wäre also auch $M \varepsilon \mathfrak{A}(R_0)$, während doch $M \sim \varepsilon \mathfrak{A}(R_0)$ war. Also ist $A \sim \varepsilon \mathfrak{A}(E)$, w. z. b. w.

40·9·2. *Ist E ein Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern $\supset A$ ist, so gibt es in E eine analytische Menge, die keine Borelsche Menge ist.*

Nach **40·9·11** gibt es eine Menge $A \varepsilon \mathfrak{A}(E)$, so daß $E - A \sim \varepsilon \mathfrak{A}(E)$. Dann aber ist $A \sim \varepsilon \mathfrak{B}(E)$; denn wäre $A \varepsilon \mathfrak{B}(E)$, so wäre nach **33·4·2** auch $E - A \varepsilon \mathfrak{B}(E)$, also nach **40·3·3** auch $E - A \varepsilon \mathfrak{A}(E)$.

Literatur: M. Suslin, C. R. 164 (1917) S. 88.

§ 41. Eigenschaften analytischer Mengen.

1. Die Bairesche Eigenschaft. Sei E ein metrischer Raum. Dann gilt in Verallgemeinerung von **19·9·3**:

41·1·1. *Jede analytische Menge in E ist offen bis auf eine Menge erster Kategorie in E.*

Sei A eine analytische Menge in E; dann ist A Kern eines Suslinschen Schemas $\mathfrak{S}$ in E abgeschlossener Mengen $F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, und nach **40·1·2** kann $\mathfrak{S}$ als monoton angenommen werden. Dann ist nach **40·1·3** $A = \underset{n_1}{S} A_{n_1}$, wo $A_{n_1} = A(\mathfrak{S}_{n_1})$; nach **19·5·34** ist $\underset{n_1}{S}(A_{n_1})_{II i}$ dicht in A_{II}, und da nach **19·5·1**: $(A_{n_1})_{II} \subseteqq A_{II}$, also $(A_{n_1})_{II i} \subseteqq A_{II i}$, ist nach **11·3·2** auch $\underset{n_1}{S}(A_{n_1})_{II i}$

dicht in $A_{II\,i}$, und da $\underset{n_1}{S}(A_{n_1})_{II\,i}$ offen, ist nach 11·2·51 $B = A_{II\,i} - \underset{n_1}{S}(A_{n_1})_{II\,i}$ nirgends dicht in $A_{II\,i}$. Ebenso ist wegen 40·1·3, wenn $A_{n_1 n_2 \ldots n_k} = A(\mathfrak{S}_{n_1 n_2 \ldots n_k})$ gesetzt wird, die Menge:

$$B_{n_1 n_2 \ldots n_k} = (A_{n_1 n_2 \ldots n_k})_{II\,i} - \underset{n_{k-1}}{S}(A_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k-1}})_{II\,i}$$

nirgends dicht in $(A_{n_1 n_2 \ldots n_k})_{II\,i}$, und da $A_{n_1 n_2 \ldots n_k} \subseteqq A$, also auch $(A_{n_1 n_2 \ldots n_k})_{II\,i} \subseteqq A_{II\,i}$, ist nach 11·3·21 $B_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ auch nirgends dicht in $A_{II\,i}$. Also ist $C = B + \underset{n_1}{S} B_{n_1} + \underset{n_1 n_2}{S} B_{n_1 n_2} + \ldots + \underset{n_1 n_2 \ldots n_k}{S} B_{n_1 n_2 \ldots n_k} + \ldots$ von erster Kategorie in $A_{II\,i}$. Sei nun $a \,\varepsilon\, A_{II\,i} - C$; dann ist $a \sim\varepsilon\, B$, also $a \,\varepsilon\, \underset{n_1}{S}(A_{n_1})_{II\,i}$, d. h. es gibt ein n_1^*, so daß $a \,\varepsilon\, (A_{n_1^*})_{II\,i}$; ebenso ist $a \sim\varepsilon\, B_{n_1^*}$, also $a \,\varepsilon\, \underset{n_2}{S}(A_{n_1^* n_2})_{II\,i}$, d. h. es gibt ein n_2^*, so daß $a \,\varepsilon\, (A_{n_1^* n_2^*})_{II\,i}$; und indem man so weiter schließt, erhält man eine Folge $((n_k^*))$, so daß $a \,\varepsilon\, (A_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*})_{II\,i}$ für alle k. Da $\mathfrak{S}$ monoton, ist aber $A_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*} \subseteqq F_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*}$, also auch $(A_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*})_{II} \subseteqq (F_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*})_{II}$; da aber nach 19·5·12 $(F_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*})_{II} \subseteqq F_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*}$ ist, so ist $(A_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*})_{II} \subseteqq F_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*}$; also ist $a \,\varepsilon\, F_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*}$ für alle k, mithin $a \,\varepsilon\, A$. Wir haben also gezeigt: aus $a \,\varepsilon\, A_{II\,i} - C$ folgt $a \,\varepsilon\, A$, d. h. es ist $A_{II\,i} - C \subseteqq A$, und mithin $A_{II\,i} - A \subseteqq C$. Da C von erster Kategorie in $A_{II\,i}$ war, ist also $A\, A_{II\,i}$ eine Residualmenge in $A_{II\,i}$, also ist nach 19·8·2 $A_{II\,i} \subseteqq A_{III}$, mithin ist nach 19·9·5 A offen bis auf eine Menge erster Kategorie.

Als Ergänzung zu 19·9·21 zeigen wir nun:

41·1·2. *Die bis auf eine Menge erster Kategorie offenen Mengen des Raumes E bilden ein Suslinsches System.*

Sei $\mathfrak{M}$ das System der bis auf eine Menge erster Kategorie offenen Mengen des Raumes E, und sei $\mathfrak{S}$ ein Suslinsches Schema von Mengen $M_{n_1 n_2 \ldots n_k} \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$. Nach 19·9·1 ist $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ auch abgeschlossen bis auf eine Menge erster Kategorie; setzen wir also $A\,(=)B$, wenn $A - B$ und $B - A$ von erster Kategorie in E sind, so gibt es eine in E abgeschlossene Menge $F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, so daß $M_{n_1 n_2 \ldots n_k} (=) F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Bezeichnet $\mathfrak{S}'$ das Suslinsche Schema der Mengen $F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, so ist nach 40·1·5: $A(\mathfrak{S})\,(=)\,A(\mathfrak{S}')$. Da nach 41·1·1 $A(\mathfrak{S}')$ offen bis auf eine Menge erster Kategorie ist, so wegen $A(\mathfrak{S})\,(=)\,A(\mathfrak{S}')$ offenbar auch $A(\mathfrak{S})$, also ist auch $A(\mathfrak{S}) \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$; d. h. es ist $\mathfrak{M}_A \subseteqq \mathfrak{M}$, und da nach 40·2·1: $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{M}_A$, ist $\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}$, d. h. $\mathfrak{M}$ ist ein Suslinsches System (§ 40, 2).

Wir sagen: die Menge $A \subseteqq E$ hat die **Bairesche Eigenschaft**, wenn für jedes $M \subseteqq E$ gilt: $M\,A$ ist eine bis auf eine Menge erster Kategorie offene Menge des Raumes M.

41·1·3. *Damit die Menge $A \subseteqq E$ die Bairesche Eigenschaft habe, ist notwendig und hinreichend, daß für jede in E perfekte Menge P gelte: PA ist eine bis auf eine Menge erster Kategorie offene Menge des Raumes P.*

Notwendig: Dies ist trivial. Hinreichend: Sei F abgeschlossen in E und $P = F_k$ der perfekte Kern von F (§ 12, 7); dann ist $F - P = F_s$. Nach **12·7·1** ist F_s separiert, nach **12·7·5** offen in F. Nach Annahme ist PA offen bis auf eine Menge erster Kategorie in P, also nach **19·9·6** auch in F; nach **19·9·7** ist $F_s A$ offen bis auf eine Menge erster Kategorie in F_s, also nach **19·9·6** auch in F; wegen $FA = PA + F_s A$ ist also nach **19·9·21** FA offen bis auf eine Menge erster Kategorie in F. — Sei nun M eine ganz beliebige Menge $\subseteqq E$; da M^0 abgeschlossen in E, ist — wie eben gezeigt — $M^0 A$ offen bis auf eine Menge erster Kategorie in M^0. Nach **19·9·31** ist $M^0 A = A' + A''$, wo A' ein G_δ in M^0 und A'' von erster Kategorie in M^0; also ist $MA = MA' + MA''$, wo MA' ein G_δ in M und nach **19·4·32** MA'' von erster Kategorie in M; also ist nach **19·9·31** MA offen bis auf eine Menge erster Kategorie in M.

41·1·4. *Hat die Menge $A \subseteqq E$ die Bairesche Eigenschaft, so auch die Menge $E - A$.*

Sei $M \subseteqq E$; ist dann MA offen bis auf eine Menge erster Kategorie in M, so nach **19·9·2** auch $M - A = M(E - A)$.

41·1·41. *Die Mengen $A \subseteqq E$, die die Bairesche Eigenschaft haben, bilden ein Suslinsches System.*

Sei $\mathfrak{S}$ ein Suslinsches Schema von Mengen $B_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, die sämtlich die Bairesche Eigenschaft haben, und sei $A = A(\mathfrak{S})$. Ist $M \subseteqq E$, so ist nach **40·1·6** MA der Kern des Suslinschen Schemas der Mengen $M B_{n_1 n_2 \ldots n_k}$; nach Annahme ist $M B_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ offen bis auf eine Menge erster Kategorie in M; nach **41·1·2** gilt daher dasselbe von MA. Also hat auch A die Bairesche Eigenschaft.

41·1·42. *Das System $\mathfrak{M}$ der Mengen $A \subseteqq E$, die die Bairesche Eigenschaft haben, ist ein σ-Körper.*

Nach **41·1·41** und **40·2·4** ist $\mathfrak{M}$ ein σ-Ring. Da $E \varepsilon \mathfrak{M}$, und da nach **41·1·4** neben $A \varepsilon \mathfrak{M}$ auch $E - A \varepsilon \mathfrak{M}$ gilt, ist nach **8·8·1** $\mathfrak{M}$ ein Körper.

41·1·5. *Jede analytische Menge in E hat die Bairesche Eigenschaft.*

Sei A eine analytische Menge in E und $M \subseteqq E$. Nach **40·4·11** ist MA eine analytische Menge in M, also nach **41·1·1** eine bis auf eine Menge erster Kategorie offene Menge des Raumes M.

41·1·51. *Jede komplementär-analytische Menge in E hat die Bairesche Eigenschaft.*

Dies folgt aus **41·1·5** und **41·1·4**.

Wir erkennen nun, daß die Bairesche Eigenschaft nicht charakteristisch ist für die analytischen Mengen in E; denn ist E ein Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern $\supset \Lambda$ ist, so gibt es nach **40·9·11** eine komplementär-analytische Menge in E, die nicht analytisch in E ist.

Wir sagen: die Funktion f auf E hat die Bairesche Eigenschaft, wenn für jedes $M \subseteqq E$ die Funktion $M \,\rceil\, f$ stetig ist bis auf eine Menge erster Kategorie.

41·1·6. *Damit die charakteristische Funktion der Menge $A \subseteqq E$ die Bairesche Eigenschaft habe, ist notwendig und hinreichend, daß A die Bairesche Eigenschaft habe.*

Dies folgt aus **27·4·92.**

Nach **35·5·21** hat jede Bairesche Funktion in E die Bairesche Eigenschaft; doch ist die Bairesche Eigenschaft nicht charakteristisch für die Baireschen Funktionen in E; denn ist E ein Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern $\supset \Lambda$ ist, so gibt es nach **40·9·2** in E eine analytische Menge A, die keine Borelsche Menge ist; die charakteristische Funktion f von A ist nach **35·2·42** keine Bairesche Funktion, doch hat sie nach **41·1·5** und **41·1·6** die Bairesche Eigenschaft. — Ferner ist, wie der Beweis von **35·5·22** zeigt, wenn f wieder die eben betrachtete Funktion und M eine G_δ-Menge in E bedeutet, die Funktion $M \,\rceil\, f$ punktweise unstetig bei Vernachlässigung von Mengen erster Kategorie; es gilt also auch von **35·5·22** keine Umkehrung.

Literatur: R. Baire, Acta math. 30 (1906) S. 27; H. Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 188; O. Nicodym, Fund. math. 7 (1925) S. 149.

2. Perfekte Teile analytischer Mengen. Jede unabzählbare separable Youngsche Menge enthält nach **19·2·21**, **19·2·1**, **18·9·3** einen nicht leeren perfekten Teil. Dies ist ein spezieller Fall des Satzes:

41·2·1. *Jede unabzählbare, separable, in E analytische Menge A enthält einen nicht leeren, in E perfekten Teil.*

Sei $A = A\,(\mathfrak{S})$, wo $\mathfrak{S}$ ein Suslinsches Schema von in E abgeschlossenen Mengen $F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ bedeutet, und sei $A_{n_1 n_2 \ldots n_k} = A\,(\mathfrak{S}_{n_1 n_2 \ldots n_k})$; nach **40·1·2** können wir $\mathfrak{S}$ als monoton annehmen; dann ist $A_{n_1 n_2 \ldots n_k} \subseteqq F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Sei ferner $((\varrho_n))$ eine abnehmende Folge positiver Zahlen mit endlicher Summe $\sum\limits_n \varrho_n$; setzen wir dann $\sigma_n = \sum\limits_{\lambda \geqq n} \varrho_\lambda$, so gilt $\sigma_n \to 0$. Nach **18·5·42** gibt es einen Punkt $a \,\varepsilon\, A_\nu$. Dann ist $A\,K_{a \varrho_{m_1}}$ $(m_1 = 1, 2, \ldots)$ unabzählbar, und da nach **40·1·3** $A = \underset{n_1}{S}\, A_{n_1}$, ist auch für mindestens einen Summanden A_{n_1} der Durchschnitt $A_{n_1} K_{a \varrho_{m_1}}$ unabzählbar; einen solchen Summanden bezeichnen wir mit A'_{m_1}, die Menge F_{n_1} von gleichem Index n_1

mit F'_{m_1}. Weil $A'_{m_1} K_{a\varrho_{m_1}}$ unabzählbar, gibt es nach 13·5·42 in $K_{a\varrho_{m_1}}$ einen Punkt $a_{m_1} \varepsilon (A'_{m_1})_c$; dabei kann nach 13·5·6 ohne weiteres angenommen werden: $a_{m_1} \neq a_{m'_1}$ (für $m_1 \neq m'_1$). Nun ist $A'_{m_1} K_{a_{m_1} \varrho_{m_1+m_2}}$ ($m_2 = 1, 2, \ldots$) unabzählbar, und wegen $A'_{m_1} = A_{n_1} = \underset{n_2}{S} A_{n_1 n_2}$ ist auch für mindestens einen dieser Summanden $A_{n_1 n_2}$ der Durchschnitt $A_{n_1 n_2} K_{a_{m_1} \varrho_{m_1+m_2}}$ unabzählbar; einen solchen Summanden bezeichnen wir mit $A'_{m_1 m_2}$, die entsprechende Menge $F_{n_1 n_2}$ mit $F'_{m_1 m_2}$; dabei ist $F'_{m_1 m_2}$ einer der Nachfolger von F'_{m_1} im Schema $\mathfrak{S}$. Weil $A'_{m_1 m_2} K_{a_{m_1} \varrho_{m_1+m_2}}$ unabzählbar, gibt es in $K_{a_{m_1} \varrho_{m_1+m_2}}$ einen Punkt $a_{m_1 m_2} \varepsilon (A'_{m_1 m_2})_c$; dabei kann noch ohne weiteres angenommen werden $a_{m_1 m_2} \neq a_{m_1 m'_2}$ (für $m_2 \neq m'_2$). Indem wir so weiterschließen, kommen wir zu einer Menge von Punkten $a_{m_1 m_2 \ldots m_k} \varepsilon A$ ($k = 1, 2, \ldots$; $m_1 = 1, 2, \ldots$; $m_2 = 1, 2, \ldots$; $\ldots$), die wir mit Q bezeichnen, und es kann $a_{m_1 m_2 \ldots m_{k-1} m_k} \neq a_{m_1 m_2 \ldots m_{k-1} m'_k}$ (für $m_k \neq m'_k$) angenommen werden; ferner gehört $a_{m_1 m_2 \ldots m_k}$ zu einer Menge $A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, die wir mit $A'_{m_1 m_2 \ldots m_k}$ bezeichnen; die entsprechende Menge $F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ bezeichnen wir mit $F'_{m_1 m_2 \ldots m_k}$; dabei ist $F'_{m_1 m_2 \ldots m_k m_{k+1}}$ einer der Nachfolger von $F'_{m_1 m_2 \ldots m_k}$ im Schema $\mathfrak{S}$; endlich ist der Abstand $a_{m_1 m_2 \ldots m_k m_{k+1}} a_{m_1 m_2 \ldots m_k} < \varrho_{m_1+m_2+\ldots+m_{k+1}}$, also:

$$
(2)\qquad a_{m_1 m_2 \ldots m_k m_{k+1} \ldots m_{k+l}} a_{m_1 m_2 \ldots m_k} < \varrho_{m_1+m_2+\ldots+m_{k+1}} + \cdots + \varrho_{m_1+m_2+\ldots+m_{k+l}} < \sigma_{m_1+m_2+\ldots+m_{k+1}}.
$$

Aus (2) folgt sofort: $\lim\limits_{m_{k+1}} a_{m_1 m_2 \ldots m_k m_{k+1}} = a_{m_1 m_2 \ldots m_k}$; die Menge Q ist also insichdicht, also ist nach 12·5·4 Q^1 perfekt. Wir haben also nur mehr zu zeigen: $Q^1 \subseteqq A$, und dazu genügt es nach 17·3·61, zu zeigen: ist $((b_i))$ eine aus durchweg verschiedenen Punkten bestehende Punktfolge aus Q mit $b_i \to b$, so ist $b \varepsilon A$. Sei $b_i = a_{m_1^i m_2^i \ldots m_{k_i}^i}$; kommen dann unter den m_1^i ($i = 1, 2, \ldots$) unendlich viele verschiedene vor, so ist, da nach (2):

$$
b_i a \leq a_{m_1^i m_2^i \ldots m_{k_i}^i} a_{m_1^i} + a_{m_1^i} a < \sigma_{m_1^i + m_2^i} + \varrho_{m_1^i},
$$

sicherlich $b = a$, also $b \varepsilon A$. Wir nehmen also an, unter den m_1^i gibt es nur endlich viele verschiedene. Dann gibt es gewiß einen Index m_1^i, etwa m_1^*, so daß unter den b_i unendlich viele der Gestalt $b_i = a_{m_1^* m_2^i \ldots m_{k_i}^i}$ vorkommen; wir bezeichnen sie mit b_j^1 ($j = 1, 2, \ldots$); gibt es unter den Indizes m_2^i dieser b_j^1 unendlich viele verschiedene, so ist, da nach (2):

$$
a_{m_1^* m_2^i \ldots m_{k_i}^i} a_{m_1^*} < \sigma_{m_1^* + m_2^i},
$$

sicherlich $b = a_{m_1^*}$, also $b \varepsilon A$. Wir nehmen also an, unter den Indizes m_2^i

der b_j^1 gibt es nur endlich viele verschiedene. Dann gibt es gewiß einen Index m_2^i, etwa m_2^*, so daß unter den b_j^1 unendlich viele der Gestalt $b_i = a_{m_1^* m_2^* m_3^i \dots m_{k_i}^i}$ vorkommen; wir bezeichnen sie mit b_j^2 $(j = 1, 2, \dots)$; gibt es unter den Indizes m_3^i dieser b_j^2 unendlich viele verschiedene, so folgt wieder aus (2), daß $b = a_{m_1^* m_2^*}$, also $b \varepsilon A$. Indem man so weiterschließt, kommt man entweder nach endlich vielen Schritten zur Feststellung, daß $b = a_{m_1^* m_2^* \dots m_k^*}$ und mithin $b \varepsilon A$, oder man erhält eine Indizesfolge $((m_k^*))$, so daß es für jedes k unter den b_i unendlich viele der Gestalt $a_{m_1^* m_2^* \dots m_k^* m_{k+1} \dots m_{k+l}}$ gibt; wegen

$$a_{m_1^* m_2^* \dots m_k^* m_{k+1} \dots m_{k+l}} \varepsilon A'_{m_1^* m_2^* \dots m_k^* m_{k+1} \dots m_{k+l}},$$

$$A'_{m_1^* m_2^* \dots m_k^* m_{k+1} \dots m_{k+l}} \subseteq F'_{m_1^* m_2^* \dots m_k^* m_{k+1} \dots m_{k+l}} \subseteq F'_{m_1^* m_2^* \dots m_k^*}$$

ist aber dann, weil $F'_{m_1^* m_2^* \dots m_k^*}$ abgeschlossen, auch $b \varepsilon F'_{m_1^* m_2^* \dots m_k^*}$. Es ist dann also $b \varepsilon F'_{m_1^*} \cdot F'_{m_1^* m_2^*} \cdot \dots \cdot F'_{m_1^* m_2^* \dots m_k^*} \cdot \dots$, also $b \varepsilon A$ $(\mathfrak{S})$, d. h. $b \varepsilon A$, w. z. b. w.

41·2·2. *Jede unabzählbare, separable, absolut analytische Menge hat die Mächtigkeit* $\aleph$.

Denn nach **13·2·1** ist ihre Mächtigkeit $\leq \aleph$, und nach **41·2·1** und **19·3·1** ist sie $\geq \aleph$.

Ob Analoga der Sätze **41·2·1**, **41·2·2** für komplementär-analytische Mengen gelten, ist nicht bekannt. Keinesfalls kann, wie wir nun in **41·2·31** zeigen werden, aus dem in **41·1·51** bewiesenen Bestehen der Baireschen Eigenschaft für jede komplementär-analytische Menge auf die Gültigkeit eines zu **41·2·1** analogen Satzes für komplementär-analytische Mengen geschlossen werden.

41·2·3. *Es gibt im* R_0 *eine unabzählbare Punktmenge* B *von folgender Eigenschaft: für jede insichdichte Menge* P *des* R_0 *ist* $B\,P$ *von erster Kategorie in* P.

Nach **8·4·41** gibt es zu jeder Ordinalzahl $\alpha < \omega_1$ eine Folge ν_α natürlicher Zahlen, so daß $\nu_\alpha < \nu_{\alpha'}$ für $\alpha < \alpha'$. Die Menge B aller dieser ν_α $(\alpha < \omega_1)$ ist eine unabzählbare Punktmenge des R_0, die, wie wir zeigen wollen, das Verlangte leistet. Sei also P eine insichdichte Menge des R_0; wir haben zu zeigen: $B\,P$ ist von erster Kategorie in P. Da $B\,P$ als Punktmenge des R_0 separabel ist, gibt es einen abzählbaren in $B\,P$ dichten Teil B' von $B\,P$. Da B' abzählbar, gibt es nach **8·4·1** eine Ordinalzahl $\beta < \omega_1$, so daß $\alpha < \beta$ für alle $\nu_\alpha \varepsilon B'$. Sei B'' die Menge aller $\nu_\alpha \varepsilon B\,P$ mit $\alpha < \beta$; da $B'' \supseteq B'$, ist auch B'' dicht in $B\,P$, und da B'' abzählbar, ist B'' nach **19·4·5** von erster Kategorie in P. Um zu zeigen, daß $B\,P$ von erster Kategorie in P, genügt es also, zu zeigen, daß die Menge $C = B\,P - B''$ von erster Kategorie

in P ist. — Für alle $\nu_\alpha \varepsilon C$ ist $\alpha \geq \beta$, also gilt $\nu_\alpha \geq \nu_\beta$ für alle $\nu_\alpha \varepsilon C$; ist ν_α die Folge $n_{\alpha 1}, n_{\alpha 2}, \ldots, n_{\alpha i}, \ldots$ und ν_β die Folge $n_{\beta 1}, n_{\beta 2}, \ldots, n_{\beta i}, \ldots$, so gibt es also zu jedem $\nu_\alpha \varepsilon C$ ein i_α, so daß $n_{\alpha i} \geq n_{\beta i}$ für $i \geq i_\alpha$; bezeichnen wir mit C_j die Menge aller $\nu_\alpha \varepsilon C$, für die $n_{\alpha i} \geq n_{\beta i}$ für $i \geq j$, so ist demnach $C = \underset{j}{S}\, C_j$. Um nachzuweisen, daß C von erster Kategorie in P, genügt es also, nachzuweisen, daß C_j nirgends dicht in P. Nach **11·3·7** haben wir also zu zeigen: ist G eine in P offene Menge $\supset A$, so kann nicht $C_j G$ dicht in G sein. — Da B'' dicht in P, gibt es nach **11·1·3** einen Punkt $\nu_{\alpha*} \varepsilon B'' G$; wäre $C_j G$ dicht in G, so gäbe es nach **17·3·63** in C_j eine Punktfolge $((\nu_{\alpha_k}))$ mit $\nu_{\alpha_k} \to \nu_{\alpha*}$. Wir haben also nur mehr zu zeigen: für keine Punktfolge $((\nu_{\alpha_k}))$ aus C_j kann gelten: $\nu_{\alpha_k} \to \nu_{\alpha*}$. Nun ist wegen $\nu_{\alpha*} \varepsilon B''$ nach Definition von B'': $\alpha^* < \beta$; es gibt also ein i^*, so daß $n_{\alpha^* i} < n_{\beta i}$ für $i \geq i^*$: nach Definition von C_j aber ist $n_{\alpha_k i} \geq n_{\beta i}$ für $i \geq j$; setzen wir $i^{**} = \max(i^*, j)$, so ist also $n_{\alpha_k i} > n_{\alpha^* i}$ für $i \geq i^{**}$ und alle k: nach **17·3·7** kann also nicht $\nu_{\alpha_k} \to \nu_{\alpha*}$ gelten, w. z. b. w.

41·2·31. *Es gibt im R_0 eine unabzählbare, total imperfekte Menge, die die Bairesche Eigenschaft hat.*

Die Menge B von **41·2·3** ist total imperfekt; denn ist P eine nicht leere perfekte Menge des R_0, so ist $B\,P$ von erster Kategorie in P, also kann nach **19·7·6** nicht $B\,P = P$ sein, d. h. es ist nicht $P \subseteqq B$. Und da $B\,P$ von erster Kategorie in P, ist $B\,P$ auch offen bis auf eine Menge erster Kategorie in P, also hat nach **41·1·3** B die Bairesche Eigenschaft.

Auf Grund von **24·2·41** können die Sätze **41·2·3**, **41·2·31** vom R_0 auf jeden Youngschen Raum übertragen werden, dessen insichdichter Kern $\supset A$ ist.

Literatur: P. Alexandroff, C. R. 164 (1916) S. 323. F. Hausdorff, Math. Ann. 77 (1916) S. 430. M. Suslin, C. R. 164 (1917) S. 88. W. Sierpiński, Fund. math. 5 (1924) S. 166. W. Hurewicz, Fund. math. 12 (1928) S. 78. Zu Satz 41·2·3: N. Lusin, Fund. math. 2 (1921) S. 155.

3. Die Wertmenge einer Funktion. Ist $f(x)$ eine Funktion auf A, so bezeichnen wir die Menge aller Zahlen $f(x)$ $(x \varepsilon A)$ als die Wertmenge der Funktion $f(x)$. Ist A separabel und absolut analytisch, und ist $f(x)$ stetig, so ist nach **40·5·5** die Wertmenge von $f(x)$ eine analytische Menge des $\overline{R}_1$. Allgemein gilt:

41·3·1. *Ist $f(x)$ eine Bairesche Funktion auf der separablen, absolut analytischen Menge A, so ist ihre Wertmenge eine analytische Menge des $\overline{R}_1$.*

Nach **18·4·61** gibt es einen separablen vollständigen Raum $E \supseteqq A$. Sei $[f(\acute{x}) = \acute{y}]$ die die Funktion f darstellende Punktmenge $\subseteqq A \times \overline{R}_1$ (§ 35, 9). Nach **35·9·3** ist $[f(\acute{x}) = \acute{y}]$ eine Borelsche, also auch eine analytische Menge in $A \times \overline{R}_1$; nach **40·7·2** ist $A \times \overline{R}_1$ eine analytische Menge in $E \times \overline{R}_1$, nach **40·4·21** ist also auch $[f(\acute{x}) = \acute{y}]$ eine analytische Menge in $E \times \overline{R}_1$. Die Wertmenge von f ist die Projektion von $[f(\acute{x}) = \acute{y}]$ in den Raum $\overline{R}_1$; die Behauptung folgt also aus **40·6·11**.

Umgekehrt gilt:

41·3·2. *Jede nicht leere analytische Menge des R_1 ist die Wertmenge einer stetigen Funktion im R_0.*

Dies ist ein Spezialfall von **40·5·4**.

Für stetige Funktionen im R_n $(n \neq 0)$ gilt das Analogon von **41·3·2** nicht; denn der R_n $(n \neq 0)$ ist halbkompakt, und aus **23·3·1** und **15·2·22** folgt sofort, daß die Wertmenge einer stetigen Funktion auf einer halbkompakten Menge ein F_σ ist. Wohl aber gilt:

41·3·21. *Jede nicht leere analytische Menge B des $\overline{R}_1$ ist die Wertmenge einer oberhalb (bzw. unterhalb) stetigen Funktion im R_1.*

Sei $b = \sup B$; wir beweisen die Behauptung zuerst für den Fall, daß $b \in B$. Sei I die Menge aller irrationalen Punkte des R_1; da nach **24·2·2** I homöomorph dem R_0 ist, so gibt es nach **41·3·2** eine stetige Funktion g auf I, deren Wertmenge B ist. Die obere Schrankenfunktion $\bar{g}$ von g (§ 26, 2) ist dann nach **36·3·1** eine oberhalb stetige Funktion im R_1, und weil g stetig, ist nach **26·2·4**: $\bar{g}(x) = g(x)$ für alle $x \in I$. Für jedes $x \in R_1$ ist wegen $b \in B$ und $\bar{g}(x) \leq b$ die Menge B_x aller $y \in B$ mit $y \geq \bar{g}(x)$ nicht leer. Setzen wir $\inf B_x = g^*(x)$, so ist $g^*(x) \geq \bar{g}(x)$ für alle $x \in R_1$, und wegen $g(x) \in B$ ist $g^*(x) = \bar{g}(x) = g(x)$ für alle $x \in I$. Wir zeigen nun, daß $g^*(x)$ eine oberhalb stetige Funktion im R_1 ist; dazu genügt es nach **36·1·1**, zu zeigen: zu jedem $z > g^*(x)$ gibt es eine Umgebung U_x, so daß $g^*(x') < z$ für alle $x' \in U_x$. Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem es ein der Ungleichung $g^*(x) < y < z$ genügendes $y \in B$ gibt, oder nicht. 1. Fall: Sei $y \in B$ und $g^*(x) < y < z$; da $\bar{g}(x) \leq g^*(x)$ und $\bar{g}$ oberhalb stetig, gibt es nach **36·1·1** ein U_x, so daß $\bar{g}(x') < y$ für alle $x' \in U_x$; wegen $g^*(x') = \inf B_{x'}$, $y \in B_{x'}$ ist aber dann $g^*(x') \leq y < z$ für alle $x' \in U_x$, w. z. b. w. 2. Fall: In diesem Falle ist wegen $g^*(x) = \inf B_x$ notwendig $g^*(x) \in B$. Wegen $\bar{g}(x) \leq g^*(x) < z$ gibt es nach **26·2·11** eine Umgebung U_x, so daß $g(x') < z$ für alle $x' \in I\,U_x$; weil $g(x') \in B$, und weil es kein $y \in B$ mit $g^*(x) < y < z$ gibt, folgt nun aber daraus weiter: $g(x') \leq g^*(x)$ für alle $x' \in I\,U_x$, also nach **26·2·11** auch $\bar{g}(x') \leq g^*(x)$ für alle $x' \in U_x$, und wegen $g^*(x) \in B$

und $g^*(x') = \inf B_{x'}$ ist auch $g^*(x') \leq g^*(x) < z$ für alle $x' \varepsilon U_x$, w. z. b. w. Damit ist gezeigt, daß g^* oberhalb stetig. — Sei nun $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ die Menge aller rationalen Punkte des R_1; wegen $g^*(r_n) = \inf B_{r_n}$ gibt es ein $y_n \varepsilon B$, so daß $y_n \geq g^*(r_n)$ und $\| y_n - g^*(r_n) \| < \frac{1}{n}$. Wir definieren nun eine Funktion f im R_1 durch $f(x) = g^*(x)$ $(= g(x))$ für $x \varepsilon I$, und $f(r_n) = y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Da B die Wertmenge von g und $y_n \varepsilon B$ ist, so ist B auch die Wertmenge von f. Sei nun $((x_n))$ eine Punktfolge im R_1 mit $x_n \to x$ und $x_n \neq x$. Weil g^* oberhalb stetig, ist (§ 36, 1) $\overline{\lim\limits_n}\, g^*(x_n) \leq g^*(x) \leq f(x)$; wie aus der Definition von f unmittelbar folgt, ist $\lim\limits_n \| f(x_n) - g^*(x_n) \| = 0$, also $\overline{\lim\limits_n} f(x_n) = \overline{\lim\limits_n}\, g^*(x_n)$, also gilt auch $\overline{\lim\limits_n} f(x_n) \leq f(x)$, d. h. f ist oberhalb stetig. Damit ist die Behauptung für den Fall bewiesen, daß $b \varepsilon B$. — Sei nun $b \sim\varepsilon B$. Um zu zeigen, daß auch in diesem Falle B Wertmenge einer oberhalb stetigen Funktion im R_1 ist, genügt es, da die Halbgerade $x > 0$ des R_1 homöomorph dem R_1 ist, zu zeigen: B ist Wertmenge einer oberhalb stetigen Funktion auf der Halbgeraden $x > 0$. Da $b = \sup B$ und $b \sim\varepsilon B$, gibt es in B eine wachsende Folge von Zahlen $((b_n))$ mit $b_n \to b$; bezeichnet B_n die Menge aller $y \varepsilon B$ mit $y \leq b_n$, so ist $B = \underset{n}{S}\, B_n$, ferner ist $b_n = \sup B_n$ und $b_n \varepsilon B_n$. Wie schon gezeigt, gibt es also eine oberhalb stetige Funktion im R_1, deren Wertmenge B_n ist; und da das Intervall $(n-1, n)$ homöomorph dem R_1, gibt es also auch eine oberhalb stetige Funktion f_n auf $(n-1, n)$, deren Wertmenge B_n ist. Definieren wir nun die Funktion f auf der Halbgeraden $x > 0$ durch: $f = f_n$ in $(n-1, n)$, $f(n) = b_{n-1}$, so ist f oberhalb stetig, und die Wertmenge von f ist B.

Literatur: N. Lusin, Fund. math. 10 (1927) S. 5; Leç. s. l. ensembles analytiques S. 135. W. Sierpiński, Bull. Crac. 1918, S. 179; Fund. math. 10 (1927) S. 169; Bull. Crac. 1927, S. 697; Congr. Math. Slaves Vars. 1929, S. 52.

4. **Mehrfache Punkte einer Abbildung.** Sei P eine Abbildung von A auf B. Wir nennen den Punkt $y \varepsilon B$ einen k-fachen (bzw. mindestens k-fachen) Punkt von P, wenn es genau k (bzw. mindestens k) verschiedene $x \varepsilon A$ mit $P(x) = y$ gibt. Gibt es unendlich viele (bzw. unabzählbar viele) verschiedene $x \varepsilon A$ mit $P(x) = y$, so heißt y ein Punkt unendlicher (bzw. unabzählbarer) Vielfachheit von P.

41·4·1. *Ist A separabel und absolut analytisch, und ist P eine eindeutige, stetige Abbildung von A auf B, so ist für jedes k die Menge B_k aller mindestens k-fachen Punkte von P absolut analytisch.*

Sei $\mathfrak{H}$ ein abzählbares ausgezeichnetes System in A offener Mengen (§ 13, 1). Damit $b \varepsilon B_k$ sei, ist offenbar notwendig und hinreichend, daß es in $\mathfrak{H}$ ein k-tupel $H_1, H_2, \ldots, H_k$ disjunkter Mengen gebe, so daß $b \varepsilon P(H_1) P(H_2) \ldots P(H_k)$. Man erhält also B_k, indem man zu jedem k-tupel $H_1, H_2, \ldots, H_k$ disjunkter Mengen aus $\mathfrak{H}$ den Durchschnitt $P(H_1) P(H_2) \ldots P(H_k)$ bildet und sodann die Summe aller dieser Durchschnitte bildet. Nach **40·4·31** ist jede Menge $H \varepsilon \mathfrak{H}$ absolut analytisch, nach **40·5·5** ist also auch jede Menge $P(H)$ $(H \varepsilon \mathfrak{H})$ absolut analytisch, also nach **40·2·4** auch jeder Durchschnitt $P(H_1) P(H_2) \ldots P(H_k)$, und da es in $\mathfrak{H}$ nur abzählbar viele k-tupel gibt, ist nach **40·2·4** auch B_k absolut analytisch.

41·4·2. *Ist A separabel und absolut analytisch, und ist P eine eindeutige stetige Abbildung von A auf B, so ist die Menge B' aller Punkte unendlicher Vielfachheit von P absolut analytisch.*

Ist B_k die Menge der mindestens k-fachen Punkte von P, so ist $B' = \underset{k}{D} B_k$. Die Behauptung folgt also aus **40·2·4** und **41·4·1.**

Um zu zeigen, daß ein analoger Satz für die Punkte unabzählbarer Vielfachheit gilt, schicken wir einige Hilfsbetrachtungen voraus. Sei E ein separabler, vollständiger Raum, A eine analytische Menge in E. Nach **40·3·5** gibt es ein reguläres Suslinsches Schema $\mathfrak{S}$ in E abgeschlossener Mengen $F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, dessen Kern A ist. Wir bilden wie in § 40, 1 das Suslinsche Schema $\overline{\mathfrak{S}}$ der Mengen $A_{n_1 n_2 \ldots n_k} = A\,(\mathfrak{S}_{n_1 n_2 \ldots n_k})$. Dann ist $A_{n_1 n_2 \ldots n_k} \subseteqq F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$; das Schema $\overline{\mathfrak{S}}$ ist monoton, und wegen Eigenschaft 3. der regulären Suslinschen Schemata gilt für das Supremum d_k der Durchmesser $d(A_{n_1 n_2 \ldots n_k})$: $d_k \to 0$. Ist A unabzählbar, so ist für jedes k wegen **40·1·3** auch eine der Mengen $A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ unabzählbar.

41·4·3. *Unter den Nachfolgern einer unabzählbaren Menge $A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ in $\overline{\mathfrak{S}}$ gibt es zwei unabzählbare, zu einander fremde.*

Nach **13·5·42** und **13·5·6** gibt es zwei Verdichtungspunkte $c \neq c'$ von $A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Ist $0 < \varrho < \frac{1}{2} cc'$, so kann, weil für das Supremum d_{k+l} der Durchmesser $d(A_{n_1 n_2 \ldots n_{k+l}})$ gilt: $\lim\limits_{l \to \infty} d_{k+l} = 0$, l so gewählt werden, daß je zwei Nachfolger $A_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1} \ldots n_{k+l}}$ von $A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, von denen einer einen Punkt von $K_{c\varrho}$, der andere einen Punkt von $K_{c'\varrho}$ enthält, fremd sind; da aber c und c' Verdichtungspunkte von $A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, sind $A_{n_1 n_2 \ldots n_k} K_{c\varrho}$ und $A_{n_1 n_2 \ldots n_k} K_{c'\varrho}$ unabzählbar; mithin gibt es nach **40·1·3** unter den Nachfolgern $A_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1} \ldots n_{k+l}}$ von $A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ einen unabzählbaren.

der einen Punkt von $K_{c\varrho}$ enthält, und einen unabzählbaren, der einen Punkt von $K_{c'\varrho}$ enthält.

Sei nun jedem dyadischen Komplexe $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ (§ 18, 7) eine Menge $B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ zugeordnet. Wir sagen: diese Mengen bilden ein **disjunktes dyadisches Teilschema** von $\overline{\mathfrak{S}}$, wenn sie folgenden Bedingungen genügen:

1. Jede Menge $B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ ist eine unabzählbare Menge $A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ aus $\mathfrak{S}$.
2. $B_{i_1 i_2 \ldots i_n i_{n+1}}$ ist ein Nachfolger von $B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ in $\overline{\mathfrak{S}}$.
3. Je zwei Mengen $B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ mit gleichviel Indizes sind fremd.

Wegen 2. gilt für jede dyadische Folge $((i_n))$: $d(B_{i_1 i_2 \ldots i_n}) \to 0$. Aus **41·4·3** folgt leicht, daß es, wenn A unabzählbar, solche disjunkte dyadische Teilschemata von $\overline{\mathfrak{S}}$ gibt.

Sei $\mathfrak{T}$ ein disjunktes dyadisches Teilschema von $\overline{\mathfrak{S}}$, bestehend aus den Mengen $B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$. Dann gilt:

41·4·31. *Zu jeder dyadischen Folge $((i_n))$ gibt es einen Punkt $a \varepsilon A$, so daß: $B_{i_1} . B_{i_1 i_2} . \ldots . B_{i_1 i_2 \ldots i_n} . \ldots = \{a\}$.*

Nach Definition von $\mathfrak{T}$ gibt es eine Folge $((n_k))$ natürlicher Zahlen, so daß $B_{i_1}, B_{i_1 i_2}, \ldots, B_{i_1 i_2 \ldots i_n}, \ldots$ eine Teilfolge aus $A_{n_1}, A_{n_1 n_2}, \ldots, A_{n_1 n_2 \ldots n_k}, \ldots$. Da $\overline{\mathfrak{S}}$ monoton, nimmt diese Folge monoton ab; also ist: $B_{i_1} . B_{i_1 i_2} . \ldots . B_{i_1 i_2 \ldots i_n} . \ldots = A_{n_1} . A_{n_1 n_2} . \ldots . A_{n_1 n_2 \ldots n_k} . \ldots$. Da die Mengen $B_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset A$, sind auch die Mengen $A_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset A$; wegen $A_{n_1 n_2 \ldots n_k} \subseteqq F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ ist also auch $F_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset A$; nach **18·5·11** ist also $F_{n_1}, F_{n_1 n_2}, \ldots, F_{n_1 n_2 \ldots n_k}, \ldots$ eine monoton abnehmende Folge nicht leerer, vollständiger Mengen; nach **18·6·1** gibt es somit einen Punkt a, so daß $F_{n_1} . F_{n_1 n_2} . \ldots . F_{n_1 n_2 \ldots n_k} . \ldots = \{a\}$, und wegen $A = A(\mathfrak{S})$ ist $a \varepsilon A$. Da nach § 40 (1·2):

$$F_{n_1} . F_{n_1 n_2} . \ldots . F_{n_1 n_2 \ldots n_k} . \ldots = A_{n_1} . A_{n_1 n_2} . \ldots . A_{n_1 n_2 \ldots n_k} . \ldots,$$

ist auch $A_{n_1} . A_{n_1 n_2} . \ldots . A_{n_1 n_2 \ldots n_k} . \ldots = \{a\}$, also auch $B_{i_1} . B_{i_1 i_2} . \ldots . B_{i_1 i_2 \ldots i_n} . \ldots = \{a\}$.

Nach **41·4·31** ist jeder dyadischen Folge $((i_n))$ ein bestimmter Punkt von A zugeordnet; wir bezeichnen ihn mit $a_{((i_n))}$. Durchläuft $((i_n))$ alle dyadischen Folgen, so durchläuft der Punkt $a_{((i_n))}$ eine Punktmenge, die wir die **durch das disjunkte dyadische Teilschema** $\mathfrak{T}$ **von** $\mathfrak{S}$ **erzeugte Menge** $M(\mathfrak{T})$ nennen.

41·4·32. *Die durch ein disjunktes dyadisches Teilschema $\mathfrak{T}$ von $\overline{\mathfrak{S}}$ erzeugte Menge $M(\mathfrak{T})$ ist ein unabzählbarer Teil von A.*

Nach **41·4·31** ist $M(\mathfrak{T}) \subseteqq A$. Wegen Eigenschaft 3. von $\mathfrak{T}$ liefern verschiedene dyadische Folgen $((i_n))$ verschiedene Punkte $a_{((i_n))} \varepsilon A$; und da es nach **5·2·2** $\aleph$ dyadische Folgen gibt, hat $M(\mathfrak{T})$ die Mächtigkeit $\aleph$.

41·4·33. *Zu jedem in E perfekten Teile $C \supset A$ von A gibt es ein disjunktes dyadisches Teilschema $\mathfrak{T}$ von $\overline{\mathfrak{S}}$, so daß $M(\mathfrak{T}) \subseteqq C$.*

Da C nach **19·3·1** unabzählbar, gibt es nach **13·5·42**, **13·5·6** zwei Verdichtungspunkte $c \neq c'$ von C. Da nach **40·1·3**: $C = \underset{n_1, n_2, \ldots, n_k}{S} C A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, und da für das Supremum d_k der Durchmesser $d(A_{n_1 n_2 \ldots n_k})$ gilt: $d_k \to 0$, folgt daraus, daß, bei hinlänglich großem k, unter den Mengen $A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ zwei zueinander fremde vorkommen müssen, für die $C A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ unabzählbar ist; es gibt also in $\overline{\mathfrak{S}}$ zwei fremde Mengen B_{i_1} $(i_1 = 0, 1)$, so daß $C B_{i_1}$ unabzählbar. Ebenso gibt es unter den Nachfolgern von B_{i_1} in $\overline{\mathfrak{S}}$ zwei fremde $B_{i_1 i_2}$ $(i_2 = 0, 1)$, so daß $C B_{i_1 i_2}$ unabzählbar usf. Man erhält so ein disjunktes dyadisches Teilschema $\mathfrak{T}$ von $\overline{\mathfrak{S}}$, bestehend aus Mengen $B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, für die $C B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ unabzählbar. Sei $((i_\nu))$ eine dyadische Folge und sei $a_n \varepsilon C B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$; da auch $a_{((i_\nu))} \varepsilon B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, ist $a_n a_{((i_\nu))} \leq d(B_{i_1 i_2 \ldots i_n})$, und wegen $d(B_{i_1 i_2 \ldots i_n}) \to 0$ gilt $a_n \to a_{((i_\nu))}$. Da $a_n \varepsilon C$ und C abgeschlossen, ist auch $a_{((i_\nu))} \varepsilon C$, d. h. $M(\mathfrak{T}) \subseteqq C$.

41·4·4. *Ist A separabel und absolut analytisch, und ist P eine eindeutige stetige Abbildung von A auf B, so ist die Menge B^* aller Punkte unabzählbarer Vielfachheit von P absolut analytisch.*

Die Behauptung ist trivial, wenn A abzählbar, also $B^* = \Lambda$; sei also A unabzählbar. Nach **18·4·61** gibt es einen separablen, vollständigen Raum $E \supseteqq A$ und nach **40·3·5** ein reguläres Suslinsches Schema $\mathfrak{S}$ in E mit $A(\mathfrak{S}) = A$; sei $\overline{\mathfrak{S}}$ das zugehörige Suslinsche Schema der Mengen $A_{n_1 n_2 \ldots n_k} = A(\mathfrak{S}_{n_1 n_2 \ldots n_k})$. Da A unabzählbar, gibt es disjunkte dyadische Teilschemata von $\overline{\mathfrak{S}}$. Da es nur abzählbar viele Mengen $A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ gibt, gibt es in allen möglichen disjunkten dyadischen Teilschemata $\mathfrak{T}$ von $\overline{\mathfrak{S}}$ nur abzählbar viele verschiedene erste Zeilen[1]), die wir mit $\mathfrak{Z}_{n_1}$ $(n_1 = 1, 2, \ldots)$ bezeichnen. In den Schemata $\mathfrak{T}$, deren erste Zeile $\mathfrak{Z}_{n_1}$ ist, treten nur abzählbar viele verschiedene zweite Zeilen auf, die wir mit $\mathfrak{Z}_{n_1 n_2}$ $(n_2 = 1, 2, \ldots)$ bezeichnen usf. In dieser Weise erhalten wir ein Suslinsches Schema bestehend aus Systemen $\mathfrak{Z}_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ von 2^k Mengen aus $\overline{\mathfrak{S}}$; jede Folge $((n_k))$ natürlicher

---

[1]) Unter der k-ten Zeile eines dyadischen Schemas $\mathfrak{T}$ verstehen wir das System seiner 2^k Mengen k-ter Stufe (§ 18, 7).

Zahlen liefert ein disjunktes dyadisches Teilschema $\mathfrak{T}_{((n_k))}$ von $\mathfrak{S}$, dessen Zeilen $\mathfrak{Z}_{n_1}, \mathfrak{Z}_{n_1 n_2}, \ldots, \mathfrak{Z}_{n_1 n_2 \ldots n_k}, \ldots$ sind; durchläuft $((n_k))$ alle Folgen natürlicher Zahlen, so durchläuft $\mathfrak{T}_{((n_k))}$ alle disjunkten dyadischen Teilschemata von $\bar{\mathfrak{S}}$. Die 2^k Mengen von $\mathfrak{Z}_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ bezeichnen wir für den Augenblick mit $C_1, C_2, \ldots, C_{2^k}$, den Durchschnitt ihrer Bilder $P(C_1) P(C_2) \ldots P(C_{2^k})$ mit $P_{n_1 n_2 \ldots n_k}$; da die Mengen $A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ aus $\mathfrak{S}$ separabel und absolut analytisch sind, so nach **40·5·5** auch $P_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Die $P_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ bilden ein Suslinsches Schema $\mathfrak{S}^*$, und nach **40·4·4** ist $A(\mathfrak{S}^*)$ absolut analytisch. Wir zeigen nun, daß $B^* = A(\mathfrak{S}^*)$, womit die Behauptung bewiesen sein wird. — Sei $b \varepsilon B^*$. Nach Definition von B^* ist die Menge $P^{-1}(b)$ aller Urbilder von b unabzählbar; nach **23·2·11** ist sie abgeschlossen in A, also nach **40·4·31** absolut analytisch, enthält also nach **41·2·1** einen in E perfekten Teil $\supset A$, und daher gibt es nach **41·4·33** ein disjunktes dyadisches Teilschema $\mathfrak{T}$ von $\bar{\mathfrak{S}}$, so daß $M(\mathfrak{T}) \subseteqq P^{-1}(b)$. Besteht $\mathfrak{T}$ aus den Zeilen $\mathfrak{Z}_{n_1}, \mathfrak{Z}_{n_1 n_2}, \ldots, \mathfrak{Z}_{n_1 n_2 \ldots n_k}, \ldots$, so ist $b \varepsilon P_{n_1} . P_{n_1 n_2} . \ldots . P_{n_1 n_2 \ldots n_k} . \ldots$, also $b \varepsilon A(\mathfrak{S}^*)$; damit ist gezeigt, daß $B^* \subseteqq A(\mathfrak{S}^*)$. Sei nun umgekehrt $b \varepsilon A(\mathfrak{S}^*)$; dann gibt es eine Folge $((n_k))$ natürlicher Zahlen, so daß $b \varepsilon P_{n_1} . P_{n_1 n_2} . \ldots . P_{n_1 n_2 \ldots n_k} . \ldots$; ist dann $\mathfrak{T}_{((n_k))}$ das aus den Zeilen $\mathfrak{Z}_{n_1}, \mathfrak{Z}_{n_1 n_2}, \ldots, \mathfrak{Z}_{n_1 n_2 \ldots n_k}, \ldots$ bestehende disjunkte dyadische Teilschema von $\bar{\mathfrak{S}}$, so gibt es in jeder Menge $B_{i_1 i_2 \ldots i_n} \varepsilon \mathfrak{T}_{((n_k))}$ einen Punkt $a_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ mit $P(a_{i_1 i_2 \ldots i_n}) = b$. Sei $M(\mathfrak{T}_{((n_k))})$ die durch $\mathfrak{T}_{((n_k))}$ erzeugte Menge, und $a \varepsilon M(\mathfrak{T}_{((n_k))})$; nach Definition von $M(\mathfrak{T}_{((n_k))})$ ist $a = a_{((i_\nu))}$, wo $((i_\nu))$ eine dyadische Folge; dann ist $a \varepsilon B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ für alle n, und da auch $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \varepsilon B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ war und $d(B_{i_1 i_2 \ldots i_n}) \to 0$ gilt, so gilt $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \to a_{((i_\nu))}$. Wegen der Stetigkeit von P folgt also aus $P(a_{i_1 i_2 \ldots i_n}) = b$ auch $P(a_{((i_\nu))}) = b$; es gilt also $P(a) = b$ für alle $a \varepsilon M(\mathfrak{T}_{((n_k))})$, und da nach **41·4·32** $M(\mathfrak{T}_{((n_k))})$ ein unabzählbarer Teil von A, ist $b \varepsilon B^*$. Es ist also auch $A(\mathfrak{S}^*) \subseteqq B^*$. Somit ist $B^* = A(\mathfrak{S}^*)$, w. z. b. w.

Eine stetige Funktion f auf A liefert eine eindeutige, stetige Abbildung von A auf eine Punktmenge B des $\bar{R}_1$. Jede Zahl $y \varepsilon \bar{R}_1$, zu der es k Punkte (bzw. mindestens k Punkte) $x \varepsilon A$ mit $f(x) = y$ gibt, heißt ein k-facher (bzw. mindestens k-facher) Wert von f; jede Zahl $y \varepsilon \bar{R}_1$, zu der es unendlich viele (bzw. unabzählbar viele) $x \varepsilon A$ mit $f(x) = y$ gibt, heißt ein Wert unendlicher (bzw. unabzählbarer) Vielfachheit von f. Als Spezialfall von **41·4·1**, **41·4·2**, **41·4·4** erhalten wir:

41·4·5. *Ist f eine stetige Funktion auf der separablen, absolut analytischen Menge A, so ist die Menge aller mindestens k-fachen Werte (aller Werte unendlicher Vielfachheit, aller Werte unabzählbarer Vielfachheit) von f eine analytische Menge des $\overline{R}_1$.*

Umgekehrt gilt:

41·4·51. *Jede analytische Menge B des $\overline{R}_1$ ist die Menge aller mindestens k-fachen $(k > 1)$ Werte (aller Werte unendlicher Vielfachheit, aller Werte unabzählbarer Vielfachheit) einer stetigen Funktion im R_0.*

Die Behauptung ist richtig, wenn $B = \Lambda$; denn nach 24·2·2 ist der R_0 homöomorph der Menge I aller irrationalen Punkte des R_0; jede homöomorphe Abbildung des R_0 auf I liefert aber eine Funktion, für die die Menge aller mindestens k-fachen $(k > 1)$ Werte (aller Werte unendlicher Vielfachheit, aller Werte unabzählbarer Vielfachheit) leer ist. Sei also $B \supset \Lambda$. Sei A_n die Menge aller Punkte des R_0, die durch Folgen $((n_i))$ natürlicher Zahlen dargestellt werden, die mit $n_1 = n$ beginnen. Dann ist A_n homöomorph dem R_0; ebenso ist $\underset{n \geqq k}{S} A_n$ homöomorph dem R_0. Nach 41·3·2 gibt es eine stetige Funktion f_n auf A_n, deren Wertmenge B ist, sowie eine stetige Funktion f^* auf $\underset{n \geqq k}{S} A_n$, deren Wertmenge B ist. Setzen wir $f = f_n$ auf A_n $(n = 1, 2, \ldots, k-1)$, $f = f^*$ auf $\underset{n \geqq k}{S} A_n$, so ist f eine stetige Funktion im R_0 und B die Menge ihrer mindestens k-fachen Werte. Setzen wir $f = f_n$ auf A_n $(n = 1, 2, \ldots)$, so ist f eine stetige Funktion im R_0 und B die Menge ihrer Werte unendlicher Vielfachheit. — Sei sodann g eine stetige Funktion im R_0, deren Wertmenge B ist. Ordnen wir jedem Punkte $x = ((n_i))$ des R_0 den Punkt $z(x) = ((n'_i))$ mit $n'_i = n_{2i}$ zu, so ist dies eine stetige Abbildung des R_0 auf sich selbst, für die jeder Punkt z ein Punkt unabzählbarer Vielfachheit ist; setzen wir also $f(x) = g(z(x))$, so ist f eine stetige Funktion im R_0, für die B die Menge aller Werte unabzählbarer Vielfachheit ist.

Betrachten wir statt der stetigen Funktionen im R_0 nun die stetigen Funktionen im R_n $(n > 0)$, so gilt:

41·4·6. *Ist f eine stetige Funktion im R_n $(n > 0)$, so ist die Menge A_k aller mindestens k-fachen Werte von f Summe einer im $\overline{R}_1$ offenen und einer abzählbaren Menge.*

Sei A' die Menge aller derjenigen Funktionswerte $f(x) \varepsilon A_k$, die zugleich Maxima oder Minima von f sind; nach 25·4·2[1]) ist A' abzählbar. Sei

---

[1]) Siehe Nachtrag S. 399.

nun $y \varepsilon A_k - A'$; dann gibt es k Punkte $x_i \varepsilon R_n$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, so daß $f(x_i) = y$; wir wählen $\varrho > 0$ so klein, daß die k Kugeln $K_{x_i \varrho}$ disjunkt sind; da $y \sim\varepsilon A'$, gibt es in $K_{x_i \varrho}$ zwei Punkte x_i', x_i'', so daß $f(x_i') < y < f(x_i'')$; setzen wir $y' = \max\left(f(x_1'), f(x_2'), \ldots, f(x_k')\right)$, $y'' = \min\left(f(x_1''), f(x_2''), \ldots, f(x_k'')\right)$, so ist $y' < y < y''$ und nach 25·7·4 gibt es zu jedem $z \varepsilon (y', y'')$ einen Punkt $x_i^* \varepsilon K_{x_i \varrho}$ mit $f(x_i^*) = z$; jedes $z \varepsilon (y', y'')$ ist also mindestens k-facher Wert von f, d. h. es ist $(y', y'') \subseteqq A_k$. Zu jedem $y \varepsilon A_k - A'$ gibt es also ein offenes Intervall I_y des $\overline{R}_1$, das $\subseteqq A_k$ ist. Setzen wir $G = \underset{y \varepsilon A_k - A'}{S} I_y$, so ist G eine offene Menge des $\overline{R}_1$, die $\subseteqq A_k$ ist, und da $A_k - G \subseteqq A'$, ist $A_k - G$ abzählbar.

41·4·61. *Ist f eine stetige Funktion im R_n $(n > 0)$, so ist die Menge A_∞ aller Punkte unendlicher Vielfachheit von f Summe einer G_δ-Menge im $\overline{R}_1$ und einer abzählbaren Menge.*

Ist A_k die Menge aller mindestens k-fachen Werte von f, so ist nach 41·4·6 $A_k = G_k + A_k'$, wo G_k offen im $\overline{R}_1$ und A_k' abzählbar. Wegen $A_\infty = \underset{k}{D} A_k$ ist also $A_\infty = \underset{k}{D} G_k + A''$, wo $A'' \subseteqq \underset{k}{S} A_k'$ und mithin abzählbar ist.

Hingegen gilt im R_1 wie im $\dot{R}_0$:

41·4·62. *Jede analytische Menge B des $\overline{R}_1$ ist die Menge aller Werte unabzählbarer Vielfachheit einer stetigen Funktion im $\dot{R}_1$.*

Sei S die Schränkungstransformation und $B' = S(B)$. Nach 24·2·2, 24·2·12 ist der R_0 homöomorph der Menge I aller irrationalen Punkte von $[-1, 1]$. Nach 41·4·51 gibt es also eine stetige Funktion g auf I, für die B die Menge aller Werte unabzählbarer Vielfachheit ist. Setzen wir $S(g) = g'$, so ist $|g'| \leq 1$, und B' ist die Menge aller Werte unabzählbarer Vielfachheit von g'. Wir betrachten nun die Menge M aller Punkte (x, y) des R_2 mit $x \varepsilon I$, $y = g'(x)$; sie liegt im Quadrate $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ des R_2; dann ist B' die Menge aller $y \varepsilon R_1$, für die die Schicht $M_y^{(1)}$ von M unabzählbar ist. Sei M^0 die abgeschlossene Hülle von M im R_2; aus der Stetigkeit von g' auf I folgt, daß $M^0 - M$ nur Punkte (x, y) mit r a t i o n a l e r Abszisse x enthalten kann; also ist jede Schicht $(M^0 - M)_y^{(1)}$ abzählbar, und somit ist B' auch die Menge aller $y \varepsilon R_1$, für die die Schicht $(M^0)_y^{(1)}$ unabzählbar ist. Sei C ein dyadisches Diskontinuum im R_1; wie wir in § 23, 3 sahen, gibt es eine eindeutige stetige Abbildung P von C auf das Quadrat $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ des R_2, bei der jeder Punkt dieses Quadrates höchstens vier Urbilder hat; nach

28·2·11 ist $P^{-1}(M^0)$ ein abgeschlossener Teil F von C. Wir definieren nun eine Funktion $h(t)$ auf F durch die Festsetzung: ist $t \varepsilon F$ und ist $P(t) = (x(t), y(t))$ der Bildpunkt von t in M^0, so sei $h(t) = y(t)$. Dann ist $|h(t)| \leq 1$ und aus der Stetigkeit von P folgt, daß $h(t)$ stetig ist; da B' die Menge aller y war, für die die Schicht $(M^0)_y^{(1)}$ unabzählbar ist, so ist B' auch die Menge aller Werte unabzählbarer Vielfachheit von $h(t)$. Wir erweitern nun $h(t)$ zu einer stetigen Funktion $f(t)$ im R_1: das Komplement $R_1 - F$ besteht nach 16·5·4 aus einer Halbgeraden $t < a$, einer Halbgeraden $t > b$ und abzählbar vielen Intervallen (a_ν, b_ν), wobei $a \varepsilon F$, $b \varepsilon F$, $a_\nu \varepsilon F$, $b_\nu \varepsilon F$; wir setzen: $f(t) = h(t)$ für $t \varepsilon F$, $f(t) = h(a) + c' \dfrac{t-a}{t-a-1}$ für $t < a$, $f(t) = h(b) + c'' \dfrac{t-b}{t-b+1}$ für $t > b$, und:

$$f(t) = f(a_\nu) + \frac{t-a_\nu}{b_\nu - a_\nu}(f(b_\nu) - f(a_\nu)) \text{ in } (a_\nu, b_\nu), \text{ falls } f(a_\nu) \neq f(b_\nu),$$

$$f(t) = f(a_\nu) + c_\nu (t-a_\nu)(t-b_\nu) \text{ in } (a_\nu, b_\nu), \text{ falls } f(a_\nu) = f(b_\nu),$$

wobei die Konstanten c', c'', c_ν so zu wählen sind, daß durchweg $|f| \leq 1$ und f eine stetige Funktion im R_1 wird; dann ist B' die Menge aller Werte unabzählbarer Vielfachheit von f; also ist auch $S^{-1}(f)$ eine stetige Funktion im R_1 und B die Menge aller Werte unabzählbarer Vielfachheit von $S^{-1}(f)$.

41·4·7. *Sind die Räume $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ separabel und vollständig und ist A analytisch in $E^{(1)} \times E^{(2)}$, so ist die Menge aller $y \varepsilon E^{(2)}$, für die die Schicht $A_y^{(1)}$ von A aus mindestens k (aus unendlich vielen, aus unabzählbar vielen) Punkten besteht, absolut analytisch.*

Nach 20·2·4, 20·2·7 ist $E^{(1)} \times E^{(2)}$ separabel und vollständig; also ist A separabel und absolut analytisch. Da die Projektion von A in den Raum $E^{(2)}$ eine eindeutige, stetige Abbildung ist, folgt die Behauptung aus 41·4·1, 41·4·2, 41·4·4.

41·4·8. *Zu jeder analytischen Menge B des R_1 gibt es eine im R_2 abgeschlossene Menge F, so daß B die Menge aller $y \varepsilon R_1$ ist, für die die Schicht $F_y^{(1)}$ von F unabzählbar ist.*

Da der R_1 nach 25·3·2 homöomorph ist der Menge $E = \overline{R_1} - \{+\infty, -\infty\}$, ist nach 40·5·2 B analytisch in E, also nach 40·4·21 auch im $\overline{R_1}$. Nach 41·4·62 gibt es also eine stetige Funktion f im R_1, für die B die Menge aller Werte unabzählbarer Vielfachheit ist. Nach 35·9·41 ist die die Funktion f darstellende Menge $M = [f(\dot{x}) = \dot{y}]$ abgeschlossen in $R_1 \times \overline{R_1}$. Setzen wir $F = M(R_1 \times E)$, so ist F abgeschlossen in $R_1 \times E$, also, da E homöomorph dem R_1, auch abgeschlossen im R_2. Da offenbar B die Menge aller $y \varepsilon R_1$ ist, für die die Schicht $F_y^{(1)}$ unabzählbar ist, ist die Behauptung bewiesen.

Literatur: St. Mazurkiewicz u. W. Sierpiński, Fund. math. 6 (1924) S. 161. W. Sierpiński, Fund. math. 8 (1926) S. 370; C. R. Vars. 24 (1931) S. 57; Mathem. Cluj 5 (1931) S. 49. W. Hurewicz, Fund. math. 15 (1930) S. 4. K. Borsuk, Fund. math. 11 (1928) S. 278. C. Kuratowski u. E. Szpilrajn, Fund. math. 18 (1932) S. 160.

§ 42. Analytische und Borelsche Mengen.

1. **Trennbarkeit.** Sei E ein metrischer Raum, $\mathfrak{B}(E)$ das System der Borelschen Mengen in E. Wir nennen zwei Mengen M, M' in E $\mathfrak{B}$-trennbar, wenn es zwei fremde Borelsche Mengen B, B' in E gibt, so daß $M \subseteqq B$, $M' \subseteqq B'$. Da nach **33·4·2** aus $B \varepsilon \mathfrak{B}(E)$ auch folgt: $E - B \varepsilon \mathfrak{B}(E)$, ist dies gleichbedeutend mit: es gibt ein $B \varepsilon \mathfrak{B}(E)$, so daß $M \subseteqq B$, $M' \subseteqq E - B$. Die Mengen M und $E - M$ sind demnach dann und nur dann $\mathfrak{B}$-trennbar, wenn $M \varepsilon \mathfrak{B}(E)$. Die Mengen M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ heißen $\mathfrak{B}$-trennbar, wenn es ein disjunktes System von Mengen $B_n \varepsilon \mathfrak{B}(E)$ gibt, so daß $M_n \subseteqq B_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

42·1·1. *Sind je zwei der Mengen M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ $\mathfrak{B}$-trennbar, so sind die Mengen M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ $\mathfrak{B}$-trennbar.*

Nach Annahme gibt es für $m \neq n$ zwei fremde Borelsche Mengen B_{mn}, B_{nm} in E, so daß $M_m \subseteqq B_{mn}$, $M_n \subseteqq B_{nm}$; bezeichnen wir mit B_n den Durchschnitt der Mengen B_{nm} $(m = 1, 2, \ldots, m \neq n)$, so sind die B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ disjunkt, es ist $B_n \varepsilon \mathfrak{B}(E)$ und $M_n \subseteqq B_n$.

42·1·11. *Sind (für jedes Indizespaar m, n) die beiden Mengen M_m, M'_n $\mathfrak{B}$-trennbar, so sind auch die Mengen $M = \underset{m}{S}\, M_m$, $M' = \underset{n}{S}\, M'_n$ $\mathfrak{B}$-trennbar.*

Nach Annahme gibt es zwei fremde Borelsche Mengen B_{mn}, B'_{nm}, so daß $M_m \subseteqq B_{mn}$, $M'_n \subseteqq B'_{nm}$; setzen wir $B = \underset{m}{S}\, \underset{n}{D}\, B_{mn}$, $B' = \underset{n}{S}\, \underset{m}{D}\, B'_{nm}$, so ist $B B' = \Lambda$, $B \varepsilon \mathfrak{B}(E)$, $B' \varepsilon \mathfrak{B}(E)$ und $M \subseteqq B$, $M' \subseteqq B'$.

42·1·2. *Je zwei fremde separable, absolut analytische Mengen A, A' in E sind $\mathfrak{B}$-trennbar.*

Wir beweisen die gleichbedeutende Behauptung: sind A und A' nicht $\mathfrak{B}$-trennbar, so ist $A A' \neq \Lambda$. Nach **40·5·4** gibt es eine eindeutige stetige Abbildung P bzw. P' des R_0 auf A bzw. A'. Bezeichnen wir mit $R_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ die Menge aller mit $n_1, n_2, \ldots, n_k$ beginnenden Folgen $((n_i))$ natürlicher Zahlen, so ist $A = \underset{n_1}{S}\, P(R_{n_1})$, $A' = \underset{n_1}{S}\, P'(R_{n_1})$. Sind A, A' nicht $\mathfrak{B}$-trennbar, so gibt es nach **42·1·11** ein n_1^* und ein n_1^{**}, so daß auch $P(R_{n_1^*})$ und $P'(R_{n_1^{**}})$ nicht $\mathfrak{B}$-trennbar. Da $P(R_{n_1^*}) = \underset{n_2}{S}\, P(R_{n_1^* n_2})$, $P'(R_{n_1^{**}}) = \underset{n_2}{S}\, P'(R_{n_1^{**} n_2})$, gibt es dann nach **42·1·11** ein n_2^* und ein n_2^{**}, so daß auch $P(R_{n_1^* n_2^*})$ und $P'(R_{n_1^{**} n_2^{**}})$ nicht $\mathfrak{B}$-trennbar. Indem man so weiterschließt, erhält man

zwei Indizesfolgen $((n_k^*))$, $((n_k^{**}))$, so daß (für jedes k) $P(R_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*})$ und $P(R_{n_1^{**} n_2^{**} \dots n_k^{**}})$ nicht $\mathfrak{B}$-trennbar. Setzen wir $((n_k^*)) = \nu^*$, $((n_k^{**})) = \nu^{**}$, so ist dann aber $P(\nu^*) = P'(\nu^{**})$; denn wäre $P(\nu^*) \neq P'(\nu^{**})$, so gäbe es zwei fremde, in E offene Mengen G, G', so daß $P(\nu^*) \varepsilon G$, $P'(\nu^{**}) \varepsilon G'$; nach 23·1·2 wäre dann für fast alle k: $P(R_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*}) \subseteqq G$, $P'(R_{n_1^{**} n_2^{**} \dots n_k^{**}}) \subseteqq G'$, und es wären also $P(R_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*})$ und $P'(R_{n_1^{**} n_2^{**} \dots n_k^{**}})$ für fast alle k $\mathfrak{B}$-trennbar, entgegen dem Bewiesenen. Aus $P(\nu^*) = P'(\nu^{**})$ folgt aber, da $P(\nu^*) \varepsilon A$, $P'(\nu^{**}) \varepsilon A'$, daß $A A' \neq \Lambda$.

42·1·21. *Sind A, A' fremde separable, absolut analytische Mengen in E, so sind A und A' Borelsche Mengen in $A + A'$.*

Denn nach 42·1·2 gibt es zwei fremde Mengen $B \varepsilon \mathfrak{B}(E)$, $B' \varepsilon \mathfrak{B}(E)$, so daß $A \subseteqq B$, $A' \subseteqq B'$; dann ist $A = B(A + A')$, $A' = B'(A + A')$; also ist nach 33·4·7: $A \varepsilon \mathfrak{B}(A + A')$, $A' \varepsilon \mathfrak{B}(A + A')$.

42·1·3. *Ist E separabel und absolut analytisch, so ist, damit die in E analytische Menge A eine Borelsche Menge in E sei, notwendig und hinreichend, daß auch $E - A$ eine analytische Menge in E sei.*

Notwendig: Ist $A \varepsilon \mathfrak{B}(E)$, so ist auch $E - A \varepsilon \mathfrak{B}(E)$, also nach 40·3·3 auch $E - A \varepsilon \mathfrak{A}(E)$. Hinreichend: Nach 40·4·31 sind A und $E - A$ absolut analytisch, also sind nach 42·1·2 A und $E - A$ $\mathfrak{B}$-trennbar in E; also ist $A \varepsilon \mathfrak{B}(E)$.

Bedeutet $\mathfrak{K}(E)$ das System der komplementär-analytischen Mengen in E (§ 40, 9), so gilt:

42·1·31. *Ist E separabel und absolut analytisch, so ist* $\mathfrak{B}(E) = \mathfrak{A}(E) \cdot \mathfrak{K}(E)$.

Dies folgt unmittelbar aus 42·1·3.

Literatur: M. Suslin, C. R. 164 (1917) S. 88. N. Lusin, Fund. math. 10 (1927) S. 52. W. Sierpiński, C. R. Vars. 24 (1931) S. 57.

2. **Disjunkte Suslinsche Schemata.** Sei $\mathfrak{M}$ ein ganz beliebiges Mengensystem. Das Suslinsche Schema $\mathfrak{S}$ der Mengen $M_{n_1 n_2 \dots n_k} \varepsilon \mathfrak{M}$ heißt disjunkt, wenn für je zwei verschiedene Folgen $((n_k))$ natürlicher Zahlen die Durchschnitte $M_{n_1} \cdot M_{n_1 n_2} \cdot \ldots \cdot M_{n_1 n_2 \dots n_k} \cdot \ldots$ fremd sind.

42·2·1. *Ist jede der disjunkten Mengen A_n $(n = 1, 2, \dots)$ Kern eines disjunkten Suslinschen Schemas in $\mathfrak{M}$, so auch $A = \underset{n}{S} A_n$.*

Sei A_n Kern des disjunkten Suslinschen Schemas der Mengen $M^n_{n_1 n_2 \dots n_k}$. Wir bilden die Menge der Paare (n, n_1) eineindeutig ab auf die Menge der natürlichen Zahlen, und setzen, wenn dabei das Paar (n, n_1) auf die Zahl m abgebildet wird: $M^n_{n_1 n_2 \dots n_k} = M_{m n_2 \dots n_k}$. Dann bilden die Mengen

$M_{m n_2 \ldots n_k}$ ein Suslinsches Schema in $\mathfrak{M}$, das offenbar disjunkt, und dessen Kern A ist.

42·2·11. *Ist jede der Mengen A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ Kern eines disjunkten Suslinschen Schemas in $\mathfrak{M}$, so auch $A = \underset{n}{D}\, A_n$.*

Sei A_n Kern des disjunkten Suslinschen Schemas der Mengen $M^n_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Ist ν die Folge $((n_k))$ natürlicher Zahlen und $M^n_\nu = M^n_{n_1} \cdot M^n_{n_1 n_2} \cdot \ldots \cdot M^n_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cdot \ldots$, so ist nach § 40 (1·1): $A_n = \underset{\nu}{S}\, M^n_\nu$. Also ist nach dem ersten Distributivgesetze § 2 (2·3):

$$A = \underset{n}{D}\, A_n = \underset{\alpha, \beta, \gamma, \ldots}{S} M^1_\alpha\, M^2_\beta\, M^3_\gamma \ldots,$$

wo $M^1_\alpha = M^1_{a_1} \cdot M^1_{a_1 a_2} \cdot M^1_{a_1 a_2 a_3} \cdot \ldots$, $M^2_\beta = M^2_{b_1} \cdot M^2_{b_1 b_2} \cdot M^2_{b_1 b_2 b_3} \cdot \ldots$, $M^3_\gamma = M^{(3)}_{c_1} \cdot M^{(3)}_{c_1 c_2} \cdot M^{(3)}_{c_1 c_2 c_3} \cdot \ldots$ usf., und $\alpha = ((a_k))$, $\beta = ((b_k))$, $\gamma = ((c_k))$, ... für sich alle Folgen natürlicher Zahlen durchlaufen; es ist also ausführlicher geschrieben:

$$A = \underset{\alpha, \beta, \gamma, \ldots}{S} M^1_{a_1} \cdot M^1_{a_1 a_2} \cdot M^1_{a_1 a_2 a_3} \cdot \ldots \cdot M^2_{b_1} \cdot M^2_{b_1 b_2} \cdot M^2_{b_1 b_2 b_3} \cdot \ldots \cdot M^3_{c_1} \cdot M^3_{c_1 c_2} \cdot M^3_{c_1 c_2 c_3} \cdot \ldots$$

Wir ordnen in jedem Summanden die Doppelfolge der Faktoren nach Diagonalen (§ 1, 6) in eine einfache Folge:

$$A = \underset{\alpha, \beta, \gamma, \ldots}{S} M^1_{a_1} \cdot M^1_{a_1 a_2} \cdot M^2_{b_1} \cdot M^1_{a_1 a_2 a_3} \cdot M^2_{b_1 b_2} \cdot M^3_{c_1} \cdot \ldots$$

Nun machen wir die Mengen $M^1_{a_1}$ $(a_1 = 1, 2, \ldots)$ zu den Mengen erster Stufe eines Suslinschen Schemas $\mathfrak{S}$; der auf $M^1_{a_1}$ folgende Abschnitt zweiter Stufe von $\mathfrak{S}$ bestehe aus den Mengen $M^1_{a_1 a_2}$ $(a_2 = 1, 2, \ldots)$; jeder Abschnitt dritter Stufe von $\mathfrak{S}$ bestehe aus den Mengen $M^2_{b_1}$ $(b_1 = 1, 2, \ldots)$; jeder auf $M^1_{a_1 a_2}$ folgende Abschnitt vierter Stufe bestehe aus den Mengen $M^1_{a_1 a_2 a_3}$ $(a_3 = 1, 2, \ldots)$, jeder auf $M^2_{b_1}$ folgende Abschnitt fünfter Stufe aus den Mengen $M^2_{b_1 b_2}$ $(b_2 = 1, 2, \ldots)$, jeder Abschnitt sechster Stufe aus den Mengen $M^3_{c_1}$ $(c_1 = 1, 2, \ldots)$ usf. Dann ist offenbar $\mathfrak{S}$ disjunkt und A der Kern von $\mathfrak{S}$.

Sei nun E ein metrischer Raum. Dann gilt:

42·2·2. *Jede F_σ-Menge in E ist Kern eines monotonen disjunkten Suslinschen Schemas $\mathfrak{S}$ in E abgeschlossener Mengen.*

Sei A ein F_σ, also $A = \underset{n_1}{S}\, F_{n_1}$, wo F_{n_1} abgeschlossen; die Mengen F_{n_1} seien die Mengen erster Stufe des gesuchten Suslinschen Schemas $\mathfrak{S}$. Setzen wir $H_0 = A$, $H_{n_1} = \overset{n_1}{\underset{i=1}{S}}\, F_i\, (n_1 = 1, 2, \ldots)$, so können wir schreiben: $A = \underset{n_1}{S}\, (F_{n_1} - H_{n_1 - 1})$, wo nun die Summanden disjunkte F_σ sind; also ist $F_{n_1} - H_{n_1 - 1} = \underset{n_2}{S}\, F_{n_1 n_2}$, wo die $F_{n_1 n_2}$ abgeschlossene Mengen bedeuten;

sie seien die Mengen zweiter Stufe von $\mathfrak{S}$; die Abschnittsummen zweiter Stufe $S_{n_1} = \underset{n_2}{S} F_{n_1 n_2} = F_{n_1} - H_{n_1 - 1}$ sind dann disjunkt, und es ist $\underset{n_1 n_2}{S} F_{n_1 n_2} = \underset{n_1}{S} (F_{n_1} - H_{n_1 - 1}) = A$. Setzen wir $H_{n_1 0} = A$, $H_{n_1 n_2} = \overset{n_2}{\underset{i=1}{S}} F_{n_1 i}$ $(n_2 = 1, 2, \ldots)$, so können wir schreiben: $F_{n_1} - H_{n_1 - 1} = \underset{n_2}{S} (F_{n_1 n_2} - H_{n_1 n_2 - 1})$, wo wieder die Summanden disjunkte F_σ sind; also ist $F_{n_1 n_2} - H_{n_1 n_2 - 1} = \underset{n_3}{S} F_{n_1 n_2 n_3}$, wo die $F_{n_1 n_2 n_3}$ abgeschlossene Mengen bedeuten; sie seien die Mengen dritter Stufe von $\mathfrak{S}$; die Abschnittsummen dritter Stufe $S_{n_1 n_2} = \underset{n_3}{S} F_{n_1 n_2 n_3} = F_{n_1 n_2} - H_{n_1 n_2 - 1}$ sind dann disjunkt, und es ist: $\underset{n_1 n_2 n_3}{S} F_{n_1 n_2 n_3} = A$. Indem man so weiter schließt, erhält man ein monotones Suslinsches Schema abgeschlossener Mengen $F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, in dem für $k \geq 2$ die Abschnittsummen k-ter Stufe disjunkt sind und für alle k: $\underset{n_1 n_2 \ldots n_k}{S} F_{n_1 n_2 \ldots n_k} = A$ ist. Nach **40·1·1** ist also $A(\mathfrak{S}) = A$.

42·2·21. *Ist E separabel, so ist jede F_σ-Menge in E Kern eines disjunkten, in E regulären Suslinschen Schemas.*

Wie wir beim Beweise von **40·3·5** sahen, ist jede in E abgeschlossene Menge Summe abzählbar vieler in E abgeschlossener Mengen von einem Durchmesser $\leq \varrho$; dasselbe gilt daher von jedem F_σ in E. Wir können also beim Beweise von **42·2·2** annehmen: $d(F_{n_1 n_2 \ldots n_k}) \leq \frac{1}{k}$. Dann ist das im Beweise von **42·2·2** angegebene Schema $\mathfrak{S}$ disjunkt und regulär.

42·2·3. *Jede Borelsche Menge in E ist Kern eines monotonen disjunkten Suslinschen Schemas $\mathfrak{S}$ in E abgeschlossener Mengen.*

Nach **38·4·4** genügt es zu zeigen: ist $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi(E)$ $(2 \leq \xi < \omega_1)$, so ist A Kern eines disjunkten Suslinschen Schemas in E abgeschlossener Mengen. Wir beweisen dies durch transfinite Induktion. Da $\mathfrak{B}^2(E)$ das System der F_σ-Mengen in E ist, ist die Behauptung nach **42·2·2** richtig für $\xi = 2$. Sei $\xi > 2$; angenommen, die Behauptung sei richtig für alle $\eta < \xi$; ist $A \varepsilon \mathfrak{B}^\xi(E)$, so ist nach **38·3·21** und **38·3·212** $A = \underset{\nu}{S} A_\nu$, wo die A_ν disjunkt und $A_\nu \varepsilon \mathfrak{B}_{\eta_\nu}$ $(\eta_\nu < \xi)$; dann aber ist $A_\nu = \underset{n}{D} A_{\nu n}$, wo $A_{\nu n} \varepsilon \mathfrak{B}^{\eta_{\nu n}}$ $(\eta_{\nu n} < \eta_\nu < \xi)$; nach Annahme ist also $A_{\nu n}$ Kern eines disjunkten Suslinschen Schemas in E abgeschlossener Mengen, nach **42·2·11** also auch A_ν und nach **42·2·1** auch A; und nach **40·1·2** kann $\mathfrak{S}$ auch monoton angenommen werden.

42·2·31. *Ist E separabel, so ist jede Borelsche Menge B in E Kern eines disjunkten regulären Suslinschen Schemas in E.*

Nach 42·2·3 ist B Kern eines monotonen disjunkten Suslinschen Schemas $\mathfrak{S}'$ in E abgeschlossener Mengen $F'_{m_1 m_2 \ldots m_k}$; nach 42·2·21 ist E Kern eines disjunkten regulären Schemas $\mathfrak{S}''$ in E abgeschlossener Mengen $F''_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Wir machen die Durchschnitte $F'_{m_1} F''_{n_1}$ $(m_1, n_1 = 1, 2, \ldots)$ zu den Mengen erster Stufe eines Suslinschen Schemas $\mathfrak{S}$, die Durchschnitte $F'_{m_1 m_2} F''_{n_1 n_2}$ $(m_1, m_2, n_1, n_2 = 1, 2, \ldots)$ zu den Mengen zweiter Stufe von $\mathfrak{S}$, und zwar so, daß der auf $F'_{m_1} F''_{n_1}$ folgende Abschnitt zweiter Stufe aus den Mengen $F'_{m_1 m_2} F''_{n_1 n_2}$ $(m_2, n_2 = 1, 2, \ldots)$ besteht; die Durchschnitte $F'_{m_1 m_2 m_3} F''_{n_1 n_2 n_3}$ machen wir zu den Mengen dritter Stufe von $\mathfrak{S}$, und zwar so, daß der auf $F'_{m_1 m_2} F''_{n_1 n_2}$ folgende Abschnitt dritter Stufe aus den Mengen $F'_{m_1 m_2 m_3} F''_{n_1 n_2 n_3}$ $(m_3, n_3 = 1, 2, \ldots)$ besteht usf. Da $\mathfrak{S}'$ monoton und $\mathfrak{S}''$ regulär, ist offenbar auch $\mathfrak{S}$ regulär; da $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}''$ disjunkt, ist auch $\mathfrak{S}$ disjunkt; und es ist $A(\mathfrak{S}) = A(\mathfrak{S}') A(\mathfrak{S}'') = BE = B$.

42·2·32. *Ist E separabel und vollständig, so ist, damit B eine Borelsche Menge in E sei, notwendig und hinreichend, daß B Kern eines disjunkten Suslinschen Schemas in E abgeschlossener Mengen sei.*

Notwendig: Dies ist enthalten in **42·2·3.** Hinreichend: Sei $\mathfrak{S}$ ein disjunktes Suslinsches Schema in E abgeschlossener Mengen $F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ und $B = A(\mathfrak{S})$; nach **40·1·2** können wir $\mathfrak{S}$ als monoton voraussetzen. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ das von den Nachfolgern der Menge $F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ gebildete Suslinsche Schema (§ 40, 1) und setzen $A(\mathfrak{S}_{n_1 n_2 \ldots n_k}) = A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, so ist, weil $\mathfrak{S}$ monoton, auch das Suslinsche Schema $\overline{\mathfrak{S}}$ der Mengen $A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ monoton; ferner bilden, weil $\mathfrak{S}$ disjunkt, für jedes k die Mengen $A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ ein abzählbares disjunktes System in E analytischer Mengen; nach **42·1·2** und **42·1·1** gibt es also für jedes k ein System disjunkter Mengen $B_{n_1 n_2 \ldots n_k} \varepsilon \mathfrak{B}(E)$, so daß $A_{n_1 n_2 \ldots n_k} \subseteqq B_{n_1 n_2 \ldots n_k}$; dabei können wir, da $\overline{\mathfrak{S}}$ monoton, noch $B_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ ersetzen durch $B_{n_1} B_{n_1 n_2} \ldots B_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, und können somit auch das Suslinsche Schema der Mengen $B_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ als monoton annehmen. Setzen wir $C_{n_1 n_2 \ldots n_k} = B_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cdot F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, so ist also auch das Suslinsche Schema $\mathfrak{S}'$ der Mengen $C_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ monoton; ferner bilden für jedes k auch die Mengen $C_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ ein disjunktes System Borelscher Mengen in E. Wegen $A_{n_1 n_2 \ldots n_k} \subseteqq C_{n_1 n_2 \ldots n_k} \subseteqq F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, ist $A(\overline{\mathfrak{S}}) \subseteqq A(\mathfrak{S}') \subseteqq A(\mathfrak{S})$. Da nach **40·1·4** $A(\overline{\mathfrak{S}}) = A(\mathfrak{S})$, ist also auch $A(\mathfrak{S}') = A(\mathfrak{S}) = B$; setzen wir noch $C^{(k)} = \underset{n_1 n_2 \ldots n_k}{S} C_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, so ist nach **40·1·1**: $B = A(\mathfrak{S}') = \underset{k}{D}\, C^{(k)}$; wegen $C_{n_1 n_2 \ldots n_k} \varepsilon \mathfrak{B}(E)$ ist aber auch $C^{(k)} \varepsilon \mathfrak{B}(E)$, also auch $B \varepsilon \mathfrak{B}(E)$.

Literatur: N. Lusin, C. R. 164 (1917) S. 91. F. Hausdorff, Mengenlehre S. 184.

3. **Abbildungssätze.** Wir behandeln nun, wie schon in § 33, 6 angekündigt, eingehender die Abbildung Borelscher Mengen. Gibt es eine schlichte (§ 1, 5) stetige Abbildung von A auf B, so sagen wir, B sei schlichtes stetiges Bild von A. Mit $R_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ bezeichnen wir die Punktmenge des R_0, die aus allen mit $n_1, n_2, \ldots, n_k$ beginnenden Folgen $((n_l))$ natürlicher Zahlen besteht. In Analogie zu **40·5·4** gilt:

42·3·1. *Damit die Menge B schlichtes stetiges Bild einer abgeschlossenen Menge C des R_0 sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie eine separable, absolut Borelsche Menge sei.*

Notwendig: Sei P eine schlichte stetige Abbildung von C auf B. Nach **23·1·31** ist B separabel, und nach **18·4·61** können wir annehmen, B sei Punktmenge eines vollständigen, separablen Raumes E. Wir setzen $C \,.\, R_{n_1 n_2 \ldots n_k} = C_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ und bezeichnen mit $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ die abgeschlossene Hülle in E von $P(C_{n_1 n_2 \ldots n_k})$, mit $\mathfrak{S}$ das Suslinsche Schema der Mengen $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Wir zeigen nun, daß $B = A(\mathfrak{S})$; wir haben also zu zeigen: ist $b \,\varepsilon\, B$, so auch $b \,\varepsilon\, A(\mathfrak{S})$, und ist $b \,\varepsilon\, A(\mathfrak{S})$, so auch $b \,\varepsilon\, B$ — Sei $\nu = ((n_k))$, $M_\nu = M_{n_1} M_{n_1 n_2} \ldots M_{n_1 n_2 \ldots n_k} \ldots$; dann ist $A(\mathfrak{S}) = \underset{\nu}{S} M_\nu$, wo sich die Summation über alle Folgen ν natürlicher Zahlen erstreckt. Sei nun $b \,\varepsilon\, B$; dann gibt es ein $\nu \,\varepsilon\, C$, so daß $b = P(\nu)$; ist $\nu = ((n_k))$, so ist $\nu \,\varepsilon\, C_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ für alle k, also $b \,\varepsilon\, P(C_{n_1 n_2 \ldots n_k})$, also auch $b \,\varepsilon\, M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ für alle k, also $b \,\varepsilon\, M_\nu$, also $b \,\varepsilon\, A(\mathfrak{S})$. — Sei umgekehrt $b \,\varepsilon\, A(\mathfrak{S})$; dann gibt es ein ν, so daß $b \,\varepsilon\, M_\nu$; ist $\nu = ((n_k))$, so ist also $b \,\varepsilon\, M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ für alle k; da $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ die abgeschlossene Hülle von $P(C_{n_1 n_2 \ldots n_k})$, gibt es also ein $b_k \,\varepsilon\, P(C_{n_1 n_2 \ldots n_k})$, so daß $b_k b < \frac{1}{k}$; ist $\nu_k = P^{-1}(b_k)$, so ist $\nu_k \,\varepsilon\, C_{n_1 n_2 \ldots n_k}$; mithin gilt $\nu_k \to \nu$; da $\nu_k \,\varepsilon\, C$ und C abgeschlossen, ist $\nu \,\varepsilon\, C$, und wegen der Stetigkeit von P gilt $P(\nu_k) \to P(\nu)$, d. h. $b_k \to P(\nu)$; wegen $b_k b < \frac{1}{k}$ ist also $b = P(\nu)$, also $b \,\varepsilon\, B$. Damit ist gezeigt, daß $B = A(\mathfrak{S})$, und es ist weiter gezeigt: ist $b \,\varepsilon\, M_\nu$, so ist $\nu \,\varepsilon\, C$ und $b = P(\nu)$; d. h. es ist $M_\nu = \{P(\nu)\}$. — Daraus folgt nun weiter, daß das Schema $\mathfrak{S}$ disjunkt ist; denn ist $\nu \neq \nu'$, so ist, weil P schlicht, auch $P(\nu) \neq P(\nu')$, also sind M_ν und $M_{\nu'}$ fremd. Da $B = A(\mathfrak{S})$ war, ist also nach **42·2·32** B eine Borelsche Menge in E, und da E vollständig, ist B eine absolut Borelsche Menge. Hinreichend: Sei B eine separable, absolut Borelsche Menge; nach **18·4·61** gibt es einen separablen, vollständigen Raum $E \supseteqq B$; nach **42·2·31** ist B Kern eines

disjunkten regulären Suslinschen Schemas $\mathfrak{S}$ in E; nach **40·5·31** gibt es eine eindeutige stetige Abbildung P der dem Schema $\mathfrak{S}$ entsprechenden Menge C des R_0 auf die Menge B, und nach **40·5·3** ist C abgeschlossen; da das Schema $\mathfrak{S}$ disjunkt, ist offenbar die im Beweise von **40·5·31** angegebene eindeutige stetige Abbidlung P von C auf B schlicht. Also ist B schlichtes stetiges Bild von C.

42·3·2. *Ist B eine unabzählbare separable, absolut Borelsche Menge, so gibt es einen abzählbaren Teil B' von B, so daß $B - B'$ schlichtes stetiges Bild des R_0 ist.*

Nach **42·3·1** gibt es eine schlichte, stetige Abbildung P einer abgeschlossenen Menge C des R_0 auf B. Nach **24·2·21** und **24·2·2** kann C zerlegt werden in zwei fremde Summanden $C = C' + C''$, so daß C' abzählbar, C'' homöomorph dem R_0. Sei Q eine homöomorphe Abbildung des R_0 auf C'', und sei $P'' = C'' \upharpoonright P$; dann ist $Q|P''$ eine schlichte, stetige Abbildung des R_0 auf $P(C'')$. Da $P(C'') = B - P(C')$ und $P(C')$ abzählbar, ist die Behauptung bewiesen.

42·3·3. *Ist B schlichtes stetiges Bild der separablen, absolut Borelschen Menge A, so ist auch B eine separable, absolut Borelsche Menge.*

Der Beweis ist, bei Beachtung von **42·3·1**, analog dem von **40·5·5**.

Literatur: W. Sierpiński, Fund. math. 3 (1922) S. 30; Mathem. Cluj 1 (1929) S. 18.

4. **Halbschlichte Abbildungen.** Die eindeutige Abbildung P von A auf B heiße halbschlicht, wenn es keine Punkte unabzählbarer Vielfachheit von P gibt (§ 41, 4), d. h. wenn jeder Punkt $b \in B$ nur abzählbar viele Urbilder hat. Gibt es eine halbschlichte stetige Abbildung von A auf B, so nennen wir B ein halbschlichtes stetiges Bild von A. Wir werden zeigen, daß ein Analogon zu Satz **42·3·3** auch für halbschlichte Abbildungen gilt. Dazu benötigen wir einige Hilfsbetrachtungen.

42·4·1. *Sei E ein vollständiger Raum, A eine separable, absolut Borelsche Menge, P eine eindeutige, stetige Abbildung von A auf die Menge $B \subseteqq E$; sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Borelsche Mengen in A, und bedeutet C_i die Menge aller mindestens zweifachen Punkte von $A_i \upharpoonright P$, so ist jede zu einer der Mengen C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ fremde, in E analytische Menge $M \subseteqq P(A_1)\, P(A_2) \ldots P(A_n)$ $\mathfrak{B}$-trennbar von $E - B$.*

Da A_i separabel, ist nach **23·1·31** auch $P(A_i)$, mithin auch C_i und M separabel. Nach **33·5·2** ist A_i eine absolut Borelsche Menge; nach **41·4·1** ist somit C_i analytisch in E. Da $C_i M = \Lambda$, gibt es nach **42·1·2** eine zu C_i fremde Borelsche Menge N in E, so daß $M \subseteqq N$. Dann ist nach **33·4·7** $N P(A_i)$ eine Borelsche Menge in $P(A_i)$; setzen wir $K = (A_i \upharpoonright P)^{-1}(N P(A_i))$, so ist also

nach 33·6·1 K eine Borelsche Menge in A_ι, also nach 33·5·2 eine separable, absolut Borelsche Menge. Da $K \subseteqq A_\iota$, $P(K)\, C_\iota = \Lambda$, ist $K \mathrel{1} P$ eine schlichte stetige Abbildung, also ist nach 42·3·3 $P(K) = N\, P(A_\iota)$ eine absolut Borelsche Menge; wegen $M \subseteqq N$, $M \subseteqq P(A_1)\, P(A_2) \ldots P(A_n)$ ist $M \subseteqq N\, P(A_\iota)$, und wegen $N\, P(A_\iota) \subseteqq B$ ist $E - B \subseteqq E - N\, P(A_\iota)$; d. h. M ist $\mathfrak{B}$-trennbar von $E - B$.

Behalten wir die Bezeichnungsweise von Satz 42·4·1 bei, und setzen $P(A_1)\, P(A_2) \ldots P(A_n) = D_0$, $D_0 C_1 C_2 \ldots C_k = D_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, so gilt:

42·4·2. *Ist D_k $\mathfrak{B}$-trennbar von $E - B$, so auch D_{k-1} $(k = 1, 2, \ldots, n)$.*

Nach Annahme gibt es eine Borelsche Menge B' in E, so daß $D_k \subseteqq B'$, $B'(E - B) = \Lambda$. Nach 40·5·5 ist D_0 analytisch in E, nach 41·4·1 sind die Mengen C_i analytisch in E, und da B' eine Borelsche Menge in E, ist nach 40·3·3 auch $E - B'$ analytisch in E; also ist auch $D_{k-1} - B' = D_0 C_1 C_2 \ldots C_{k-1}(E - B')$ analytisch in E; und da $D_{k-1} - B'$ wegen $D_k \subseteqq B'$ fremd zu C_k, ist nach 42·4·1 $D_{k-1} - B'$ $\mathfrak{B}$-trennbar von $E - B$; wegen $B'(E - B) = \Lambda$ ist auch $D_{k-1} B'$ $\mathfrak{B}$-trennbar von $E - B$, also nach 42·1·11 auch $D_{k-1} = D_{k-1} B' + (D_{k-1} - B')$.

42·4·21. *Ist $C_1 C_2 \ldots C_n$ $\mathfrak{B}$-trennbar von $E - B$, so ist auch die Menge $D_0 = P(A_1)\, P(A_2) \ldots P(A_n)$ $\mathfrak{B}$-trennbar von $E - B$.*

Dies folgt aus 42·4·2 wegen $C_1 C_2 \ldots C_n = D_n$.

Wir bezeichnen nun mit $R_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ die Menge aller Punkte des R_0, die dargestellt sind durch eine mit den Gliedern $n_1, n_2, \ldots, n_k$ beginnende Folge $((n_\nu))$ natürlicher Zahlen. Jede Menge $R_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ bezeichnen wir als ein Intervall des R_0, und zwar als ein Intervall k-ter Stufe; jedes solche Intervall ist nach § 33 (8) abgeschlossen im R_0, also nach 18·2·22, 18·5·11 vollständig; ferner ist nach § 9 (3·4): $d(R_{n_1 n_2 \ldots n_k}) = \dfrac{1}{k+1}$.

42·4·3. *Sei E ein vollständiger Raum und P eine eindeutige stetige Abbildung des R_0 auf die Menge $B \subseteqq E$; ist dann B keine Borelsche Menge in E, so gibt es ein disjunktes dyadisches Schema, in dem jede Menge k-ter Stufe $A_{\iota_1 \iota_2 \ldots \iota_k}$ ein Intervall mindestens k-ter Stufe des R_0 ist, und für jedes k der Durchschnitt der 2^k Mengen $P(A_{\iota_1 \iota_2 \ldots \iota_k})$ $(i_1, i_2, \ldots, i_k = 0, 1)$ nicht $\mathfrak{B}$-trennbar von $E - B$ ist.*

Da B keine Borelsche Menge in E, ist B nicht $\mathfrak{B}$-trennbar von $E - B$. Nach 42·4·21 (für $n = 1$) ist also auch die Menge C aller mindestens zweifachen Punkte von P nicht $\mathfrak{B}$-trennbar von $E - B$. Ist $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ die Menge aller Intervalle des R_0, so ist $C = S\, P(I_{n_1})\, P(I_{n_2})$, wo sich die Summation über alle Paare I_{n_1}, I_{n_2} fremder Intervalle erstreckt; nach

42·1·11 ist also mindestens ein Summand $P(I_{n_1})\,P(I_{n_2})$ nicht $\mathfrak{B}$-trennbar von $E-B$; d. h. es gibt zwei fremde Intervalle A_0, A_1 des R_0, so daß $P(A_0)\,P(A_1)$ nicht $\mathfrak{B}$-trennbar von $E-B$. Bezeichnet dann C_{i_1} $(i_1=0,1)$ die Menge aller mindestens zweifachen Punkte von $A_{i_1}\,1\,P$, so ist nach 42·4·21 $C_0\,C_1$ nicht $\mathfrak{B}$-trennbar von $E-B$. Nun ist $C_0\,C_1 = S\,P(I_{n_1})\,P(I_{n_2})\,P(I_{n_3})\,P(I_{n_4})$, wo sich die Summation über alle Quadrupel $I_{n_1}, I_{n_2}, I_{n_3}, I_{n_4}$ disjunkter Intervalle erstreckt, von denen $I_{n_1}\subset A_0$, $I_{n_2}\subset A_0$, $I_{n_3}\subset A_1$, $I_{n_4}\subset A_1$; nach 42·1·11 ist also mindestens ein Summand $P(I_{n_1})\,P(I_{n_2})\,P(I_{n_3})\,P(I_{n_4})$ nicht $\mathfrak{B}$-trennbar von $E-B$; d. h. es gibt in A_{i_1} $(i_1=0,1)$ zwei fremde Intervalle $A_{i_1 0}$, $A_{i_1 1}$, so daß $P(A_{00})\,P(A_{01})\,P(A_{10})\,P(A_{11})$ nicht $\mathfrak{B}$-trennbar von $E-B$; die vier Intervalle $A_{i_1 i_2}$ $(i_1, i_2 = 0, 1)$ des R_0 sind von mindestens zweiter Stufe. Bezeichnet nun $C_{i_1 i_2}$ die Menge aller mindestens zweifachen Punkte von $A_{i_1 i_2}\,1\,P$, so ist nach 42·4·21 $C_{00}\,C_{01}\,C_{10}\,C_{11}$ nicht $\mathfrak{B}$-trennbar von $E-B$; daraus folgt wieder: es gibt in $A_{i_1 i_2}$ zwei fremde Intervalle $A_{i_1 i_2 0}$, $A_{i_1 i_2 1}$ von mindestens dritter Stufe, so daß der Durchschnitt der acht Mengen $P(A_{i_1 i_2 i_3})$ $(i_1, i_2, i_3 = 0, 1)$ nicht $\mathfrak{B}$-trennbar von $E-B$. Indem man so weiter schließt, erhält man das gewünschte dyadische Schema der Mengen $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$.

42·4·4. *Jedes halbschlichte stetige Bild B des R_0 ist eine absolut Borelsche Menge.*

Sei P eine eindeutige stetige Abbildung des R_0 auf B. Nach 18·4·6 gibt es einen vollständigen Raum $E \supseteqq B$. Angenommen, es wäre B keine Borelsche Menge in E; sei dann D das durch das disjunkte dyadische Schema $\mathfrak{S}$ von Satz 42·4·3 dargestellte dyadische Diskontinuum (§ 18, 9); wir zeigen, daß $P(a') = P(a'')$ für je zwei Punkte $a' \varepsilon D$, $a'' \varepsilon D$. Wäre nämlich $P(a') \neq P(a'')$, und sind $A_{i'_1 i'_2 \ldots i'_k}$ bzw. $A_{i''_1 i''_2 \ldots i''_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ die den Punkt a' bzw. a'' enthaltenden Mengen des Schemas $\mathfrak{S}$, so wäre wegen $d(A_{i'_1 i'_2 \ldots i'_k}) \to 0$, $d(A_{i''_1 i''_2 \ldots i''_k}) \to 0$ und wegen der Stetigkeit von P:

$$P(A_{i'_1 i'_2 \ldots i'_k})\,P(A_{i''_1 i''_2 \ldots i''_k}) = \Lambda \text{ für fast alle } k,$$

es wäre also auch der Durchschnitt der 2^k Mengen $P(A_{i_1 i_2 \ldots i_k})$ $(i_1, i_2, \ldots, i_k = 0, 1)$ leer für fast alle k, was unmöglich, weil für jedes k dieser Durchschnitt nicht $\mathfrak{B}$-trennbar von $E-B$ ist. Da also $P(a') = P(a'')$ für alle $a' \varepsilon D$, $a'' \varepsilon D$, und da nach 18·9·1 D die Mächtigkeit $\aleph$ hat, kann P nicht halbschlicht sein. Ist also P halbschlicht, so ist B eine Borelsche Menge in E, also eine absolut Borelsche Menge.

42·4·41. *Jedes halbschlichte stetige Bild B einer separablen, absolut Borelschen Menge A ist eine absolut Borelsche Menge.*

Da jede abzählbare Menge eine absolut Borelsche Menge ist, bedarf dies eines Beweises nur, wenn A unabzählbar ist. Dann gibt es nach **42·3·2** einen abzählbaren Teil A' von A, so daß $A - A'$ schlichtes stetiges Bild des R_0. Sei P eine schlichte stetige Abbildung des R_0 auf $A - A'$ und Q eine halbschlichte stetige Abbildung von A auf B; setzen wir $(A - A') \upharpoonright Q = Q'$, so ist $P \mid Q'$ eine halbschlichte stetige Abbildung des R_0 auf $Q(A - A')$; also ist nach **42·4·4** $Q(A - A')$ eine absolut Borelsche Menge; und da $B = Q(A - A') + Q(A')$ und $Q(A')$ abzählbar, ist auch B eine absolut Borelsche Menge.

42·4·5. *Ist A eine separable, absolut Borelsche Menge des Raumes $E^{(1)} \times E^{(2)}$, und ist jede Schicht $A_b^{(1)}$ ($b \varepsilon E^{(2)}$) abzählbar, so ist auch die Projektion A' von A in den Raum $E^{(2)}$ eine absolut Borelsche Menge.*

Dies folgt aus **42·4·41**, denn ordnen wir jedem Punkte $a \varepsilon A$ seine Projektion in den Raum $E^{(2)}$ zu, so ist dies eine halbschlichte stetige Abbildung von A auf A'.

Wir nennen die Funktion f auf A schlicht, wenn sie keine mehrfachen Werte hat, d. h. wenn es zu jedem $y \varepsilon \overline{R}_1$ höchstens ein $a \varepsilon A$ mit $f(a) = y$ gibt. Wir nennen die Funktion f auf A halbschlicht, wenn sie keine Werte unabzählbarer Vielfachheit hat, d. h. wenn es zu jedem $y \varepsilon \overline{R}_1$ nur abzählbar viele $a \varepsilon A$ mit $f(a) = y$ gibt.

42·4·6. *Ist $f(x)$ eine halbschlichte Bairesche Funktion auf der separablen, absolut Borelschen Menge A, so ist ihre Wertmenge eine Borelsche Menge des $\overline{R}_1$.*

Nach **18·4·61** gibt es einen separablen vollständigen Raum $E \supseteqq A$. Nach **35·9·8** ist die Menge $[f(\acute{x}) = \acute{y}]$ eine Borelsche Menge in $A \times \overline{R}_1$; wie beim Beweise von **41·3·1** sieht man, daß sie auch eine Borelsche Menge in $E \times \overline{R}_1$, also eine separable, absolut Borelsche Menge ist. Die Wertmenge von f ist die Projektion von $[f(\acute{x}) = \acute{y}]$ in den $\overline{R}_1$, und da f halbschlicht, folgt die Behauptung aus **42·4·5**.

Umgekehrt gilt:

42·4·7. *Jede Borelsche Menge des R_1 ist die Wertmenge einer schlichten stetigen Funktion auf einer abgeschlossenen Menge des R_0.*

Dies ist ein Spezialfall von **42·3·1**.

42·4·8. *Ist A eine separable, absolut Borelsche Menge, und ist P eine halbschlichte stetige Abbildung von A auf B, so ist für jedes k die Menge B_k aller mindestens k-fachen Punkte von P eine absolut Borelsche Menge.*

Der Beweis ist analog dem von **41·4·1**; nur sind jetzt die dort mit $P(H)$ bezeichneten Mengen nach **42·4·41** absolut Borelsche Mengen.

42·4·81. *Ist A eine separable, absolut Borelsche Menge, und ist P eine halbschlichte stetige Abbildung von A auf B, so ist für jedes k die Menge B'_k aller k-fachen Punkte von P eine absolut Borelsche Menge.*

Denn ist B_k die Menge aller mindestens k-fachen Punkte von P, so ist $B'_k = B_k - B_{k-1}$; die Behauptung folgt also aus **42·4·8.**

42·4·82. *Ist A eine separable, absolut Borelsche Menge, und ist P eine halbschlichte stetige Abbildung von A auf B, so ist die Menge aller Punkte unendlicher Vielfachheit von P eine absolut Borelsche Menge.*

Der Beweis ist analog dem von **41·4·2.**

42·4·9. *Ist A eine separable, absolut Borelsche Menge des Raumes $E^{(1)} \times E^{(2)}$, und ist jede Schicht $A_b^{(1)}$ $(b \varepsilon E^{(2)})$ abzählbar, so ist die Menge aller $b \varepsilon E^{(2)}$, für die die Schicht $A_b^{(1)}$ aus mindestens k (bzw. aus k, bzw. aus unendlich vielen) Punkten besteht, eine absolut Borelsche Menge.*

Dies ist enthalten in **42·4·8** (bzw. in **42·4·81**, bzw. in **42·4·82**).

42·4·91. *Ist $f(x)$ eine halbschlichte Bairesche Funktion auf der separablen, absolut Borelschen Menge A, so ist die Menge aller mindestens k-fachen Werte (bzw. aller k-fachen Werte, bzw. aller Werte unendlicher Vielfachheit) von f eine Borelsche Menge des $\overline{R}_1$.*

Der Beweis ist, unter Berufung auf **42·4·9**, analog dem von **42·4·6.**

Literatur: N. Lusin, Leç. s. l. ensembles analytiques S. 171ff.

5. **Borelsche Mengen, deren Schichten abzählbar sind.** Wir betrachten nun Borelsche Mengen A in $E^{(1)} \times E^{(2)}$, deren jede Schicht $A_b^{(1)}$ $(b \varepsilon E^{(2)})$ abzählbar ist. Wir beweisen zunächst einige Hilfsätze.

Sei A eine beliebige Menge $\subseteqq E^{(1)} \times E^{(2)}$; wir bezeichnen die ξ-te Kohärenz (§ 12, 8) der Schicht $A_b^{(1)}$ $(b \varepsilon E^{(2)})$ mit $A_{b\xi}$. Dann gilt:

42·5·1. *Ist $E^{(1)}$ separabel und vollständig, und gibt es zu jedem $\xi < \omega_1$ ein $b \varepsilon E^{(2)}$, so daß $A_{b\xi} \supset \Lambda$, so gibt es in $E^{(1)}$ ein disjunktes dyadisches Schema bestehend aus Mengen $C_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ von folgender Art: zu jedem k $(k = 1, 2, \ldots)$ und zu jeder Ordinalzahl $\xi < \omega_1$ gibt es ein $b \varepsilon E^{(2)}$, so daß jeder der 2^k Durchschnitte $A_{b\xi} C_{i_1 i_2 \ldots i_k} \supset \Lambda$ $(i_1, i_2, \ldots, i_k = 0, 1)$.*

Da $E^{(1)}$ vollständig, ist nach **18·5·11** jede in $E^{(1)}$ abgeschlossene Menge vollständig; da $E^{(1)}$ separabel, gibt es (für jedes n) unter den Kugeln $K_{a\frac{1}{n}}$ $(a \varepsilon E^{(1)})$ des Raumes $E^{(1)}$ nach **13·3·1** abzählbar viele, die $E^{(1)}$ überdecken, etwa: K_{n1}, $K_{n2}, \ldots, K_{nm}, \ldots$; seien $K_1, K_2, \ldots, K_\nu, \ldots$ die sämtlichen Kugeln K_{nm} $(n, m = 1, 2, \ldots)$ und sei K_ν^0 die abgeschlossene Hülle von K_ν. Wir zeigen: es gibt unter den K_ν zwei Kugeln K_{ν_0}, K_{ν_1} von folgenden Eigenschaften:

1. $K^0_{\nu_0} K^0_{\nu_1} = \Lambda$; 2. zu jedem $\xi < \omega_1$ gibt es ein $b \in E^{(2)}$, so daß $A_{b\xi} K_{\nu_0} \supset \Lambda$, $A_{b\xi} K_{\nu_1} \supset \Lambda$. In der Tat, anderenfalls gäbe es zu jedem Paare $K_{\nu'}$, $K_{\nu''}$ mit $K^0_{\nu'} K^0_{\nu''} = \Lambda$ eine Ordinalzahl $\xi_{\nu'\nu''} < \omega_1$, so daß für jedes $b \in E^{(2)}$ mindestens einer der beiden Durchschnitte $A_{b\xi_{\nu'\nu''}} K_{\nu'}$, $A_{b\xi_{\nu'\nu''}} K_{\nu''}$ leer ist; nach 8·4·1 gäbe es ein $\xi^* < \omega_1$, so daß alle $\xi_{\nu'\nu''} < \xi^*$; dann wäre auch für je zwei Kugeln $K_{\nu'}$, $K_{\nu''}$ mit $K^0_{\nu'} K^0_{\nu''} = \Lambda$ und für jedes $b \in E^{(2)}$ mindestens einer der beiden Durchschnitte $A_{b\xi^*} K_{\nu'}$, $A_{b\xi^*} K_{\nu''}$ leer; dann aber enthielte $A_{b\xi^*}$ für jedes $b \in E^{(2)}$ höchstens einen Punkt, es wäre also $A_{b\,\xi^*+1} = \Lambda$ für alle $b \in E^{(2)}$, entgegen der Voraussetzung. — Nun nehmen wir an, es seien unter den K_ν 2^k Kugeln $K_{\nu_{i_1 i_2 \ldots i_k}}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_k = 0, 1)$ von folgenden Eigenschaften gefunden: 1. ihre abgeschlossenen Hüllen $K^0_{\nu_{i_1 i_2 \ldots i_k}}$ sind disjunkt; 2. zu jedem $\xi < \omega_1$ gibt es ein $b \in E^{(2)}$, so daß jeder der 2^k Durchschnitte $A_{b\xi} K_{\nu_{i_1 i_2 \ldots i_k}} \supset \Lambda$. Wir zeigen: dann gibt es unter den Kugeln K_ν 2^{k+1} Kugeln $K_{\nu_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}} \subseteqq K_{\nu_{i_1 i_2 \ldots i_k}}$ $(i_{k+1} = 0, 1)$ mit Radien $\leqq \frac{1}{k}$, von folgenden Eigenschaften: 1. ihre abgeschlossenen Hüllen $K^0_{\nu_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}}$ sind disjunkt; 2. zu jedem $\xi < \omega_1$ gibt es ein $b \in E^{(2)}$, so daß jeder der 2^{k+1} Durchschnitte $A_{b\xi} K_{\nu_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}} \supset \Lambda$. In der Tat, anderenfalls gäbe es zu jedem Systeme $K_{\nu^{(\lambda)}}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, 2^{k+1})$ von 2^{k+1} Kugeln K_ν, deren abgeschlossene Hüllen disjunkt, deren Radien $\leqq \frac{1}{k}$ sind, und von denen je zwei in jeder der 2^k Kugeln $K_{\nu_{i_1 i_2 \ldots i_k}}$ liegen, einen Index $\xi_{\nu^{(1)}\nu^{(2)}\ldots\nu^{(2^{k+1})}} < \omega_1$, so daß für jedes $b \in E^{(2)}$ mindestens einer der 2^{k+1} Durchschnitte $A_{b\,\xi_{\nu^{(1)}\nu^{(2)}\ldots\nu^{(2^{k+1})}}} \cdot K_{\nu^{(\lambda)}}$ leer ist; nach 8·4·1 gäbe es ein $\xi^* < \omega_1$, so daß alle $\xi_{\nu^{(1)}\nu^{(2)}\ldots\nu^{(2^{k+1})}} < \xi^*$; dann wäre auch für jedes der genannten Systeme von 2^{k+1} Kugeln $K_{\nu^{(\lambda)}}$ mindestens einer der 2^{k+1} Durchschnitte $A_{b\xi^*} K_{\nu^{(\lambda)}}$ leer; dann aber enthielte $A_{b\xi^*}$ für jedes $b \in E^{(2)}$ von mindestens einer der 2^k Kugeln $K_{\nu_{i_1 i_2 \ldots i_k}}$ höchstens einen Punkt, für jedes $b \in E^{(2)}$ wäre also mindestens einer der 2^k Durchschnitte $A_{b\,\xi^*+1} K_{\nu_{i_1 i_2 \ldots i_k}} = \Lambda$, entgegen der Art, wie die Kugeln $K_{\nu_{i_1 i_2 \ldots i_k}}$ gewählt waren. — Damit ist gezeigt, daß es unter den K_ν für jedes k ein System von 2^k Kugeln $K_{\nu_{i_1 i_2 \ldots i_k}}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_k = 0, 1)$ mit Radien $\leqq \frac{1}{k-1}$ und mit den Eigenschaften 1. und 2. gibt, und es ist $K_{\nu_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}} \subseteqq K_{\nu_{i_1 i_2 \ldots i_k}}$. Setzen wir nun $C_{i_1 i_2 \ldots i_k} = K^0_{\nu_{i_1 i_2 \ldots i_k}}$, so haben wir das gesuchte disjunkte dyadische Schema.

Sei nun P eine halbschlichte stetige Abbildung von $E^{(1)}$ auf eine Punktmenge $B \subseteqq E^{(2)}$; die Menge aller Punkte $(x, P(x))$ von $E^{(1)} \times E^{(2)}$ $(x \varepsilon E^{(1)})$ bezeichnen wir mit A; dann ist für jedes $b \varepsilon B$ die Schicht $A_b = A_b^{(1)}$ von A auch die Urbildmenge $P^{-1}(b)$ von b, also abzählbar. Wir zeigen nun:

42·5·2. *Ist $E^{(1)}$ separabel und vollständig, und ist P eine halbschlichte stetige Abbildung von $E^{(1)}$ auf eine Punktmenge $B \subseteqq E^{(2)}$, so gibt es eine Ordinalzahl $\gamma < \omega_1$, so daß für jedes $b \varepsilon B$ die γ-te Kohärenz $A_{b\gamma}$ des Urbildes A_b von b leer ist.*

Anderenfalls gäbe es zu jedem $\xi < \omega_1$ ein $b \varepsilon B$, so daß $A_{b\xi} \supset \Lambda$; nach **42·5·1** gäbe es dann in $E^{(1)}$ ein disjunktes dyadisches Schema bestehend aus Mengen $C_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, so daß zu jedem k und zu jedem $\xi < \omega_1$ ein $b \varepsilon B$ gehört, für das jeder der 2^k Durchschnitte $A_{b\xi} C_{i_1 i_2 \ldots i_k} \supset \Lambda$, und mithin auch $A_b C_{i_1 i_2 \ldots i_k} \supset \Lambda$ ist. Sei C das durch das dyadische Schema der $C_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ dargestellte dyadische Diskontinuum; dann müssen alle $x \varepsilon C$ dasselbe Bild $P(x)$ haben; denn anderenfalls gäbe es zwei Punkte $x' \varepsilon C$, $x'' \varepsilon C$ mit $P(x') \neq P(x'')$; ist dann x' der Punkt $x_{((i'_\nu))}$ und x'' der Punkt $x_{((i''_\nu))}$ von C (§ 18, 7), so wäre wegen $x' \varepsilon C_{i'_1 i'_2 \ldots i'_k}$, $x'' \varepsilon C_{i''_1 i''_2 \ldots i''_k}$ und wegen der Stetigkeit von P für fast alle k: $P(C_{i'_1 i'_2 \ldots i'_k}) \cdot P(C_{i''_1 i''_2 \ldots i''_k}) = \Lambda$; dann aber wäre für jedes $b \varepsilon B$ mindestens einer der beiden Durchschnitte $A_b C_{i'_1 i'_2 \ldots i'_k}$, $A_b C_{i''_1 i''_2 \ldots i''_k}$ leer, entgegen der Art, wie das dyadische Schema der $C_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ gewählt war. — Da also alle $x \varepsilon C$ dasselbe Bild $P(x)$ haben, und da nach 18·9·1 C unabzählbar ist, wäre P nicht halbschlicht, entgegen der Annahme.

42·5·3. *Ist E separabel und vollständig, und ist P eine halbschlichte stetige Abbildung von E, so gibt es abzählbar viele Borelsche Mengen M_ν in E, so daß $E = \underset{\nu}{S} M_\nu$ und M_ν 1 P schlicht.*

Wir bezeichnen wieder mit B das Bild $P(E)$ von E, mit A_b die Urbildmenge $P^{-1}(b)$ des Punktes $b \varepsilon B$, mit $A_{b\eta}$ die η-te Kohärenz von A_b; dann ist $E = \underset{b \varepsilon B}{S} A_b$. Nach 42·5·2 gibt es ein $\gamma < \omega_1$, so daß $A_{b\gamma} = \Lambda$ für alle $b \varepsilon B$; nach § 12 (8·2) ist also $A_b = \underset{\eta<\gamma}{S} (A_{b\eta} - A_{b\,\eta+1})$. Wir setzen nun: $E_\eta = \underset{b \varepsilon B}{S} (A_{b\eta} - A_{b\,\eta+1})$, $E^*_\eta = \underset{b \varepsilon B}{S} A_{b\eta}$ $(\eta < \gamma)$; dann ist $E^*_\eta = E^*_{\eta+1} + E_\eta$, $E = \underset{\eta<\gamma}{S} E_\eta$. Es genügt also, zu zeigen: es gibt für jedes $\eta < \gamma$ abzählbar viele Borelsche Mengen $N_{\eta\nu}$ in E, so daß $E_\eta = \underset{\nu}{S} N_{\eta\nu}$ und $N_{\eta\nu}$ 1 P schlicht. — Zu jedem $a \varepsilon E_\eta$ gibt es nach Definition von E_η ein $b \varepsilon B$, so daß $a \varepsilon A_{b\eta} - A_{b\,\eta+1}$; nach Definition der Kohärenzen (§ 12, 8) ist dann a isolierter Punkt von $A_{b\eta}$; bezeichnet also $H_1, H_2, \ldots, H_i, \ldots$ ein abzählbares

ausgezeichnetes System in E offener Mengen (§ 13, 1), so gibt es ein H_ι, so daß a der einzige Punkt von $H_\iota A_{b\eta}$, also auch der einzige Punkt $x \varepsilon H_\iota E^*_\eta$ mit $P(x) = b$; setzen wir $H_\iota E^*_\eta \mathrm{l}\, P = P_{\eta\iota}$, so ist demnach b einfacher Punkt von $P_{\eta\iota}$; ist umgekehrt b einfacher Punkt von $P_{\eta\iota}$, so ist $P^{-1}_{\eta\iota}(b)$ isolierter Punkt von $A_{b\eta}$, also $P^{-1}_{\eta\iota}(b) \varepsilon A_{b\eta} - A_{b\,\eta+1}$, somit $P^{-1}_{\eta\iota}(b) \varepsilon E_\eta$. Wir sehen also: bezeichnet $B_{\eta\iota}$ die Menge der einfachen Punkte von $P_{\eta\iota}$, so ist $E_\eta = \underset{\iota}{S}\, P^{-1}_{\eta\iota}(B_{\eta\iota})$. — Wir zeigen nun durch transfinite Induktion, daß die E^*_η $(\eta < \gamma)$ Borelsche Mengen in E sind. Das ist richtig für $\eta = 0$, da $E^*_0 = \underset{b \varepsilon B}{S} A_{b0} = \underset{b \varepsilon B}{S} A_b = E$. Angenommen, es sei richtig für alle $\xi < \eta$; ist dann η Grenzzahl, so ist $A_{b\eta} = \underset{\xi<\eta}{D} A_{b\xi}$, also, da $A_{b\xi} A_{b'\xi'} = \Lambda$ für $b \neq b'$, auch $E^*_\eta = \underset{\xi<\eta}{D} E^*_\xi$, also ist, ebenso wie die E^*_ξ, auch E^*_η eine Borelsche Menge in E; ist hingegen η eine isolierte Zahl, so ist $E^*_\eta = E^*_{\eta-1} - E_{\eta-1}$; hierin ist, wie wir sahen, $E_{\eta-1} = \underset{\iota}{S}\, P^{-1}_{\eta-1\,\iota}(B_{\eta-1\,\iota})$; da $B_{\eta-1\,\iota}$ die Menge der einfachen Punkte von $P_{\eta-1\,\iota} = H_\iota E^*_{\eta-1} \mathrm{l}\, P$, und da nach Annahme $E^*_{\eta-1}$ eine Borelsche Menge in E, ist nach **42·4·81** $B_{\eta-1\,\iota}$ eine absolut Borelsche Menge, also auch eine Borelsche Menge in $P_{\eta-1\,\iota}(H_\iota E^*_{\eta-1})$, somit ist nach **33·6·1** $P^{-1}_{\eta-1\,\iota}(B_{\eta-1\,\iota})$ eine Borelsche Menge in $H_\iota E^*_{\eta-1}$, also nach **33·4·73** eine Borelsche Menge in E; wegen $E_{\eta-1} = \underset{\iota}{S}\, P^{-1}_{\eta-1\,\iota}(B_{\eta-1\,\iota})$ ist also auch $E_{\eta-1}$ eine Borelsche Menge in E, also auch $E^*_\eta = E^*_{\eta-1} - E_{\eta-1}$. — Da also E^*_η eine Borelsche Menge in E, so ist, wie wir eben sahen (es ist nur $\eta - 1$ durch η zu ersetzen), auch $P^{-1}_{\eta\iota}(B_{\eta\iota})$ eine Borelsche Menge in E; und da $E_\eta = \underset{\iota}{S}\, P^{-1}_{\eta\iota}(B_{\eta\iota})$, und da nach Definition von $B_{\eta\iota}$ offenbar $P^{-1}_{\eta\iota}(B_{\eta\iota}) \mathrm{l}\, P$ schlicht, ist die Behauptung bewiesen.

Wir nennen eine Punktmenge $A \subseteq E^{(1)} \times E^{(2)}$ eindeutig bezüglich $E^{(1)}$ (bzw. $E^{(2)}$), wenn es zu jedem $a \varepsilon E^{(1)}$ höchstens ein $b \varepsilon E^{(2)}$ gibt, so daß $(a, b) \varepsilon A$ (bzw. wenn es zu jedem $b \varepsilon E^{(2)}$ höchstens ein $a \varepsilon E^{(1)}$ gibt, so daß $(a, b) \varepsilon A$).

42·5·4. *Sind $E^{(1)}$ und $E^{(2)}$ separabel und vollständig, und ist A eine Borelsche Menge in $E^{(1)} \times E^{(2)}$, deren jede Schicht $A^{(2)}_a$ $(a \varepsilon E^{(1)})$ abzählbar ist, so gibt es abzählbar viele disjunkte, bezüglich $E^{(1)}$ eindeutige Borelsche Mengen A_ν in $E^{(1)} \times E^{(2)}$, so daß $A = \underset{\nu}{S} A_\nu$.*

Da nach **20·2·4** und **20·2·7** $E^{(1)} \times E^{(2)}$ separabel und vollständig ist, ist A eine separable, absolut Borelsche Menge; es gibt also nach **42·3·1** eine schlichte stetige Abbildung Q einer abgeschlossenen Menge C des R_0 auf A. Wir definieren nun eine Abbildung P von C durch die Festsetzung: ist $Q(c) = (x, y)$ $(c \varepsilon C, (x, y) \varepsilon A)$, so sei $P(c) = x$. Die Abbildung P von C ist stetig und halbschlicht; da C separabel und nach **18·5·11** vollständig,

gibt es also nach **42·5·3** abzählbar viele Borelsche Mengen M_ν des R_0, so daß $C = \underset{\nu}{S}\, M_\nu$ und $M_\nu \,1\, P$ schlicht; dann ist $Q(M_\nu)$ eindeutig bezüglich $E^{(1)}$, es ist $A = \underset{\nu}{S}\, Q(M_\nu)$, und nach **42·3·3** ist $Q(M_\nu)$ eine absolut Borelsche Menge. Setzen wir $A_1 = Q(M_1), A_\nu = Q(M_\nu) - (Q(M_1) + \ldots + Q(M_{\nu-1}))$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$, so leisten die Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$ das Verlangte.

Literatur: N. Lusin, Leç. s. l. ensembles analytiques S. 238ff.

6. **Minimalpunkte.** Sei $A \subseteqq E \times \overline{R}_1$. Ein Punkt $(a, b) \varepsilon A$ $(a \varepsilon E, b \varepsilon \overline{R}_1)$ heißt ein Minimalpunkt von A, wenn es keinen Punkt $(a, y) \varepsilon A$ $(y \varepsilon \overline{R}_1)$ mit $y < b$ gibt. Die Menge aller Minimalpunkte von A bezeichnen wir mit $A^{(m)}$.

42·6·1. *Ist E separabel und ist A eine analytische Menge in $E \times \overline{R}_1$, so ist $A - A^{(m)}$ analytisch in $E \times \overline{R}_1$.*

Ist $(a, b) \varepsilon A$, so ist, damit $(a, b) \varepsilon A - A^{(m)}$ sei, notwendig und hinreichend, daß es ein rationales $r < b$ und einen Punkt $(a, y) \varepsilon A$ mit $y < r$ gebe. Bezeichnet A_r die Menge aller $(x, y) \varepsilon A$ mit $y < r$ und A'_r die Menge aller $(x, y) \varepsilon A$ mit $y > r$, ferner E_r die Projektion von A_r in den Raum E, setzen wir endlich $A'_r \cdot (E_r \times \overline{R}_1) = A''_r$, so ist also $A - A^{(m)} = \underset{r}{S}\, A''_r$, wo sich die Summation über alle rationalen Zahlen r erstreckt. Wir haben also nur mehr zu zeigen, daß A''_r analytisch in $E \times \overline{R}_1$. — Die Menge A_r (bzw. A'_r) ist analytisch in $E \times \overline{R}_1$ als der Durchschnitt von A und der in $E \times \overline{R}_1$ offenen Menge aller $(x, y) \varepsilon E \times \overline{R}_1$ mit $y < r$ (bzw. $y > r$); also ist E_r analytisch in E nach **40·6·11**, somit ist $E_r \times \overline{R}_1$ analytisch in $E \times \overline{R}_1$ nach **40·7·2**, somit ist auch A''_r analytisch in $E \times \overline{R}_1$, w. z. b. w.

42·6·2. *Ist E separabel und ist A eine Borelsche Menge in $E \times \overline{R}_1$, so ist $A^{(m)}$ eine komplementär-analytische Menge in $E \times \overline{R}_1$.*

Denn $E \times \overline{R}_1 = A^{(m)} + (A - A^{(m)}) + (E \times \overline{R}_1 - A)$, und hierin ist $A - A^{(m)}$ analytisch in $E \times \overline{R}_1$ nach **42·6·1**, und $E \times \overline{R}_1 - A$ ist als Komplement einer Borelschen Menge in $E \times \overline{R}_1$ nach **33·4·2** selbst eine Borelsche, also nach **40·3·3** auch eine analytische Menge in $E \times \overline{R}_1$.

42·6·21. *Ist E separabel und vollständig, und ist A eine Borelsche Menge in $E \times \overline{R}_1$, deren Schichten $A_x^{(2)}$ $(x \varepsilon E)$ abzählbar sind, so ist $A^{(m)}$ eine Borelsche Menge in $E \times \overline{R}_1$.*

Verwenden wir dieselben Bezeichnungen wie beim Beweise von **42·6·1**, so sind nun A_r und A'_r Borelsche Mengen in $E \times \overline{R}_1$, und nach **42·4·5** ist E_r

eine Borelsche Menge in E; also ist $A - A^{(m)}$ eine Borelsche Menge in $E \times \overline{R}_1$, mithin auch $A^{(m)}$.

42·6·3. *Zu jeder analytischen Menge B in E gibt es eine $\mathfrak{B}_3$-Menge (§ 33, 4) A in $E \times \overline{R}_1$, so daß B die Projektion von $A^{(m)}$ in den Raum E ist.*

Sei B eine analytische Menge in E; dann gibt es nach **40·1·2** ein monotones Suslinsches Schema $\mathfrak{S}$ in E abgeschlossener Mengen $F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, so daß $B = A(\mathfrak{S})$. Sei $[y_{n_1}, z_{n_1}]$ $(n_1 = 1, 2, \ldots)$ eine Folge disjunkter Intervalle des $\overline{R}_1$, so daß $z_{n_1} < y_{n_1+1}$; sei $[y_{n_1 n_2}, z_{n_1 n_2}]$ $(n_2 = 1, 2, \ldots)$ eine Folge disjunkter Intervalle $\subseteqq [y_{n_1}, z_{n_1}]$, so daß $z_{n_1 n_2} < y_{n_1 n_2+1}$; sei $[y_{n_1 n_2 n_3}, z_{n_1 n_2 n_3}]$ $(n_3 = 1, 2, \ldots)$ eine Folge disjunkter Intervalle $\subseteqq [y_{n_1 n_2}, z_{n_1 n_2}]$, so daß $z_{n_1 n_2 n_3} < y_{n_1 n_2 n_3+1}$ usf. Sei $M_{n_1 n_2 \ldots n_k} = F_{n_1 n_2 \ldots n_k} \times [y_{n_1 n_2 \ldots n_k}, z_{n_1 n_2 \ldots n_k}]$; dann ist $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ abgeschlossen in $E \times \overline{R}_1$, und je zwei $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ mit gleich viel Indizes sind fremd. Die $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ bilden also ein monotones Suslinsches Schema $\overline{\mathfrak{S}}$ in $E \times \overline{R}_1$ abgeschlossener Mengen, dessen Kern $A = A(\overline{\mathfrak{S}})$ nach **40·1·1** eine $\mathfrak{B}_3$-Menge in $E \times \overline{R}_1$ ist. Sei A' die Projektion von A in den Raum E; wir zeigen nun, daß $A' = B$. Sei $x^* \varepsilon B$; dann gibt es eine Indizesfolge $((n_k^*))$, so daß $x^* \varepsilon F_{n_1^*} F_{n_1^* n_2^*} \ldots F_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*} \ldots$; da $[y_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^* n_{k+1}^*}, z_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^* n_{k+1}^*}] \subseteqq [y_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*}, z_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*}]$, gibt es ein $y^* \varepsilon \underset{k}{D} [y_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*}, z_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*}]$; dann ist (x^*, y^*) $\varepsilon M_{n_1^*} M_{n_1^* n_2^*} \ldots M_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*} \ldots$, also $(x^*, y^*) \varepsilon A$, mithin $x^* \varepsilon A'$. Sei umgekehrt $x^* \varepsilon A'$; dann gibt es ein y^*, so daß $(x^*, y^*) \varepsilon A$; mithin gibt es eine Indizesfolge $((n_k^*))$, so daß $(x^*, y^*) \varepsilon M_{n_1^*} M_{n_1^* n_2^*} \ldots M_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*} \ldots$; dann aber ist $x^* \varepsilon F_{n_1^*} F_{n_1^* n_2^*} \ldots F_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*} \ldots$, also $x^* \varepsilon B$. — Nun zeigen wir: B ist auch die Projektion von $A^{(m)}$ in den Raum E. Da wir eben gezeigt haben, daß B die Projektion von A ist, genügt es zu zeigen: in jeder nicht leeren Schicht $A_x^{(2)}$ von A $(x \varepsilon E)$ gibt es einen Punkt von $A^{(m)}$. Sei also $A_x^{(2)} \supset A$; unter allen Mengen M_{n_1} mit $M_{n_1} A_x^{(2)} \supset A$ gibt es eine von kleinstem Index n_1^*; unter allen Mengen $M_{n_1^* n_2}$ mit $M_{n_1^* n_2} A_x^{(2)} \supset A$ gibt es eine von kleinstem Index n_2^* usf.; ist dann $[y^*, z^*] = \underset{k}{D} [y_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*}, z_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*}]$, so ist offenbar $(x, y^*) \varepsilon A^{(m)}$.

42·6·4. *Ist E ein separabler Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern $\supset A$ ist, so gibt es eine $\mathfrak{B}_3$-Menge A in $E \times \overline{R}_1$, für die $A^{(m)}$ nicht analytisch in $E \times \overline{R}_1$ ist.*

Nach **40·9·2** gibt es eine analytische Menge B in E, die keine Borelsche Menge ist. Nach **42·6·3** gibt es eine $\mathfrak{B}_3$-Menge A in $E \times \overline{R}_1$, so daß

B die Projektion von $A^{(m)}$ in den Raum E ist. Dann kann $A^{(m)}$ nicht analytisch in $E \times \overline{R}_1$ sein; denn da $A^{(m)}$ nach 42·6·2 komplementär-analytisch, wäre $A^{(m)}$ sonst nach 42·1·3 eine Borelsche Menge in $E \times \overline{R}_1$, und da $A^{(m)}$ eindeutig bezüglich E, wäre nach 42·4·5 auch B eine Borelsche Menge in E, entgegen der Annahme.

Literatur: St. Mazurkiewicz, Fund. math. 10 (1927) S. 172. W. Sierpiński, Fund. math. 12 (1928) S. 211.

§ 43. Implizite Funktionen.

1. Umkehrfunktionen. Sei A eine Teilmenge des $\overline{R}_1$, sei f eine Funktion auf A und B die Wertmenge von f (§ 41, 3); dann ist auch $B \subseteq \overline{R}_1$. Ist insbesondere die Funktion f schlicht, so gibt es zu jedem $y \varepsilon B$ genau ein $x \varepsilon A$ mit $f(x) = y$; ordnet man jedem $y \varepsilon B$ dieses $x \varepsilon A$ zu, so entsteht eine schlichte Funktion auf B, deren Wertmenge A ist; sie heißt die Umkehrfunktion von f und wird mit $f^{(-1)}$ bezeichnet. Der Bereich von $f^{(-1)}$ (§ 25, 4) ist die Wertmenge von f. Die die Funktion $f^{(-1)}$ darstellende Menge (§ 35, 9) $[f^{(-1)}(\hat{y}) = \hat{x}]$ ist identisch mit der die Funktion f darstellenden Menge $[f(\hat{x}) = \hat{y}]$.

43·1·1. *Ist A abgeschlossen im $\overline{R}_1$ und f eine schlichte stetige Funktion auf A, so ist auch der Bereich B von $f^{(-1)}$ abgeschlossen und auch $f^{(-1)}$ ist stetig.*

Nach 15·2·31 ist A in sich kompakt, nach 23·3·1 ist also auch B in sich kompakt, also nach 15·2·31 abgeschlossen. Die Stetigkeit von $f^{(-1)}$ folgt aus 24·1·1.

43·1·2. *Ist A eine Borelsche Menge im $\overline{R}_1$ und f eine schlichte Bairesche Funktion auf A, so ist auch der Bereich B von $f^{(-1)}$ eine Borelsche Menge und auch $f^{(-1)}$ ist eine Bairesche Funktion.*

Nach 42·4·6 ist B eine Borelsche Menge. Sei A_z die Menge aller $x \varepsilon A$ mit $x > z$; da nach 35·3·4 $A_z \mathbin{1} f$ eine Bairesche Funktion auf A_z, ist nach 35·9·3 die die Funktion $A_z \mathbin{1} f$ darstellende Menge M_z eine Borelsche Menge in $A_z \times \overline{R}_1$. Wegen $A \varepsilon \mathfrak{B}(\overline{R}_1)$ ist auch $A_z \varepsilon \mathfrak{B}(\overline{R}_1)$, also ist A_z eine absolut Borelsche Menge, also nach 33·7·3 auch $A_z \times \overline{R}_1$, also nach 33·5·2 auch M_z. Die Menge $[f^{(-1)}(\hat{y}) > z]$ ist nun die Projektion der Menge $M_z \subseteq A_z \times \overline{R}_1$ in den Raum $\overline{R}_1$; da M_z eine separable absolut Borelsche Menge, ist also nach 42·4·5 auch $[f^{(-1)}(\hat{y}) > z]$ eine absolut Borelsche Menge, also ist nach 35·2·3 $f^{(-1)}$ eine Bairesche Funktion.

Eine Präzisierung von **43·1·2** in dem Sinne, daß die Umkehrfunktion einer $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion gleichfalls eine $\mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}$-Funktion wäre, ist nicht möglich. Vielmehr gilt:

43·1·3. *Zu jedem $\xi < \omega_1$ gibt es eine schlichte $\mathfrak{C}^{2}_{2}$-Funktion im $\overline{R}_1$, deren Wertmenge der $\overline{R}_1$ ist, und deren Umkehrfunktion $f^{(-1)} \sim \varepsilon\, \mathfrak{C}^{\xi}_{\xi}\, (\overline{R}_1)$ ist.*

Sei $\eta \geq 3$ und $\xi < \eta < \omega_1$. Nach **33·9·3** gibt es eine Menge $M' \subseteqq \overline{R}_1$, die genau eine $\mathfrak{B}^{\eta}$-Menge im $\overline{R}_1$ ist; dann ist $M'' = \overline{R}_1 - M'$ nach **33·4·2** genau eine $\mathfrak{B}_{\eta}$-Menge im $\overline{R}_1$; da jede abzählbare Menge eine $\mathfrak{B}^{2}$-Menge ist, sind M' und M'' unabzählbar; lassen wir aus M' und M'' alle rationalen Punkte und die Punkte $+\infty$, $-\infty$ weg, so sind also auch die übrigbleibenden Mengen M^*, M^{**} unabzählbar und M^* ist nach **33·4·51** genau eine $\mathfrak{B}^{\eta}$-Menge, M^{**} genau eine $\mathfrak{B}_{\eta}$-Menge im $\overline{R}_1$. Nach **42·3·2** gibt es abzählbare Teile A^*, A^{**} von M^* und M^{**}, so daß $N^* = M^* - A^*$ und $N^{**} = M^{**} - A^{**}$ schlichte stetige Bilder des R_0; dabei ist $\overline{R}_1 = N^* + N^{**} + A$, wo A eine abzählbare, die Punkte $+\infty$, $-\infty$ sowie alle rationalen Punkte des $\overline{R}_1$ enthaltende Punktmenge bedeutet, die Mengen N^*, N^{**}, A disjunkt sind, und N^* genau eine $\mathfrak{B}^{\eta}$-Menge, N^{**} genau eine $\mathfrak{B}_{\eta}$-Menge im $\overline{R}_1$ ist. — Seien I^* bzw. I^{**} die Menge aller positiven bzw. negativen irrationalen Punkte des $\overline{R}_1$; nach **24·2·12** und **24·2·2** sind I^*, I^{**} homöomorph dem R_0; also ist N^* bzw. N^{**} schlichtes stetiges Bild von I^* bzw. I^{**}; d. h. es gibt eine schlichte stetige Funktion f^* auf I^*, deren Wertmenge N^* ist, und eine schlichte stetige Funktion f^{**} auf I^{**}, deren Wertmenge N^{**} ist. Wir definieren nun eine schlichte Funktion f im $\overline{R}_1$ so, daß $I^* \mathbin{1} f = f^*$, $I^{**} \mathbin{1} f = f^{**}$, und so, daß die Wertmenge von f der $\overline{R}_1$ ist. Zu dem Zwecke setzen wir: $f(+\infty) = +\infty$, $f(-\infty) = -\infty$, und haben, da f für die irrationalen y durch $I^* \mathbin{1} f = f^*$, $I^{**} \mathbin{1} f = f^{**}$ bereits definiert ist, noch f für alle rationalen Punkte des $\overline{R}_1$ zu definieren. Seien zunächst $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ die sämtlichen n i c h t g a n z z a h l i g e n rationalen Zahlen, und sei $((x_n))$ eine Folge irrationaler Zahlen mit $x_n - r_n \to 0$; dann sei $f(r_1)$ die erste ins Intervall $\bigl(f(x_1) - 1,\, f(x_1) + 1\bigr)$ fallende Zahl r_n, und wenn die Funktionswerte $f(r_1), \ldots, f(r_{k-1})$ schon bekannt sind, so sei $f(r_k)$ die erste ins Intervall $\left(f(x_k) - \frac{1}{k},\, f(x_k) + \frac{1}{k}\right)$ fallende, von $f(r_1), \ldots, f(r_{k-1})$ verschiedene Zahl r_n. Hierdurch ist f auch für alle nicht ganzzahligen rationalen x definiert. Für die Funktionswerte $f(x)$ bei g a n z z a h l i g e m x wählen wir nun die sämtlichen, bisher noch nicht als Funktionswerte von f verwendeten Zahlen der abzählbaren Menge A (unter denen gewiß alle ganzen Zahlen vorkommen). Hierdurch ist f als s c h l i c h t e F u n k t i o n im $\overline{R}_1$ definiert, d e r e n W e r t-

menge der $\overline{R}_1$ ist. — Nun zeigen wir, daß $f \varepsilon \mathfrak{C}_2^2(R_1)$; nach **37·1·21** genügt es zu dem Zwecke, zu zeigen: f ist stetig in jedem irrationalen Punkte des R_1. Sei also $\bar{x}$ ein irrationaler Punkt des R_1, und sei etwa $\bar{x} > 0$; da $I^* 1 f = f^*$ und f^* stetig war, genügt es, zu zeigen: für jede Folge rationaler Punkte p_ν mit $p_\nu \to \bar{x}$ gilt $f(p_\nu) \to f(\bar{x})$. Nun hatten wir oben mit $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ die sämtlichen nicht ganzzahligen rationalen Punkte des R_1 bezeichnet, und $((x_n))$ war eine Folge irrationaler Punkte mit $x_n - r_n \to 0$. Ist dann $p_\nu = r_{n_\nu}$, so folgt aus $p_\nu \to \bar{x}$ auch $x_{n_\nu} \to \bar{x}$, also, da die x_{n_ν} und $\bar{x}$ irrational und $I^* 1 f = f^*$ stetig: $f(x_{n_\nu}) \to f(\bar{x})$; und da $|f(r_n) - f(x_n)| < \frac{1}{n}$ war, gilt auch $f(r_{n_\nu}) \to f(\bar{x})$, d. h. $f(p_\nu) \to f(\bar{x})$, w. z. b. w. — Nun ist nur mehr zu zeigen, daß $f^{(-1)} \sim\varepsilon\, \mathfrak{C}_\xi^\xi(R_1)$. Dazu genügt es nach **35·2·21** zu zeigen, daß $[f^{(-1)}(\hat{y}) > 0] \sim\varepsilon\, \mathfrak{B}^\xi(R_1)$. Nun ist $[f^{(-1)}(\hat{y}) > 0]$ die Menge aller Werte von $f(x)$ für $x > 0$; und da $I^* 1 f = f^*$ und N^* die Wertmenge von f^* ist, entsteht $[f^{(-1)}(\hat{y}) > 0]$ aus N^* durch Hinzufügen abzählbar vieler Punkte, ist also nach **33·4·51** ebenso wie N^* genau eine $\mathfrak{B}^\eta$-Menge im $\overline{R}_1$; wegen $\eta > \xi$ ist also $[f^{(-1)}(\hat{y}) > 0] \sim\varepsilon\, \mathfrak{B}^\xi(R_1)$, w. z. b. w.

Literatur: W. Sierpiński, Fund. math. 3 (1922) S. 26.

2. **Die eine Funktion darstellende Menge.** Wir betrachten nun nochmals die in § 35, 9 eingeführte eine Funktion f darstellende Menge $[f(\hat{x}) = \hat{y}]$. Wir können nun sehen, daß die Umkehrung von **35·9·3** für $\xi > 1$ nicht gilt. Sei in der Tat f die Funktion von **43·1·3** und $f^{(-1)}$ ihre Umkehrfunktion; da $f \varepsilon \mathfrak{C}_2^2(\overline{R}_1)$, ist nach **35·9·3** die f darstellende Menge $[f(\hat{x}) = \hat{y}] \varepsilon\, \mathfrak{B}_2(\overline{R}_1 \times \overline{R}_1)$; da $[f^{(-1)}(\hat{y}) = \hat{x}] = [f(\hat{x}) = \hat{y}]$, ist also auch die $f^{(-1)}$ darstellende Menge eine $\mathfrak{B}_2$-Menge in $\overline{R}_1 \times \overline{R}_1$, aber es gilt, wenn $\xi \geq 2$, nicht $f^{(-1)} \varepsilon\, \mathfrak{C}_2^2(\overline{R}_1)$. — Wohl aber gilt:

43·2·1. *Ist f eine Funktion auf der separablen, absolut analytischen Menge E, und ist $[f(\hat{x}) = \hat{y}]$ eine analytische Menge in $E \times \overline{R}_1$, so ist f eine Bairesche Funktion in E.*

Sei $M = [f(\hat{x}) = \hat{y}]$, M_z die Menge aller $(x, y) \varepsilon M$ mit $y > z$ und M'_z die Menge aller $(x, y) \varepsilon M$ mit $y \leq z$. Als Durchschnitt von M und der in $E \times \overline{R}_1$ offenen (bzw. abgeschlossenen) Menge aller $(x, y) \varepsilon E \times \overline{R}_1$ mit $y > z$ (bzw. mit $y \leq z$) ist M_z (bzw. M'_z) analytisch in $E \times \overline{R}_1$; da $E \times \overline{R}_1$ nach **40·7·3** absolut analytisch, sind also nach **40·4·31** auch M_z und M'_z absolut analytisch. Da die Projektionen von M_z und M'_z in den Raum E die Mengen $[f(\hat{x}) > z]$ und $[f(\hat{x}) \leq z]$ sind, sind diese Mengen nach **40·6·1**

absolut analytisch. Da $E = [f(\hat{x}) > z] + [f(\hat{x}) \leq z]$, sind also nach **42·1·21** $[f(\hat{x}) > z]$ und $[f(\hat{x}) \leq z]$ Borelsche Mengen in E, also ist nach **35·2·3** f eine Bairesche Funktion in E.

43·2·2. *Ist E separabel und absolut analytisch, und ist M eine in $E \times \bar{R}_1$ analytische Menge, in der es zu jedem $x \varepsilon E$ genau einen Punkt $(x, y) \varepsilon M$ gibt, so ist M eine Borelsche Menge in $E \times \bar{R}_1$.*

Durch die Menge M ist eine Funktion auf E definiert, für die $[f(\hat{x}) = \hat{y}] = M$ ist; nach **43·2·1** ist f eine Bairesche Funktion auf E, nach **35·9·3** ist also M eine Borelsche Menge in $E \times \bar{R}_1$.

43·2·3. *Ist E separabel und absolut analytisch, und ist A eine bezüglich E eindeutige analytische Menge in $E \times \bar{R}_1$, so gibt es eine Bairesche Funktion f in E, so daß, wenn B die Projektion von A in den Raum E bedeutet: $[B \,1\, f(\hat{x}) = \hat{y}] = A$.*

Nach **40·4·2** ist A auch analytisch in $B \times \bar{R}_1$; nach **40·6·1** ist B absolut analytisch. Ordnen wir jedem $x \varepsilon B$ das einzige $y \varepsilon \bar{R}_1$ mit $(x, y) \varepsilon A$ zu, so entsteht eine Funktion g auf B, die nach **43·2·1** eine Bairesche Funktion auf B ist. Nach **35·3·4** gibt es eine Bairesche Funktion f auf E, so daß $B \,1\, f = g$; dann ist $[B \,1\, f(\hat{x}) = \hat{y}] = A$.

Ist A eine bezüglich E eindeutige komplementär-analytische Menge in $E \times \bar{R}_1$, so gilt ein analoger Satz nicht: Sei E ein separabler Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern $\supset A$ ist; dann gibt es nach **40·9·2** eine analytische Menge B in E, die keine Borelsche Menge ist; nach **42·6·3** gibt es eine Borelsche Menge C in $E \times \bar{R}_1$, so daß B die Projektion von $C^{(m)}$ in den Raum E. Die Menge $C^{(m)}$ ist eindeutig bezüglich E und nach **42·6·2** komplementär-analytisch in $E \times \bar{R}_1$. Gäbe es nun eine Bairesche Funktion f in E, so daß $[B \,1\, f(\hat{x}) = \hat{y}] = C^{(m)}$, so wäre nach **35·9·3** $[f(\hat{x}) = \hat{y}]$ eine Borelsche, also auch eine analytische Menge in $E \times \bar{R}_1$; und da nach **40·7·2** $B \times \bar{R}_1$ analytisch in $E \times \bar{R}_1$ ist, wäre auch $C^{(m)} = (B \times \bar{R}_1) \,.\, [f(\hat{x}) = \hat{y}]$ analytisch in $E \times \bar{R}_1$, also nach **42·1·31** auch eine Borelsche Menge in $E \times \bar{R}_1$, und da nach **20·2·71** $E \times \bar{R}_1$ eine Youngsche, also absolut Borelsche Menge, wäre nach **33·5·2** auch $C^{(m)}$ eine absolut Borelsche Menge; also wäre nach **42·4·5** B eine Borelsche Menge in E, entgegen der Annahme.

Sind B und C Mengen in $E \times \bar{R}_1$, so bezeichnen wir als den unter C gelegenen Teil von B, in Zeichen: $B \,u\, C$, die Menge aller Punkte $(x, y) \varepsilon B$, zu denen es einen Punkt $(x', y') \varepsilon C$ mit $x' = x$, $y' > y$ gibt.

43·2·4. *Ist E separabel und vollständig, sind B und C analytische (bzw. Borelsche) Mengen in $E \times \overline{R}_1$ und ist C eindeutig bezüglich E, so ist $B\,u\,C$ eine analytische (bzw. Borelsche) Menge in $E \times \overline{R}_1$.*

Sei C' die Projektion von C in den Raum E; nach **40·6·11** (bzw. **42·4·5**) ist C' eine analytische (bzw. Borelsche) Menge in E; also ist nach **40·7·2** (bzw. **38·7·2**) $C' \times \overline{R}_1$ eine analytische (bzw. Borelsche) Menge in $E \times \overline{R}_1$. Nach **43·2·3** gibt es eine Bairesche Funktion f in E, so daß $[C'\,1\,f(\hat{x}) = \hat{y}] = C$; nach **35·9·2** ist $[f(\hat{x}) > \hat{y}]$ eine Borelsche Menge in $E \times \overline{R}_1$. Da $B\,u\,C = B\,.\,(C' \times \overline{R}_1)\,.\,[f(\hat{x}) > \hat{y}]$, folgt die Behauptung.

3. Implizite Funktionen. Wir setzen $\overline{R}_2 = \overline{R}_1 \times \overline{R}_1$, allgemein für $n \geq 1$: $\overline{R}_{n+1} = \overline{R}_n \times \overline{R}_1$; dann haben die Punkte des Raumes $\overline{R}_n$ die Gestalt $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ mit $y_i \varepsilon \overline{R}_1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Sei nun E ein metrischer Raum; wir betrachten den Raum $E \times \overline{R}_n$; seine Punkte haben die Gestalt $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ mit $x \varepsilon E$, $y_i \varepsilon \overline{R}_1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Seien $f_j(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ Bairesche Funktionen auf $E \times \overline{R}_n$. Wir betrachten das System der m Gleichungen:

$$f_j(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m)\,. \tag{3}$$

Setzen wir $f = |f_1| + |f_2| + \cdots + |f_m|$, so ist nach **35·1·6** und **30·5·1** auch f eine Bairesche Funktion auf $E \times \overline{R}_n$, und das System (3) ist völlig äquivalent der einen Gleichung:

$$f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0\,. \tag{3·1}$$

Wir beschränken also die Allgemeinheit in keiner Weise, wenn wir statt des Gleichungssystems (3) eine einzige Gleichung (3·1) betrachten.

43·3·1. *Ist f eine Bairesche Funktion auf $E \times \overline{R}_n$, so ist die Menge M aller der Gleichung* (3·1) *genügenden Punkte von $E \times \overline{R}_n$ eine Borelsche Menge in $E \times \overline{R}_n$.*

Setzen wir $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = u$, so ist M die Menge aller $u \varepsilon E \times \overline{R}_n$ mit $f(u) = 0$; die Behauptung folgt also aus **35·2·31**.

Wir sagen: im Punkte $x^* \varepsilon E$ ist y_j durch die Gleichung (3·1) **eindeutig definiert**, wenn es mindestens einen dieser Gleichung genügenden Punkt $(x^*, y_1, y_2, \ldots, y_n) \varepsilon E \times \overline{R}_n$ gibt, und wenn für je zwei dieser Gleichung genügende Punkte $(x^*, y_1', y_2', \ldots, y_n')$, $(x^*, y_1'', y_2'', \ldots, y_n'')$ gilt: $y_j' = y_j''$. Sei C_j die Menge aller $x \varepsilon E$, in denen y_j durch (3·1) eindeutig definiert ist; ist $C_j \supset A$ und ordnen wir jedem $x \varepsilon C_j$ den durch (3·1) definierten

Wert von y_j zu, so entsteht eine Funktion $y_j(x)$ auf C_j, die wir die durch (3·1) definierte implizite Funktion $y_j(x)$ nennen; die Menge C_j heißt dann der Bereich der impliziten Funktion $y_j(x)$.

43·3·2. *Ist E separabel und vollständig, und ist f eine Bairesche Funktion auf $E \times \overline{R}_n$, so ist der Bereich C_j der durch* (3·1) *definierten impliziten Funktion $y_j(x)$ Differenz zweier analytischer Mengen in E.*

Sei M die Menge aller der Gleichung (3·1) genügenden Punkte $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \varepsilon E \times \overline{R}_n$ und M' die Projektion von M in den Raum $E \times \overline{R}_1$ der Punkte (x, y_j); nach **43·3·1** ist M eine Borelsche Menge in $E \times \overline{R}_n = (E \times \overline{R}_1) \times \overline{R}_{n-1}$, also eine separable absolut analytische Menge; also ist nach **40·6·1** M' eine separable absolut analytische Menge $\subseteqq E \times \overline{R}_1$; bezeichnen wir noch mit M'' die Projektion von M' in den Raum E, so ist also auch M'' absolut analytisch. Nach **41·4·7** ist nun die Menge N aller $x \varepsilon M''$, die bei der Projektion von M' in den Raum E mindestens zwei Urbilder in M' haben, absolut analytisch. Da offenbar $C_j = M'' - N$, ist die Behauptung bewiesen.

Wir sagen: y_j ist durch (3·1) durchweg eindeutig definiert, wenn y_j für jedes $x^* \varepsilon E$, zu dem es überhaupt einen der Gleichung (3·1) genügenden Punkt $(x^*, y_1, y_2, \ldots, y_n) \varepsilon E \times \overline{R}_n$ gibt, eindeutig definiert ist.

43·3·3. *Ist E separabel und vollständig, ist f eine Bairesche Funktion auf $E \times \overline{R}_n$, und ist y_j durch die Gleichung* (3·1) *durchweg eindeutig definiert, so ist der Bereich C_j der durch* (3·1) *definierten impliziten Funktion $y_j(x)$ eine analytische Menge in E, und $y_j(x)$ ist eine Bairesche Funktion auf C_j.*

Ist M die Menge aller der Gleichung (3·1) genügenden Punkte von $E \times \overline{R}_n$, so ist C_j die Projektion von M in den Raum E; da M nach **43·3·1** eine Borelsche Menge in $E \times \overline{R}_n$, also eine separable, absolut analytische Menge ist, so ist C_j nach **40·6·1** eine separable, absolut analytische Menge. — Die die Funktion $y_j(x)$ darstellende Menge $[y_j(\acute{x}) = \acute{y}]$ ist offenbar die Projektion von M in den Raum $E \times \overline{R}_1$ der Punkte (x, y_j); sie ist also nach **40·6·1** eine absolut analytische Menge, also auch eine analytische Menge in $C_j \times R_1$, mithin ist $y_j(x)$ nach **43·2·1** eine Bairesche Funktion auf C_j.

43·3·4. *Ist E separabel und vollständig, ist f eine Bairesche Funktion auf $E \times \overline{R}_n$, und gibt es zu jedem $x \varepsilon E$ höchstens einen der Gleichung* (3·1) *genügenden Punkt $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \varepsilon E \times \overline{R}_n$, so ist der Bereich C der n durch* (3·1) *definierten impliziten Funktionen $y_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ eine Borelsche Menge in E, und jede dieser Funktionen ist eine Bairesche Funktion auf C.*

Sei M die Menge aller der Gleichung (3·1) genügenden Punkte von $E \times \bar{R}_n$ und M' die Projektion von M in den Raum E; für den Bereich C_j von $y_j(x)$ gilt dann: $C_j = M'$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Da nach 43·3·1 M eine Borelsche Menge in $E \times \bar{R}_n$, also eine separable, absolut Borelsche Menge, und da es zu jedem $x \varepsilon M'$ genau ein $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \varepsilon M$ gibt, ist aber M' nach 42·4·5 eine Borelsche Menge in E. — Daß die $y_j(x)$ Bairesche Funktionen auf $C = M'$ sind, ist in 43·3·3 enthalten.

Literatur: H. Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 192. N. Lusin, Leç. s. l. ensembles analytiques S. 222. P. Novikoff, Fund. math. 17 (1931) S. 8.

§ 44. Lusinsche Siebe.

1. **Abzählbare Siebe.** Seien E und K beliebige Mengen, und $\mathfrak{M}$ ein System von Teilen der Menge E; jedem $k \varepsilon K$ sei eine Menge $M^k \varepsilon \mathfrak{M}$ zugeordnet. Wir bezeichnen das System[1] $\mathfrak{L}$ aller M^k $(k \varepsilon K)$ als Lusinsches Sieb in $\mathfrak{M}$, wenn jeder Menge M^k $(k \varepsilon K)$ eine reelle Zahl $y(M^k)$ zugeordnet ist, und zwar so, daß für $k \neq k'$ auch $y(M^k) \neq y(M^{k'})$ ist; die Zahl $y(M^k)$ nennen wir die Höhe von M^k. Ist K abzählbar, so nennen wir $\mathfrak{L}$ ein abzählbares Sieb. Ist das System der Mengen M^k von $\mathfrak{L}$ bei Ordnung nach wachsender Höhe wohlgeordnet, so heißt das Sieb $\mathfrak{L}$ wohlgeordnet.

Die Menge aller $x \varepsilon E$, die einer Mengenfolge $((M^{k_n}))$ aus $\mathfrak{L}$ mit abnehmenden Höhen $\left(y(M^{k_{n+1}}) < y(M^{k_n})\right)$ angehören, bezeichnen wir als die durch das Sieb $\mathfrak{L}$ erzeugte Menge; wegen 7·1·4 kann das auch so ausgesprochen werden: damit ein Punkt $x \varepsilon E$ zu der durch $\mathfrak{L}$ erzeugten Menge gehöre, ist notwendig und hinreichend, daß die Menge aller $M^k \varepsilon \mathfrak{L}$ mit $x \varepsilon M^k$ (bei Ordnung nach wachsender Höhe) nicht wohlgeordnet sei. Ist das Sieb $\mathfrak{L}$ wohlgeordnet, so ist also die durch $\mathfrak{L}$ erzeugte Menge $= \Lambda$.

Zwei Siebe heißen äquivalent, wenn sie dieselbe Menge erzeugen. Entsteht das Sieb $\mathfrak{L}'$ aus $\mathfrak{L}$ durch Weglassen eines (bei Ordnung nach wachsender Höhe) wohlgeordneten Teilsystemes, so sind $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ äquivalent.

Das Sieb $\mathfrak{L} \supset \Lambda$ heißt regulär, wenn es in ihm keine Menge kleinster Höhe gibt, oder — was dasselbe heißt — wenn es zu jeder Menge $M^{k^*} \varepsilon \mathfrak{L}$ unendlich viele $M^k \varepsilon \mathfrak{L}$ mit $y(M^k) < y(M^{k^*})$ gibt.

44·1·1. *Zu jedem nicht wohlgeordneten Siebe $\mathfrak{L}$ gibt es ein äquivalentes reguläres Sieb $\mathfrak{L}'$.*

---

[1] Zwei zu verschiedenen k gehörige Mengen M^k gelten im folgenden als verschieden, auch wenn sie aus denselben Elementen bestehen.

Sei $\mathfrak{L}_z$ das System aller $M^k \varepsilon\, \mathfrak{L}$ mit $y(M^k) \leq z$. Ist $\mathfrak{L}$ nicht regulär, so gibt es Zahlen z, für die $\mathfrak{L}_z$ (bei Ordnung nach wachsender Höhe) wohlgeordnet ist; sei z_0 das Supremum dieser z; da $\mathfrak{L}$ nicht wohlgeordnet, ist $z_0 < +\infty$; offenbar ist $\mathfrak{L}_{z_0}$ wohlgeordnet, also sind $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L} - \mathfrak{L}_{z_0}$ und $\mathfrak{L}$ äquivalent und es ist $\mathfrak{L}' \supset A$. Sei $M^{k'} \varepsilon\, \mathfrak{L}'$; dann gibt es unendlich viele $M^k \varepsilon\, \mathfrak{L}'$ mit $y(M^k) < y(M^{k'})$; denn gäbe es nur endlich viele, so wäre das System aller $M^k \varepsilon\, \mathfrak{L}$ mit $y(M^k) \leq y(M^{k'})$ wohlgeordnet, was wegen $y(M^{k'}) > z_0$ unmöglich ist; also ist $\mathfrak{L}'$ regulär.

44·1·2. *Jede durch ein abzählbares reguläres Sieb $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{M}$ erzeugte Menge ist eine analytische Menge über $\mathfrak{M}$.*

Wir konstruieren aus $\mathfrak{L}$ ein Suslinsches Schema $\mathfrak{S}$ in folgender Weise. Die Mengen M_{n_1} erster Stufe von $\mathfrak{S}$ seien die sämtlichen abzählbar vielen Mengen $M^k\,(k \varepsilon K)$ von $\mathfrak{L}$; die Nachfolger $M_{n_1 n_2}$ der Menge M_{n_1} erster Stufe seien die sämtlichen Mengen von $\mathfrak{L}$, deren Höhen $< y(M_{n_1})$ sind; die Nachfolger $M_{n_1 n_2 n_3}$ der Menge zweiter Stufe $M_{n_1 n_2}$ seien die sämtlichen Mengen von $\mathfrak{L}$, deren Höhen $< y(M_{n_1 n_2})$ sind usf. Dann ist offenbar die durch das Sieb $\mathfrak{L}$ erzeugte Menge identisch mit dem Kerne $A(\mathfrak{S})$ des Suslinschen Schemas $\mathfrak{S}$.

Hiervon gilt folgende Umkehrung:

44·1·3. *Ist $\mathfrak{M}$ ein Ring, so wird jede analytische Menge A über $\mathfrak{M}$ erzeugt durch ein abzählbares reguläres Sieb in $\mathfrak{M}$.*

Nach 40·1·2 gibt es ein monotones Suslinsches Schema $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{M}$, bestehend aus den Mengen $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, so daß $A = A(\mathfrak{S})$. Sei $[y'_{n_1}, y_{n_1}]$ $(n_1 = 1, 2, \ldots)$ eine Folge disjunkter Intervalle des R_1 mit $y_{n_1} < y_{n_1-1}$; sei $[y'_{n_1 n_2}, y_{n_1 n_2}]$ $(n_2 = 1, 2, \ldots)$ eine Folge disjunkter Intervalle aus $[y'_{n_1}, y_{n_1}]$ mit $y_{n_1 n_2} < y_{n_1 n_2+1}$; sei $[y'_{n_1 n_2 n_3}, y_{n_1 n_2 n_3}]$ $(n_3 = 1, 2, \ldots)$ eine Folge disjunkter Intervalle aus $[y'_{n_1 n_2}, y_{n_1 n_2}]$ mit $y_{n_1 n_2 n_3} < y_{n_1 n_2 n_3+1}$ usf. Setzen wir $y(M_{n_1 n_2 \ldots n_k}) = y_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, so wird aus dem Suslinschen Schema $\mathfrak{S}$ ein reguläres abzählbares Sieb $\mathfrak{L}$. Sei A' die durch das Sieb $\mathfrak{L}$ erzeugte Menge; wir zeigen, daß $A' = A$. — Sei $a \varepsilon A$; dann gibt es eine Indizesfolge $((n_k))$, so daß $a \varepsilon M_{n_1} \,.\, M_{n_1 n_2} \,.\, \ldots \,.\, M_{n_1 n_2 \ldots n_k} \,.\, \ldots$; da $y(M_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}}) < y(M_{n_1 n_2 \ldots n_k})$, ist auch $a \varepsilon A'$. Sei umgekehrt $a \varepsilon A'$; dann gibt es in $\mathfrak{L}$ eine Mengenfolge $((M'_\nu))$ mit abnehmenden Höhen $y(M'_\nu)$, so daß $a \varepsilon M'_\nu$ für alle ν; jede Menge M'_ν ist eine der Mengen $M_{n_1 n_2 \ldots n_k} \varepsilon\, \mathfrak{S}$, sie habe die Indizes $n^\nu_1, n^\nu_2, \ldots, n^\nu_{k_\nu}$; wegen $y(M'_{\nu+1}) < y(M'_\nu)$ ist $n_1^{\nu+1} \leq n_1^\nu$, fast alle n_1^ν haben also denselben Wert n_1^*; ebenso haben fast alle n_2^ν denselben Wert n_2^* usf.; da $\mathfrak{S}$ monoton, ist dann $a \varepsilon M_{n_1^*}$, $a \varepsilon M_{n_1^* n_2^*}$ usf.; es ist also $a \varepsilon M_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*}$ für alle k, d. h. es ist $a \varepsilon A$.

Literatur: N. Lusin, Fund. math. 10 (1927) S. 1. W. Sierpiński, Fund. math. 11 (1928) S. 16. C. Kuratowski u. E. Szpilrajn, Fund. math. 18 (1932) S. 160.

2. **Analytische Siebe.** Sei nun insbesondere E ein metrischer Raum, B eine beliebige Punktmenge in $E \times R_1$; die sämtlichen Schichten $B_y^{(1)}$ $(y \varepsilon R_1)$ von B bilden, wenn y als die Höhe von $B_y^{(1)}$ betrachtet wird, ein Lusinsches Sieb $\mathfrak{L}(B)$, das wir als das durch die Menge B gelieferte Sieb bezeichnen. Die durch das Sieb $\mathfrak{L}(B)$ erzeugte Punktmenge $A \subseteqq E$ heißt die durch B gesiebte Menge; sie besteht aus allen $x \varepsilon E$, zu denen es in B eine Folge von Punkten (x, y_n) mit $y_1 > y_2 > \ldots > y_n > \ldots$ gibt. Ist $B \subseteqq B'$ und A die durch B gesiebte, A' die durch B' gesiebte Menge, so ist $A \subseteqq A'$.

Ist B eine analytische, bzw. Borelsche, bzw. abgeschlossene Menge in $E \times R_1$, so nennen wir das Sieb $\mathfrak{L}(B)$ ein analytisches, bzw. Borelsches, bzw. abgeschlossenes Sieb in E.

44·2·1. *Ist E separabel und vollständig, so ist die durch ein analytisches Sieb $\mathfrak{L}(B)$ in E erzeugte Menge A analytisch in E.*

Da $E \times R_1$ separabel und vollständig, gibt es nach 40·5·4 eine eindeutige stetige Abbildung Q des R_0 auf $E \times R_1$. Nach 33·8·1 gibt es eine Folge eindeutiger stetiger Abbildungen P_n des R_0 auf sich selbst, so daß zu jeder Punktfolge $((t_n))$ des R_0 ein $t \varepsilon R_0$ mit $P_n(t) = t_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gehört; wir setzen $Q_n = P_n | Q$; dann ist auch Q_n eine eindeutige stetige Abbildung des R_0 auf $E \times R_1$. Sei $(x_n(t), y_n(t))$ $(x_n(t) \varepsilon E,\ y_n(t) \varepsilon R_1)$ der Bildpunkt $Q_n(t)$ von $t \varepsilon R_0$; wegen der Stetigkeit von Q_n ist für je zwei Indizes n, n' die Menge aller $t \varepsilon R_0$ mit $x_n(t) = x_{n'}(t)$ abgeschlossen; also ist auch die Menge F aller t mit $x_1(t) = x_2(t) = \ldots = x_n(t) = \ldots$ abgeschlossen im R_0; wegen der Stetigkeit von Q_n ist ferner die Menge aller t mit $y_n(t) < y_{n'}(t)$ offen im R_0; also ist die Menge G aller t mit $y_1(t) > y_2(t) > \ldots > y_n(t) > \ldots$ ein G_δ im R_0. Wir setzen nun $C = F \,.\, G \,.\, \underset{n}{D}\, Q_n^{-1}(B)$; da $Q_n^{-1}(B)$ nach 40·5·1 analytisch im R_0, ist also auch C analytisch im R_0. Für alle $t \varepsilon C$ ist $x_1(t) = x_2(t) = \ldots = x_n(t) = \ldots$; hierdurch ist jedem $t \varepsilon C$ ein Punkt $x(t)$ $(= x_1(t) = x_2(t) = \ldots)$ von E zugeordnet; die so definierte Abbildung Q^* von C ist eindeutig und wegen der Stetigkeit der Q_n stetig. Wir zeigen, daß $A = Q^*(C)$. Sei $t \varepsilon C$; wegen $C \subseteqq Q_n^{-1}(B)$ ist dann $Q_n(t) \varepsilon B$, d. h. $(x(t), y_n(t)) \varepsilon B$, und wegen $C \subseteqq G$ ist $y_1(t) > y_2(t) > \ldots > y_n(t) > \ldots$; somit ist $x(t) \varepsilon A$; damit ist gezeigt, daß $Q^*(C) \subseteqq A$. Sei nun umgekehrt $x \varepsilon A$; dann gibt es in B eine Folge von Punkten $b_n = (x, y_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mit $y_1 > y_2 > \ldots > y_n > \ldots$; sei $t_n \varepsilon Q^{-1}(b_n)$; nach Definition der P_n gibt es ein $t \varepsilon R_0$, so daß $P_n(t) = t_n$ für alle n; dann ist $Q_n(t) = b_n$; mithin ist $t \varepsilon \underset{n}{D}\, Q_n^{-1}(B)$; wegen $x_n(t) = x$, $y_n(t) = y_n$ ist ferner $x_1(t) = x_2(t) = \ldots = x_n(t) = \ldots$ und $y_1(t) > y_2(t) > \ldots y_n(t) > \ldots$, also ist $t \varepsilon F \,.\, G$; somit ist $t \varepsilon C$; und wegen $x_1(t) = x_2(t) = \ldots = x_n(t)$

$= \ldots = x$ ist $x(t) = x$, d. h. $x \varepsilon Q^*(C)$; damit ist gezeigt, daß auch $A \subseteq Q^*(C)$. Also ist $A = Q^*(C)$, w. z. b. w. — Da Q^* eindeutig und stetig und C analytisch im R_0, also separabel und absolut analytisch, ist nach **40·5·5** auch A absolut analytisch.

Die Umkehrung von **44·2·1** ist in den Sätzen **44·3·1, 44·3·11** enthalten.

Literatur: N. Lusin, Leç. s. l. ensembles analytiques S. 180.

3. Spezielle Borelsche Siebe. Ist $\mathfrak{L}(B)$ ein Borelsches Sieb in E, und ist jede Schicht $B_x^{(2)}$ $(x \varepsilon E)$ von B abzählbar, so nennen wir $\mathfrak{L}(B)$ ein spezielles Borelsches Sieb in E.

44·3·1. *Jede analytische Menge A des metrischen Raumes E wird erzeugt durch ein spezielles Borelsches Sieb in E.*

Sei $\mathfrak{S}$ ein monotones, aus in E abgeschlossenen Mengen $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ bestehendes Suslinsches Schema mit $A(\mathfrak{S}) = A$. Ordnen wir der Menge $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ wie beim Beweise von **44·1·3** die Zahl $y_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ zu und ist $F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ die Menge aller $(x, y) \varepsilon E \times R_1$ mit $x \varepsilon M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, $y = y_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, so ist $F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ abgeschlossen in $E \times R_1$; die Summe B aller $F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots; n_1, n_2, \ldots, n_k = 1, 2, \ldots)$ ist also ein F_σ in $E \times R_1$; somit ist $\mathfrak{L}(B)$ ein spezielles Borelsches Sieb in E, und die durch $\mathfrak{L}(B)$ erzeugte Menge ist, wie beim Beweise von **44·1·3** gezeigt, die Menge A.

44·3·11. *Jede analytische Menge A des metrischen Raumes E wird erzeugt durch ein abgeschlossenes Sieb in E.*

Sei B die im Beweise von **44·3·1** definierte Menge, B^0 ihre abgeschlossene Hülle, und A' die durch $\mathfrak{L}(B^0)$ erzeugte Menge; wir werden zeigen, daß $A = A'$. Da A die durch $\mathfrak{L}(B)$ erzeugte Menge und $B \subseteq B^0$, ist $A \subseteq A'$; es ist also nur mehr zu zeigen, daß $A' \subseteq A$, d. h. wir haben zu zeigen: ist (x, y_ν) $(\nu = 1, 2, \ldots)$ eine Folge von Punkten aus B^0 mit $y_1 > y_2 > \ldots > y_\nu > \ldots$, so ist $x \varepsilon A$. Da $(x, y_\nu) \varepsilon B^0$ gibt es in B eine Folge von Punkten (x'_ν, y'_ν) $(\nu = 1, 2, \ldots)$, so daß $y'_1 > y'_2 > \ldots > y'_\nu > \ldots$ und $x'_\nu \to x$. Jeder Punkt (x'_ν, y'_ν) gehört zu einer der Mengen $F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, sie habe die Indizes $n_1^\nu, n_2^\nu, \ldots, n_{k_\nu}^\nu$; wegen $y_{\nu+1} < y_\nu$ ist auch $n_1^{\nu+1} \leq n_1^\nu$, fast alle n_1^ν haben also denselben Wert n_1^*; ebenso haben fast alle n_2^ν denselben Wert n_2^* usf. Da das Suslinsche Schema der Mengen $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ monoton war, ist also $x'_\nu \varepsilon M_{n_1^*}$ für fast alle ν, $x'_\nu \varepsilon M_{n_1^* n_2^*}$ für fast alle ν usf. Da die Mengen $M_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ abgeschlossen und $x'_\nu \to x$, ist also $x \varepsilon M_{n_1^*}$, $x \varepsilon M_{n_1^* n_2^*}$ usf.; es ist also $x \varepsilon M_{n_1^*} M_{n_1^* n_2^*} \ldots M_{n_1^* n_2^* \ldots n_k^*} \ldots$, d. h. es ist $x \varepsilon A$, w. z. b. w.

Sei B irgendeine Menge $\subseteqq E \times R_1$ und A die durch das Sieb $\mathfrak{L}(B)$ erzeugte Menge. Ist dann $x \varepsilon E - A$, so gibt es in der Schicht $B_x^{(2)}$ von B keine Punktfolge (x, y_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ mit $y_1 > y_2 > \ldots > y_n > \ldots$; d. h. die Menge $B_x^{(2)}$ ist, nach wachsenden y geordnet, wohlgeordnet; ihre Ordinalzahl bezeichnen wir mit ξ_x; wegen $B_x^{(2)} \subseteqq R_1$ ist nach 8·4·3 $\xi_x < \omega_1$. — Sei nun $M \subseteqq E - A$; gibt es ein $\xi^* < \omega_1$, so daß $\xi_x \leq \xi^*$ für alle $x \varepsilon M$, so heißt die Menge B (das Sieb $\mathfrak{L}(B)$) limitiert auf M. Eine auf $E - A$ limitierte Menge B (ein auf $E - A$ limitiertes Sieb $\mathfrak{L}(B)$) heiße limitiert.

Wir bezeichnen im folgenden mit $I_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ die Menge aller Punkte $((n_\iota))$ des R_0, deren erste k Stellen die Werte $n_1, n_2, \ldots, n_k$ haben. Ferner bezeichnen wir, wenn $A \subseteqq E$, $B \subseteqq E \times R_1$, als den sich nach A projizierenden Teil von B, in Zeichen $B\,p\,A$, die Menge aller $(x, y) \varepsilon B$, für die $x \varepsilon A$. Ist A eine Borelsche Menge in E und B eine Borelsche Menge in $E \times R_1$, so ist auch $B\,p\,A$ eine Borelsche Menge in $E \times R_1$, denn nach 33·7·2 ist $A \times R_1$ eine Borelsche Menge in $E \times R_1$, und $B\,p\,A = B \,.\, (A \times R_1)$.

44·3·2. *Ist E separabel und vollständig, $\mathfrak{L}(B)$ ein spezielles Borelsches Sieb in E und A die durch $\mathfrak{L}(B)$ erzeugte Menge, so ist $\mathfrak{L}(B)$ limitiert auf jeder zu A fremden analytischen Menge M in E.*

Wir nehmen an, $\mathfrak{L}(B)$ sei nicht limitiert auf M, und leiten daraus einen Widerspruch her. Nach 42·5·4 ist $B = \underset{\nu}{S}\, B_\nu$, wo die B_ν bezüglich E eindeutige Borelsche Mengen in $E \times R_1$ bedeuten; ist dann $B\,u\,B_\nu$ der unter B_ν liegende Teil von B (§ 43, 2), so gibt es, da B nicht limitiert auf M, nach 8·4·1 einen Index ν_1, so daß auch $B\,u\,B_{\nu_1}$ nicht limitiert auf M; dann ist B_{ν_1} unabzählbar. Nach 40·5·4 gibt es eine eindeutige stetige Abbildung P des R_0 auf M, und nach 42·3·2 gibt es eine schlichte stetige Abbildung P_1 des R_0 auf eine Menge $B^{(1)} \subseteqq B_{\nu_1}$, so daß $B_{\nu_1} - B^{(1)}$ abzählbar; dann ist auch $B\,u\,B^{(1)}$ nicht limitiert auf M; und da $M = P(R_0) = \underset{n_1}{S}\, P(I_{n_1})$, $B^{(1)} = P_1(R_0) = \underset{n_1'}{S}\, P_1(I_{n_1'})$, also:

$$(B\,u\,B^{(1)})\,p\,M = \underset{n_1,\, n_1'}{S}\, (B\,u\,P_1(I_{n_1'}))\,p\,P(I_{n_1}),$$

gibt es zwei Indizes n_1, n_1', so daß $B\,u\,P_1(I_{n_1'})$ nicht limitiert auf $P(I_{n_1})$. Da nach 42·3·3 $P_1(I_{n_1'})$ eine Borelsche Menge, ist nach 43·2·4 auch $B\,u\,P_1(I_{n_1'})$ eine Borelsche Menge in $E \times R_1$. Nach 42·5·4 ist $B\,u\,P_1(I_{n_1'}) = \underset{\nu}{S}\, B_\nu^{(1)}$, wo die $B_\nu^{(1)}$ bezüglich E eindeutige Borelsche Mengen bedeuten; da $B\,u\,P_1(I_{n_1'})$ nicht limitiert auf $P(I_{n_1})$ ist, gibt es einen Index ν_2, so daß auch $B\,u\,B_{\nu_2}^{(1)}$ nicht limitiert auf $P(I_{n_1})$ ist. Nach 42·3·2 gibt es eine schlichte stetige Abbildung P_2 des R_0 auf eine Menge $B^{(2)} \subseteqq B_{\nu_2}^{(1)}$, so daß

$B^{(1)}_{\nu_1} - B^{(2)}$ abzählbar; dann ist $B^{(2)} \subseteqq B\,u\,B^{(1)}$ und es ist auch $B\,u\,B^{(2)}$ nicht limitiert auf $P(I_{n_1})$; wegen:

$$P(I_{n_1}) = \underset{n_2}{S} P(I_{n_1 n_2}),\ B^{(2)} = P_2(R_0) = \underset{n_1'',\, n_2''}{S} P_2(I_{n_1'' n_2''})$$

ist:

$$(B\,u\,B^{(2)})\,p\,P(I_{n_1}) = \underset{n_2,\, n_1'',\, n_2''}{S} (B\,u\,P_2(I_{n_1'' n_2''}))\,p\,P(I_{n_1 n_2});$$

wegen $P_2(I_{n_1'' n_2''}) \subseteqq B^{(2)} \subseteqq B\,u\,P_1(I_{n_1'})$ ist auch:

$$B\,u\,P_2(I_{n_1'' n_2''}) \subseteqq B\,u\,P_1(I_{n_1'}) \left(= \underset{n_2'}{S} B\,u\,P_1(I_{n_1' n_2'})\right),$$

also:

$$B\,u\,P_2(I_{n_1'' n_2''}) = \underset{n_2'}{S} \left(B\,u\,P_1(I_{n_1' n_2'}).\ \ B\,u\,P_2(I_{n_1'' n_2''})\right),$$

mithin:

$$(B\,u\,B^{(2)})\,p\,P(I_{n_1}) = \underset{n_2,\, n_2',\, n_1'',\, n_2''}{S} (B\,u\,P_1(I_{n_1' n_2'}) . B\,u\,P_2(I_{n_1'' n_2''}))\,p\,P(I_{n_1 n_2}),$$

und da $B\,u\,B^{(2)}$ nicht limitiert auf $P(I_{n_1})$, gibt es Indizes n_2, n_2', n_1'', n_2'', so daß $B\,u\,P_1(I_{n_1' n_2'}) . B\,u\,P_2(I_{n_1'' n_2''})$ nicht limitiert auf $P(I_{n_1 n_2})$. Indem wir so weiter schließen, erhalten wir eine Folge schlichter stetiger Abbildungen $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$ des R_0 auf Mengen $B^{(i)} \subseteqq B$, die bezüglich E eindeutig sind, und für die $B^{(i+1)} \subseteqq B\,u\,B^{(i)}$ gilt, sowie Indizesfolgen $((n_k))$, $((n_k'))$, $((n_k''))$, $\ldots$, $((n_k^{(i)}))$, $\ldots$, so daß die Menge:

$$B\,u\,P_1(I_{n_1' n_2' \ldots n_k'}) . B\,u\,P_2(I_{n_1'' n_2'' \ldots n_k''}) \ldots . B\,u\,P_k(I_{n_1^{(k)} n_2^{(k)} \ldots n_k^{(k)}})$$

nicht limitiert auf $P(I_{n_1 n_2 \ldots n_k})$ ist. Sei t^* der Punkt $((n_k))$ des R_0 und t_i der Punkt $((n_k^{(i)}))$ des R_0 $(i = 1, 2, \ldots)$, ferner x^* der Punkt $P(t^*)\,\varepsilon\,M$ und (x_i^*, y_i^*) der Punkt $P_i(t_i)\,\varepsilon\,B^{(i)}$. Da $B\,u\,P_i(I_{n_1^{(i)} n_2^{(i)} \ldots n_k^{(i)}})$ für $k \geq i$ nicht limitiert auf $P(I_{n_1 n_2 \ldots n_k})$, gibt es sicher eine Folge von Punkten $(x_k, y_k)\,\varepsilon\,P_i(I_{n_1^{(i)} n_2^{(i)} \ldots n_k^{(i)}})$ mit $x_k\,\varepsilon\,P(I_{n_1 n_2 \ldots n_k})$; wegen der Stetigkeit von P gilt dann $x_k \to x^*$; da auch $(x_i^*, y_i^*)\,\varepsilon\,P_i(I_{n_1^{(i)} n_2^{(i)} \ldots n_k^{(i)}})$ für alle k, folgt aber aus der Stetigkeit von P_i auch $x_k \to x_i^*$; also ist $x_i^* = x^*$, also $P_i(t_i) = (x^*, y_i^*)$. Da $B^{(i+1)} \subseteqq B\,u\,B^{(i)}$ und $P_i(t_i)\,\varepsilon\,B^{(i)}$, ist ferner $y_{i+1}^* < y_i^*$. Wir haben somit gefunden: ist $\mathfrak{L}(B)$ nicht limitiert auf M, so gibt es in B eine Punktfolge (x^*, y_i^*) $(i = 1, 2, \ldots)$, so daß $x^*\,\varepsilon\,M$, $y_{i+1}^* < y_i^*$. Dann aber würde x^* zu der durch $\mathfrak{L}(B)$ erzeugten Menge A gehören, im Widerspruche zur Annahme $M \subseteqq E - A$.

Literatur: W. Sierpiński, Fund. math. 17 (1931), S. 77. N. Lusin, Leç. s. l. ensembles analytiques S. 183.

4. **Die Konstituenten.** Sei wieder B eine beliebige Punktmenge in $E \times R_1$ und $\mathfrak{L}(B)$ das durch sie gelieferte Sieb. Wie in § 42, 6 bezeichnen

wir die Menge aller Minimalpunkte einer Menge $M \subseteqq E \times R_1$ mit $M^{(m)}$. Wir definieren nun zu jeder Ordinalzahl ξ eine Menge B_ξ durch:

(4) $$B_0 = B; \quad B_\xi = B - \underset{\eta<\xi}{S} (B_\eta)^{(m)}.$$

Setzen wir noch $(B_\xi)^{(m)} = C_\xi$, so ist $B_{\xi+1} = B_\xi - C_\xi$. Die Projektion von C_ξ in den Raum E bezeichnen wir mit C_ξ^*. Offenbar ist $B_\xi \supseteqq B_{\xi'}$, $C_\xi^* \supseteqq C_{\xi'}^*$ für $\xi < \xi'$. Die Mengen C_ξ sind eindeutig bezüglich E; ist $x \varepsilon C_\xi^*$ und $(x, y) \varepsilon C_\xi$, $(x, y') \varepsilon B_{\xi'}$ $(\xi < \xi')$, so ist $y < y'$; insbesondere: ist $x \varepsilon C_\xi^*$, $(x, y) \varepsilon C_\xi$, $(x, y') \varepsilon C_{\xi'}$ $(\xi < \xi')$, so ist $y < y'$.

Wir setzen noch:

$$C_\xi^{**} = \underset{\eta<\xi}{D}\, C_\eta^*,$$

wobei für $\xi = 0$ zu setzen ist: $\underset{\eta<\xi}{D}\, C_\eta^* = E$; dann ist $C_\xi^* = C_{\xi-1}^{**}$ für alle ξ.

44·4·1. *Ist $x \varepsilon C_\xi^{**}$, so hat die Schicht $B_x^{(2)}$ von B die Gestalt: $B_x^{(2)} = W_\xi + (B_\xi)_x^{(2)}$, wo W_ξ, nach wachsenden y geordnet, eine wohlgeordnete Menge der Ordinalzahl ξ ist.*

Ist $x \varepsilon C_\xi^{**}$, so gibt es zu jedem $\eta < \xi$ genau einen Punkt $(x, y_\eta) \varepsilon C_\eta$, wobei $y_\eta < y_{\eta'}$ für $\eta < \eta'$ $(< \xi)$; die Menge W_ξ der Punkte y_η $(\eta < \xi)$ ist also wohlgeordnet, und hat nach 7·3·1 die Ordinalzahl ξ. Da $B_\xi = B - \underset{\eta<\xi}{S} (B_\eta)^{(m)} = B - \underset{\eta<\xi}{S}\, C_\eta$, ist $B_x^{(2)} = (B_\xi)_x^{(2)} + W_\xi$.

44·4·2. *Für $\xi \geq \omega_1$ ist $C_\xi^{**} = \Lambda$.*

Dies folgt aus 44·4·1 und 8·4·3.

Nun setzen wir: $K_\xi = C_\xi^{**} - C_{\xi+1}^{**}$. Wegen 44·4·2 ist $K_\xi = \Lambda$ für $\xi \geq \omega_1$. Die Mengen K_ξ $(\xi < \omega_1)$ heißen die Konstituenten von E bezüglich des Siebes $\mathfrak{L}(B)$. Das System der Konstituenten K_ξ $(\xi < \omega_1)$ ist disjunkt.

44·4·3. *Es ist $E = \underset{\xi<\omega_1}{S} K_\xi$.*

Denn wegen $C_0^{**} = E$ ist $E = \underset{\xi<\omega_1}{S} (C_\xi^{**} - C_{\xi+1}^{**}) + C_{\omega_1}^{**} = \underset{\xi<\omega_1}{S} K_\xi + C_{\omega_1}^{**}$; die Behauptung folgt also aus 44·4·2.

44·4·4. *Ist A die durch das Sieb $\mathfrak{L}(B)$ erzeugte Menge und $x \varepsilon K_\xi$, so ist, damit $x \varepsilon A$ sei, notwendig und hinreichend, daß $(B_\xi)_x^{(2)} \supset \Lambda$ sei.*

Notwendig: Ist $(B_\xi)_x^{(2)} = \Lambda$, so ist nach 44·4·1 $B_x^{(2)}$ wohlgeordnet, also $x \varepsilon E - A$. Hinreichend: Wegen $x \varepsilon K_\xi (= C_\xi^{**} - C_{\xi+1}^{**})$ ist $x \sim\varepsilon C_{\xi+1}^{**}$, d. h. $x \sim\varepsilon C_\xi^*$; es ist also $B_x^{(2)} C_\xi = \Lambda$, d. h. $B_x^{(2)} (B_\xi)^{(m)} = \Lambda$; ist also $(B_\xi)_x^{(2)} \supset \Lambda$, so gibt es in $(B_\xi)_x^{(2)}$ kein kleinstes y, somit ist $B_x^{(2)}$ nicht wohlgeordnet, also $x \varepsilon A$.

44·4·41. *Ist A die durch das Sieb $\mathfrak{L}(B)$ erzeugte Menge, so ist $K_\xi - A$ die Menge aller $x \varepsilon E$, für die die Schicht $B_x^{(2)}$ bei Ordnung nach wachsenden y wohlgeordnet von der Ordinalzahl ξ ist.*

Dies folgt unmittelbar aus 44·4·4 und 44·4·1.

44·4·5. *Ist E separabel und vollständig und ist $\mathfrak{L}$ (B) ein spezielles Borelsches Sieb in E, so ist B_ξ $(\xi < \omega_1)$ eine Borelsche Menge in $E \times R_1$.*

Dies folgt wegen **42·6·21** aus der Definition (4) der Mengen B_ξ durch transfinite Induktion.

44·4·51. *Ist E separabel und vollständig und ist $\mathfrak{L}$ (B) ein spezielles Borelsches Sieb in E, so ist jede Konstituente K_ξ $(\xi < \omega_1)$ eine Borelsche Menge in E.*

Wegen **44·4·5** und **42·6·21** sind die Mengen $C_\xi = (B_\xi)^{(m)}$ Borelsche Mengen in $E \times R_1$. Da C_ξ eindeutig bezüglich E, ist nach **42·4·5** auch die Projektion C_ξ^* von C_ξ in den Raum E eine Borelsche Menge in E, also auch $C_\xi^{**} = \underset{\eta<\xi}{D} C_\eta^*$, also auch $K_\xi = C_\xi^{**} - C_{\xi+1}^{**}$.

44·4·6. *Ist E separabel und vollständig, ist $\mathfrak{L}$ (B) ein spezielles Borelsches Sieb in E, ist A die durch $\mathfrak{L}$ (B) erzeugte Menge und M eine zu A fremde analytische Menge in E, so gibt es ein $\xi^* < \omega_1$, so daß $M K_\xi = \Lambda$ für $\xi > \xi^*$.*

Dies folgt aus **44·3·2** und **44·4·41.**

44·4·7. *Ist E separabel und vollständig und ist $\mathfrak{L}$ (B) ein spezielles Borelsches Sieb in E, so ist, damit die durch $\mathfrak{L}$ (B) erzeugte Menge A eine Borelsche Menge in E sei, notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{L}$ (B) limitiert sei.*

Notwendig: Ist A eine Borelsche Menge in E, so auch $E - A$; die Behauptung ist also enthalten in **44·3·2.** Hinreichend: Ist $\mathfrak{L}$ (B) limitiert, so gibt es wegen **44·4·41** ein $\xi^* < \omega_1$, so daß $K_\xi - A = \Lambda$ für $\xi > \xi^*$; dann ist nach **44·4·3** $E - A = \underset{\xi \leq \xi^*}{S} (K_\xi - A)$. Bezeichnen wir mit B_ξ^* die Projektion von B_ξ in den Raum E, so ist nach **44·4·4**: $K_\xi - A = K_\xi - B_\xi^*$. Nach **44·4·51** ist K_ξ eine Borelsche Menge in E; nach **44·4·5** und **42·4·5** ist B_ξ^* eine Borelsche Menge in E, also auch $K_\xi - A$, also auch $E - A$, also auch A.

Literatur: N. Lusin, Leç. s. l. ensembles analytiques S. 187. N. Lusin u. W. Sierpiński, Journ. de math. (9) 2 (1923) S. 53.

Nachträge und Ergänzungen.

Am Schlusse von § 25, 4 (S. 181) ist einzufügen:

25·4·2. *Ist f eine Funktion auf der separablen Menge A, so gibt es nur abzählbar viele Funktionswerte von f, die Maxima (bzw. Minima) sind.*

Sei $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ ein abzählbares ausgezeichnetes System in A offener Mengen (§ 13, 1). Ist y ein Maximum von f, so gibt es ein $a \varepsilon A$ und eine Umgebung U_a, so daß $f(a) = y$ und $f(x) \leq y$ für alle $x \varepsilon A\, U_a$; also gibt es auch einen Index n_y, so daß $a \varepsilon H_{n_y}$ und $f(x) \leq y$ für alle $x \varepsilon H_{n_y}$; ist auch z ein Maximum von f, so gibt es ebenso ein $a' \varepsilon A$ und einen Index n_z, so daß $f(a') = z$, $a' \varepsilon H_{n_z}$, $f(x) \leq z$ für alle $x \varepsilon H_{n_z}$. Ist $z \neq y$, so ist offenbar $n_z \neq n_y$, d. h. verschiedenen Maxima von f sind verschiedene Indizes n zugeordnet; also gibt es nur abzählbare viele Maxima von f.

Literatur: W. Sierpiński, C. R. Vars. 1912, S. 236; Prace mat.-fis. 27 (1916) S. 17.

Zu § 30, 2 (S. 234): Satz **30·2·1** hat zu lauten:

30·2·1. *Ist* $A \varepsilon \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})$, *so ist* $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) \subseteqq \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})_\sigma$; *ist* $A \varepsilon \underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})$, *so ist* $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) \subseteqq \underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})_\sigma$. *Ist* $E \varepsilon \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$, *so ist* $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}) \subseteqq \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})_\delta$; *ist* $E \varepsilon \underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})$, *so ist* $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}) \subseteqq \underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S})_\delta$.

Zu § 30, 2 (S. 236): In **30·2·3** und **30·2·31** ist die Voraussetzung $E \varepsilon \mathfrak{M}$ hinzuzufügen.

Zu § 31. Die in der Literatur zu § 31 angeführte Abhandlung von Sierpiński ermöglicht es, einige Sätze dieses Paragraphen einfacher und systematischer zu beweisen.

Man kann § 31, 5 (Das Mengensystem $\mathfrak{M}_1^1$) und § 31, 6 (Das Mengensystem $\mathfrak{M}^*$) unmittelbar an § 31, 1 schließen, indem man den Beweis von **31·6·1** durch den folgenden ersetzt:

Aus **3·7·4** folgt $\mathfrak{M}^* \subseteqq \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}^2$. Bleibt zu zeigen $\mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}^2 \subseteqq \mathfrak{M}^*$, d. h.: ist $A \varepsilon \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}^2$, so ist auch $A \varepsilon \mathfrak{M}^*$. Sei also $A \varepsilon \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}^2$; dann ist $A = \underset{i}{D}\, B_i = \underset{i}{S}\, C_i$ mit $B_i \varepsilon \mathfrak{M}^1$, $C_i \varepsilon \mathfrak{M}_1$; hierin ist weiter $B_i = \underset{k}{S}\, B_{ik}$, $C_i = \underset{k}{D}\, C_{ik}$

mit $B_{ik} \varepsilon \mathfrak{M}$, $C_{ik} \varepsilon \mathfrak{M}$, und nach 3·5·2 kann angenommen werden: $B_{ik+1} \supseteqq B_{ik}$, $C_{ik+1} \subseteqq C_{ik}$. Wir setzen: $P_{ik} = B_{1k} B_{2k} \ldots B_{ik} C_{ki}$, $Q_n = P_{1n} + P_{2n} + \ldots + P_{nn}$. Dann ist $Q_n \varepsilon \mathfrak{M}$, es genügt also, zu zeigen: $A = \operatorname{Lim}_n Q_n$, d. h.: ist $a \varepsilon A$, so ist auch $a \varepsilon Q_n$ für fast alle n, und ist $a \sim\varepsilon A$, so ist auch $a \sim\varepsilon Q_n$ für fast alle n. — Sei also $a \varepsilon A$; dann gibt es ein i^*, so daß $a \varepsilon C_{i^*}$; dann ist auch $a \varepsilon C_{i^*k}$ für alle k; ferner ist $a \varepsilon B_i$ für alle i; zu jedem i gibt es also ein k_i, so daß $a \varepsilon B_{ik}$ für $k \geq k_i$; setzen wir $k^* = \max(k_1, k_2, \ldots, k_{i^*})$, so ist also $a \varepsilon B_{ik}$ für $i = 1, 2, \ldots, i^*$ und $k \geq k^*$; also ist $a \varepsilon P_{i^*k}$ für $k \geq k^*$, also auch $a \varepsilon Q_n$ für $n \geq \max(i^*, k^*)$. Sei sodann $a \sim\varepsilon A$; dann gibt es ein i^*, so daß $a \sim\varepsilon B_{i^*}$; dann ist auch $a \sim\varepsilon B_{i^*k}$ für alle k, also auch $a \sim\varepsilon P_{ik}$ für $i \geq i^*$ und alle k; ferner ist $a \sim\varepsilon C_i$ für alle i; zu jedem i gibt es also ein k_i, so daß $a \sim\varepsilon C_{ik}$ für $k \geq k_i$; setzen wir $k^* = \max(k_1, k_2, \ldots, k_{i^*})$, so ist also $a \sim\varepsilon C_{ik}$ für $i = 1, 2, \ldots, i^*$ und $k \geq k^*$; also ist $a \sim\varepsilon P_{ik}$ für $i = 1, 2, \ldots, i^*$ und $k \geq k^*$; und da, wie schon gezeigt: $a \sim\varepsilon P_{ik}$ für $i \geq i^*$ und alle k, ist $a \sim\varepsilon Q_n$ für $n \geq k^*$.

Zu Beginn von § 31, 2 füge man die Definition ein: Das Funktionensystem $\mathfrak{S}$ auf E heiße (abweichend von der in der Algebra üblichen Terminologie) ein Ring, wenn aus $f_1 \varepsilon \mathfrak{S}$ und $f_2 \varepsilon \mathfrak{S}$ folgt: $\max(f_1, f_2) \varepsilon \mathfrak{S}$, $\min(f_1, f_2) \varepsilon \mathfrak{S}$. Dann gilt:

31·2·0. *Ist $\mathfrak{S}$ ein Ring, so auch $\mathfrak{S}^1$ und $\mathfrak{S}_1$.*

In den Sätzen 31·2·2, 31·2·21, 31·2·3 und in Formel (2) S. 242 kann die Voraussetzung, $\mathfrak{S}$ sei autark, ersetzt werden durch die Voraussetzung, $\mathfrak{S}$ sei ein Ring.

Auf S. 244 füge man den Satz ein:

31·3·0. *Ist $\mathfrak{S}$ ein Ring, so auch $\mathfrak{S}_1^1$.*

In den Sätzen 31·3·3, 31·3·31 kann die Voraussetzung, $\mathfrak{S}$ sei autark, ersetzt werden durch die Voraussetzung, $\mathfrak{S}$ sei ein Ring. Nach Satz 33·3·31 füge man ein:

Wir bezeichnen ein Funktionensystem $\mathfrak{S}$, für das $\mathfrak{S}_1^1 = \mathfrak{S}$ ist, als ein μ-System. Dann gilt:

31·3·32. *Ist $\mathfrak{S}$ ein Ring, so ist $\mathfrak{S}_1^1$ das kleinste μ-System über $\mathfrak{S}$.*

Nach 31·3·31 ist $\mathfrak{S}_1^1$ ein μ-System. Sei $\mathfrak{T}$ ein μ-System über $\mathfrak{S}$, d. h. $\mathfrak{S} \subseteqq \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1^1$; aus $\mathfrak{S} \subseteqq \mathfrak{T}$ folgt $\mathfrak{S}_1^1 \subseteqq \mathfrak{T}_1^1$, also $\mathfrak{S}_1^1 \subseteqq \mathfrak{T}$.

Auf S. 246 füge man den Satz ein:

31·4·0. *Ist $\mathfrak{S}$ ein Ring, so auch $\mathfrak{S}^*$.*

Die Sätze 31·4·2, 31·4·4 sind zu ersetzen durch:

31·4·2. *Ist $\mathfrak{S}$ ein Ring, so ist $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}^2$.*

Der Beweis, daß $\mathfrak{S}^* \subseteqq \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}^2$, bleibt ungeändert. Es ist noch zu zeigen, daß $\mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}^2 \subseteqq \mathfrak{S}^*$, d. h.: ist $f \varepsilon \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}^2$, so ist auch $f \varepsilon \mathfrak{S}^*$. Sei also $f \varepsilon \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}^2$; dann ist $f = \lim\limits_i f_i' = \lim\limits_i f_i''$, wo $f_i' \varepsilon \mathfrak{S}^1$, $f_i'' \varepsilon \mathfrak{S}_1$ und $f_{i+1}' \leqq f_i'$, $f_{i+1}'' \geqq f_i''$; hierin ist weiter $f_i' = \lim\limits_k f_{ik}'$, $f_i'' = \lim\limits_k f_{ik}''$ mit $f_{ik}' \varepsilon \mathfrak{S}$, $f_{ik}'' \varepsilon \mathfrak{S}$, $f_{ik+1}' \geqq f_{ik}'$, $f_{ik+1}'' \leqq f_{ik}''$. Wir setzen: $g_{ik} = \min(f_{1k}', f_{2k}', \ldots, f_{ik}', f_{ik}'')$, $f_n = \max(g_{1n}, g_{2n}, \ldots, g_{nn})$. Dann ist $f_n \varepsilon \mathfrak{S}$, es genügt also, zu zeigen: $f = \lim\limits_n f_n$, d. h.: ist $u < f(x)$, so ist auch $u < f_n(x)$ für fast alle n, und ist $u > f(x)$, so ist auch $u > f_n(x)$ für fast alle n. — Sei also $u < f(x)$; dann ist auch $u < f_i''(x)$ für fast alle i; sei etwa $u < f_{i^*}''(x)$; dann ist auch $u < f_{i^*k}''(x)$ für alle k; ferner ist $u < f_i'(x)$ für alle i; zu jedem i gibt es also ein k_i, so daß $u < f_{ik}'(x)$ für $k \geqq k_i$; setzen wir $k^* = \max(k_1, k_2, \ldots, k_{i^*})$, so ist also $u < f_{ik}'(x)$ für $i = 1, 2, \ldots, i^*$ und $k \geqq k^*$; also ist $u < g_{i^*k}(x)$ für $k \geqq k^*$, also auch $u < f_n(x)$ für $n \geqq \max(i^*, k^*)$. Sei sodann $u > f(x)$; dann gibt es ein i^*, so daß $u > f_{i^*}'(x)$; dann ist auch $u > f_{i^*k}'(x)$ für alle k, also auch $u > g_{ik}(x)$ für $i \geqq i^*$ und alle k; ferner ist $u > f_i''(x)$ für alle i; zu jedem i gibt es also ein k_i, so daß $u > f_{ik}''(x)$ für $k \geqq k_i$; setzen wir $k^* = \max(k_1, k_2, \ldots, k_{i^*})$, so ist also $u > f_{ik}''(x)$ für $i = 1, 2, \ldots, i^*$ und $k \geqq k^*$; also ist $u > g_{ik}(x)$ für $i = 1, 2, \ldots, i^*$ und $k \geqq k^*$; und da, wie schon gezeigt: $u > g_{ik}(x)$ für $i \geqq i^*$ und alle k, ist $u > f_n(x)$ für $n \geqq k^*$.

In den Sätzen **31·4·41**, **31·4·5** kann nun die Voraussetzung, $\mathfrak{T}$ sei autark und additiv, ersetzt werden durch die Voraussetzung, $\mathfrak{T}$ sei ein Ring. Der Beweis von **31·4·5** ist zu ersetzen durch:

Nach **31·3·0** ist $\mathfrak{T}_1^1$ ein Ring, also nach **31·4·2**: $(\mathfrak{T}_1^1)^* = (\mathfrak{T}_1^1)_2 \cdot (\mathfrak{T}_1^1)^2$. Hierin ist $(\mathfrak{T}_1^1)_2 = ((\mathfrak{T}_1^1)^1)_1$; nach **31·3·3** ist $(\mathfrak{T}_1^1)^1 = \mathfrak{T}^1$, also $(\mathfrak{T}_1^1)_2 = (\mathfrak{T}^1)_1 = \mathfrak{T}_2$; ebenso ist $(\mathfrak{T}_1^1)^2 = \mathfrak{T}^2$. Also ist nach **31·4·2**: $(\mathfrak{T}_1^1)^* = \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}^2 = \mathfrak{T}^*$.

Sodann füge man ein:

31·4·51. *Ist $\mathfrak{S}$ ein Ring, so ist* $(\mathfrak{S}^*)^1 = \mathfrak{S}^2$, $(\mathfrak{S}^*)_1 = \mathfrak{S}_2$.

Da nach **31·4·2** $\mathfrak{S}^* \subseteqq \mathfrak{S}^2$, ist $(\mathfrak{S}^*)^1 \subseteqq (\mathfrak{S}^2)^1$; da hierin $\mathfrak{S}^2 = (\mathfrak{S}_1)^1$ und $\mathfrak{S}_1$ nach **31·2·0** ein Ring, ist nach **31·2·21**: $(\mathfrak{S}^2)^1 = \mathfrak{S}^2$, also $(\mathfrak{S}^*)^1 \subseteqq \mathfrak{S}^2$. Da $\mathfrak{S}_1 \subseteqq \mathfrak{S}^*$, ist auch umgekehrt $\mathfrak{S}^2 = (\mathfrak{S}_1)^1 \subseteqq (\mathfrak{S}^*)^1$.

31·4·52. *Ist $\mathfrak{S}$ ein Ring, so ist $\mathfrak{S}^*$ ein μ-System.*

Denn nach **31·4·51** ist $(\mathfrak{S}^*)_1^1 = \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}^2$, also nach **31·4·2** $(\mathfrak{S}^*)_1^1 = \mathfrak{S}^*$.

In **31·4·6** kann die Voraussetzung, $\mathfrak{T}$ sei autark, ersetzt werden durch die Voraussetzung, $\mathfrak{T}$ sei ein Ring.

Zu § 32, 2 (S. 252, 253): In Satz **32·2·1** kann die Voraussetzung, $\mathfrak{S}$ sei autark, ersetzt werden durch die Voraussetzung, $\mathfrak{S}$ sei ein Ring. In Satz **32·2·11** kann die Voraussetzung, $\mathfrak{S}$ sei völlig autark, ersetzt werden durch die Voraussetzung, $\mathfrak{S}$ sei ein Ring und ein μ-System.

Zu § 34, 1 (S. 277): Neben **34·1·2**, **34·1·21** treten die ganz ebenso zu beweisenden Sätze:

34·1·20. *Ist $\mathfrak{S}$ ein Ring, so ist für jedes $\xi \geq 1$ auch $\mathfrak{S}^\xi$ und $\mathfrak{S}_\xi$ ein Ring.*

34·1·22. *Ist $\mathfrak{S}$ ein Ring und ξ Grenzzahl, so ist auch das System* (1·11) *ein Ring.*

In **34·1·3**, **34·1·31**, **34·1·32** kann die Voraussetzung, $\mathfrak{S}$ sei autark, ersetzt werden durch die Voraussetzung, $\mathfrak{S}$ sei ein Ring.

Neben **34·1·4** tritt:

34·1·40. *Ist $\mathfrak{S}$ ein Ring, so ist für jedes $\xi \geq 1$ $\mathfrak{S}^\xi$ und $\mathfrak{S}_\xi$ ein μ-System.*

Denn nach **34·1·3** und **34·1·32** ist $(\mathfrak{S}^\xi)_1 = \mathfrak{S}_{\xi+1}$, $(\mathfrak{S}^\xi)^1 = \mathfrak{S}^\xi$, also nach **34·1·1**: $(\mathfrak{S}^\xi)_1^1 = \mathfrak{S}_{\xi+1}\,\mathfrak{S}^\xi = \mathfrak{S}^\xi$.

Zu § 34, 2 (S. 279, 280): Aus **34·1·20** folgt:

34·2·21. *Ist $\mathfrak{S}$ ein Ring, so ist für jedes $\xi \geq 1$ auch $\mathfrak{S}_\xi^\xi$ ein Ring.*

In **34·2·3** und **34·2·31** kann die Voraussetzung, $\mathfrak{S}$ sei autark, ersetzt werden durch die Voraussetzung, $\mathfrak{S}$ sei ein Ring. Aus **34·2·3** folgt dann:

34·2·32. *Ist $\mathfrak{S}$ ein Ring, so ist für jedes $\xi \geq 1$ $\mathfrak{S}_\xi^\xi$ ein μ-System.*

In **34·2·6** und **34·2·61** kann die Voraussetzung, $\mathfrak{S}$ sei autark und additiv, ersetzt werden durch die Voraussetzung, $\mathfrak{S}$ sei ein Ring.

Sachregister.

Verzeichnis der verwendeten Symbole.

$\varLambda$ (die leere Menge) 2.

$\{a\}$ (die nur aus dem Elemente a bestehende Menge) 2.

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (die aus den Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestehende Menge) 2.

$((y_n))$ (die Folge der Elemente $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$) 5.

$a \varepsilon A$ (a ist Element der Menge A) 2.

$a \sim\varepsilon A$ (a ist nicht Element der Menge A) 2.

$[\varphi(\hat{x})]$ (die durch die Aussagenfunktion $\varphi(x)$ definierte Menge) 2.

$[\varphi(\hat{x}, \hat{y})]$ (die durch die Aussagenfunktion $\varphi(x, y)$ definierte Relation) 3.

$[f(\hat{x}) > y]$, $[f(\hat{x}) < y]$, $[f(\hat{x}) \geq y]$, $[f(\hat{x}) \leq y]$, $[f(\hat{x}) = y]$ (Menge aller x, in denen $f(x) > y$ ist, usf.) 187, 232.

$[f(\hat{x}) > \hat{y}]$, $[f(\hat{x}) < \hat{y}]$, $[f(\hat{x}) \geq \hat{y}]$, $[f(\hat{x}) \leq \hat{y}]$, $[f(\hat{x}) = \hat{y}]$, $[f(\hat{x}) < g(\hat{y})]$ (Menge aller Punkte (x, y), in denen $f(x) > y$ ist, usf.) 294.

$P|Q$ (die aus P und Q zusammengesetzte Relation) 3.

R^{-1} (die zu R inverse Relation) 3.

$f^{(-1)}$ (die Umkehrfunktion von f) 385.

$A \upharpoonright P$, $A \upharpoonright f$, $A \upharpoonright \mathfrak{M}$, $A \upharpoonright \mathfrak{S}$ (die auf A eingeschränkte Abbildung P, Funktion f usf.) 156, 180, 253, 254.

$A \subseteqq B$, $B \supseteqq A$ (A ist Teil von B) 2.

$A \subset B$, $B \supset A$ (A ist echter Teil von B) 2.

$A \Subset B$ 86.

$A \sim B$ (A und B sind äquivalent, gleichmächtig) 20.

$A \simeq B$ (A und B sind ähnlich) 30.

$A \approx B$ (A und B sind homöomorph) 169.

$-A$ (Komplement einer Menge) 2, 46.

$A + B$, AB, $A.B$, $A - B$ (Summe, Durchschnitt, Differenz zweier Mengen) 6.

$A \times B$ (Produkt zweier Mengen) 9, 141.

A^B (Potenz von Mengen) 10.

$\underset{i=1}{\overset{k}{S}} A_i$, $\underset{m \varepsilon M}{S} A_m$, $\underset{n}{S} A_n$, $\underset{k,n}{S} A_{k,n}$ (Summen von Mengen) 7.

$\underset{i=1}{\overset{k}{D}} A_i$, $\underset{m \varepsilon M}{D} A_m$, $\underset{n}{D} A_n$, $\underset{k,n}{D} A_{k,n}$ (Durchschnitte von Mengen) 7.

$\underset{i=1}{\overset{k}{P}} A_i$, $\underset{m \varepsilon M}{P} A_m$ (Produkte von Mengen) 9.

$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}.\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ (Summe, Produkt, Potenz von Mächtigkeiten) 21, 22.

$\sum_{m \varepsilon M} \mathfrak{a}_m$, $\prod_{m \varepsilon M} \mathfrak{b}_m$ (Summe, Produkt von Mächtigkeiten) 21, 22.

$\sum_{\nu} a_\nu$ (Summe von Zahlen) bedeutet $\lim\limits_{n} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$; sind alle $a_\nu \geq 0$ oder ≤ 0 so existiert dieser Limes immer; er kann auch $= +\infty$, oder $= -\infty$ sein.

max $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, min $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (die größte, kleinste unter den Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$).

$\sup\limits_{x \varepsilon A} x$ oder sup A (Supremum der Zahlenmenge A, d. h. kleinste Zahl, die von keinem $x \varepsilon A$ überschritten wird) 179.

$\inf\limits_{x \varepsilon A} x$ oder inf A (Infimum der Zahlenmenge A, d. h. größte Zahl, die von keinem $x \varepsilon A$ unterschritten wird) 179.

$\sup\limits_{n} a_n$, $\inf\limits_{n} a_n$ (Supremum, Infimum der Zahlenfolge a_n, d. h. kleinste, bzw. größte Zahl, die von keiner Zahl a_n der Folge überschritten, bzw. unterschritten wird) 179.

$\sup\limits_{x \varepsilon A} f(x)$, $\inf\limits_{x \varepsilon A} f(x)$ (Supremum, Infimum einer Funktion) 180.

$\overline{\mathrm{Lim}}_{n} A_n$, $\underline{\mathrm{Lim}}_{n} A_n$, $\mathrm{Lim}_{n} A_n$ (Limes superior, Limes inferior, Limes einer Mengenfolge) 17, 18.

$\overline{\lim\limits_{n}} A_n$, $\underline{\lim\limits_{n}} A_n$, $\lim\limits_{n} A_n$ (obere Näherungsgrenze, untere Näherungsgrenze, Näherungsgrenze einer Mengenfolge) 104, 105.

$\lim\limits_{n} \alpha_n$ (Limes einer Folge von Ordinalzahlen) 44.

$\lim\limits_{n} a_n$, $a_n \to a$, $a_n \to +\infty$, $a_n \to -\infty$ (Grenzpunkt einer Punktfolge) 109, 179.

$\overline{\lim\limits_{n}}\, a_n$, $\underline{\lim\limits_{n}}\, a_n$ (Limes superior, inferior einer Zahlenfolge, d. h. Supremum, bzw. Infimum aller Zahlen z, für die $a_n \geq z$, bzw. $a_n \leq z$ für unendlich viele n) 179.

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$, $f(x) \to b$ für $x \to a$ (Grenzwert einer Funktion) 181.

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ (einseitige Grenzwerte einer Funktion) 209.

$\overline{\lim\limits_{f \varepsilon M}}\, f(x)$, $\underline{\lim\limits_{f \varepsilon M}}\, f(x)$ (Limes superior, inferior einer Funktionenmenge) 227.

$a < a'$, $a < A'$, $A' < a$, $A < A'$ (a vor a' usf.) 29.

Z_α (α-te Zahlklasse) 43.

$\aleph$ (Mächtigkeit des Kontinuums) 26.

$\aleph_0$ (Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen) 23.

$\aleph_\alpha$ 43.